

地形跟随坐标下的中尺度模式气压梯度力 计算误差分析及其改进方案

胡江林^{1, 2} 王盘兴¹

1 南京信息工程大学大气科学系, 南京 210044

2 中国气象科学研究院灾害天气国家重点实验室, 北京 100081

摘 要 地形跟随坐标系中水平气压梯度力的算法一直是困扰数值模式发展的关键问题之一。目前数值模式中使用的计算方法只能在天气尺度的模式中部分缓解气压梯度力的计算误差问题。在高分辨率中尺度模式中, 随着地形坡度的进一步加大, 气压梯度力的计算误差问题更加突出。作者通过理想场的计算分析了几种主要气压梯度力算法的误差, 结果显示在中尺度模式分辨率下, 计算的水平气压梯度力不但不收敛于真值, 而且随着地形坡度的加大或模式分辨率的提高, 计算误差逐渐增大。作者提出了基于静力方程订正的回插等压面改进方案, 理想场的计算结果表明该方案的计算误差可显著减小, 在典型中尺度模式参数的设置下计算精度可达 10^{-6} m/s²。其最大特点是随着模式分辨率的提高, 该方案的计算误差将逐步收敛到零。

关键词 地形跟随坐标 气压梯度力 理想场 误差

文章编号 1006-9895 (2007) 01-0109-10

中图分类号 P435

文献标识码 A

The Errors of Pressure Gradient Force in High-Resolution Meso-Scale Model with Terrain-Following Coordinate and Its Revised Scheme

HU Jiang-Lin^{1, 2} and WANG Pan-Xing¹

1 Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University of Information and Technology, Nanjing 210044

2 State Key Laboratory of Severe Weather, Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081

Abstract It is a difficult problem for reducing the errors of computing pressure gradient force (PGF) in the terrain-following vertical coordinates. The primary ways to solve the problem in use are a) averaging integrated scheme, b) special formats like Corby's scheme, c) subtracting hydrostatics scheme, d) subtracting error scheme and e) interpolating to isobaric levels and so on. The schemes mentioned above just moderate the problem and they have some trouble for most of the terrain-following meso-scale numerical weather models. The effects on reducing PGF errors will be lessened and the problem will be deteriorated if the meso-scale numerical models increase resolution or become the steeper slope in topography.

The errors in several kinds of PGF computing methods have been diagnosed under very steep slope with high-resolution used in a meso-scale model by ideal field tests. Tests show that PGF errors can reach 10^{-2} m/s² by classical method, 10^{-3} m/s² by average classical method and the highest precision 10^{-4} m/s² by Corby's scheme. It is also indicated that computing results of PGF in the $p-\sigma$ terrain-following vertical coordinates will be deteriorated slightly and the errors will not be converged under the conditions of steep slopes if the model resolutions increase in the vertical direction.

A revised scheme has been put forward in the conditions of high-resolution meso-scale model. It is based on the techniques of interpolating to isobaric level to calculate PGF after finding precise geopotential height through integrating hydrostatic equation calculations with high vertical resolution. The ideal field tests show that the PGF errors decreased greatly under the steep topography slopes in the meso-scale model and the highest precision can reach 10^{-6} m/s² under the typical meso-scale parameters. The calculation errors come mainly from integrals of truncation errors of hydrostatic equation for geopotential height in the vertical direction when the number of vertical layers is less than 100. When the number of vertical layers is more than 100, truncation errors of differencing in horizontal discretizations will also play an important role.

The most significant feature is that the errors of PGF will reduce dramatically with vertical resolution increase and the revised scheme on PGF will be converged with the increasing vertical resolutions under the conditions of the ideal atmospheric field.

Key words terrain-following vertical coordinates, pressure gradient force (PGF), ideal field test, error

1 引言

地形是中尺度数值天气预报模式要处理的核心问题之一。自 1957 年 Phillips^[1] 提出处理地形的 σ 坐标以来, σ 坐标在数值模式的发展中起了特别重要的和主导的作用, 在近半个世纪来取得了长足的进步和辉煌的成就。从早期的大气环流模式到欧洲中期预报模式, 再到近年来发展的中尺度高分辨率(网格距小于 10 km) 数值天气预报模式, 例如美国的 WRF (Weather Research and Forecasting) 和 MM5 (Fifth-Generation NCAR/Penn State Mesoscale Model) 模式、中国的 GRAPES (Global/Regional Assimilation and Prediction Enhanced System)、法国的 ALADIN (Aire Limitée Adaptation Dynamique développement International)、德国的 DWD-LM (German Weather Service Local Model) 也都使用地形跟随 σ 坐标。

σ 坐标使坐标面沿地形的起伏变化而变化, 主要优点是将大气模式的计算域投影到一个矩形计算网格, 便于计算编程; 由于计算空间的变换, 下边界条件为齐次(新坐标下垂直速度为零), 简化了下边界条件, 避免了气压坐标或等位温坐标的与地面相截所带来的复杂边界问题; 由于允许不等距的计算分层, 便于将边界和表层参数化耦合到动力学框架部分, 且该坐标能较好地描述连续场(例如温度和风平流)的变化, 因而 σ 坐标在大气数值模式中被广泛使用。然而, 气象学家早就注意到 σ 坐标系水平动量方程中的气压梯度力 (PGF) 项计算被变换成具有相反正负符号的两大项的小差, 因而在陡峭地形附近水平气压梯度力计算的误差很大, 所

以采用 σ 坐标的数值模式在预报和模拟背风波气旋、冷空气阻塞等山脉下风方向的天气事件时存在较大困难。

国内外许多气象学家对如何提高地形跟随坐标系下的水平气压梯度力的计算精度问题做了细致而富有成效的工作, 这些工作综合起来形成的 σ 坐标下气压梯度力的计算方案主要有以下几类:

(1) 平均积分法: 钱永甫等^[2] 在温度随高度一定规律变化的假定下, 提出位势可以由气压解析表达, 于是格点的气压梯度力可由整个 σ 层的垂直积分平均值来表示, 他们通过实践证明对两层模式该方案效果最佳。对多层模式, 由于垂直方向温度递减率是随高度变化的, 因而计算方案较复杂。

(2) 静力扣除法: 该方法最早由曾庆存提出并由朱抱真等^[3] 在中国科学院大气物理研究所的 4 层模式上实现, 该方法是在格点上假定一平均廓线, 从两项中扣除静力平衡部分^[4, 5], 或把 σ 坐标下模式初值的气压梯度力的计算误差在积分过程中一并扣除^[6, 7], 从而较好地改善了模式的预报效果。WRF 模式也是使用了相当于静力扣除法的方法扣除了部分相抵的气压梯度力。

(3) 采用 σ 的变换坐标法: 例如采用 $p-\sigma$ 混合坐标, 低层为 σ 坐标, 在某一等压面之上改为 p 坐标, 这样可以减小高层的计算误差。最近, 杨晓娟和钱永甫^[8] 将 $p-\sigma$ 混合坐标的低层的气压梯度力计算改为由较为精确的上层递推算出, 从而较大地提高了 $p-\sigma$ 混合坐标低层的水平气压梯度力计算精度。

(4) 特殊差分格式法: Corby 等^[9] 注意到在 σ 坐标下, 即使选取温度随 $\ln p$ 线性变化, 解析的气

压梯度力表达式也比常规的差分算法多一项剩余, 该项在陡峭地形附近可达 0.01 m/s (即使是在大尺度模式中), 他们将 σ 坐标下的气压梯度力写成一种特殊差分格式来克服计算误差。现在广泛使用的 MM5 就是使用了这种特殊格式。Janjic^[10] 解释了通常情况下, 气压梯度力计算的产生误差的原因, 也提出了一种特殊格式来克服这种误差。Arakawa 等^[11] 提出气压梯度力的计算原则是沿一闭合等值线积分应不产生动量环流, 因而他们设计出基于局地精度需要的静力方程近似假定, 进而决定气压梯度力的表达式。Arakawa 等^[12] 还根据能量守恒和质量守恒, 提出热力学方程和动能方程的能量产生项应具有相反符号, 进而设计出气压梯度力的计算公式。

(5) 气压对数关系回插法: σ 坐标下气压梯度力的计算误差主要由于计算是在陡峭的 σ 坐标面上进行而引起, 因而解决该问题的方法可以将气压梯度力的计算从 σ 坐标面按气压对数关系插值回等压面上计算位势高度^[13, 14] 后再计算气压梯度力。

以上各种方法只是缓解了大尺度模式中气压梯度力的误差问题, 特别是方案 (1)~(2) 在中尺度数值模式中使用较少。而 Arakawa 等^[11] 的计算方案太复杂, 模式计算中也很少使用。方案 (5) 在插值回等压面的过程中没有考虑静力关系, 而 σ 坐标下气压梯度力计算的第 2 项就是要作静力订正, 因此仅仅作数学意义上的插值订正也存在较大的误差, 特别是在外插时可能引起很大的误差。

随着模式分辨率的提高, 模式对中小尺度的地形描述越来越精确, 高分辨率模式中陡峭地形的可能坡度也越来越大 (例如分辨率为 2 km 的中尺度模式, 地形坡度可能达到 0.3 , 而一般的天气尺度模式地形坡度小于 0.01), 在陡峭地形附近由于水平气压梯度力计算误差引起的虚假扰动将更加突出^[15]。这些地形流问题包括低估地形拖曳和虚假降水^[16], 这使得高分辨率中尺度模式的地形不得不使用数字滤波来缓解上述问题, 但这又导致低估了地形的影响^[17]。在城市气象的小尺度模拟中, 寻找能逼真描述各种高大建筑物引起的扰动的方案更加迫切。因此, 简单套用天气尺度模式的计算方法直接运用到含陡峭地形高分辨率中小尺度模式, 可能不仅不能改进模式的模拟与预报效果, 相反还可能进一步恶化模式的模拟与预报能力。因此有必要研究分析高分辨率中尺度模式的气压梯度力计算

误差, 提出适合于高分辨率中尺度模式的气压梯度力计算方案。

要分析气压梯度力的计算误差, 就必须准确知道气压场的分布, 然而因为观测误差的原因要精确分析实际大气的气压场是不可能的。本文通过理想场试验的方法来分析检验中尺度模式气压梯度力的几种主要算法的误差, 结果显示在中尺度模式分辨率下, 计算的水平气压梯度力不但不收敛于真值, 而且随着地形坡度的加大或模式分辨率的提高, 计算误差可能增大。通过误差来源分析表明, 气压梯度力计算误差在不同的情况下有不同的来源, 所以提出了中尺度高分辨率模式气压梯度力计算的改进方案。

2 理想场的设计

本文仿文献[8]的方法, 通过可由解析求解气压梯度力的理想场的分析计算, 来检验各种计算方案的计算误差, 同时分析误差来源。为适合中尺度高分辨率模式的需要, 使用的参数都尽量采用中尺度变化的参数。与 Corby 等^[9] 选取温度随 $\ln p$ 线性变化不同, 这里设计的理想场温度 T 的垂直分布比一般的线性假设高一阶, 这样可避免试验结果的偶然性, 保证试验结果在实际大气更复杂情况下的普遍通用性。不失一般性, 我们在 $x-z$ 二维平面上研究其特性。设温度与气压的关系满足:

$$T = T_0 + \gamma \left(a \ln^2 \frac{p}{p_0} + b \ln \frac{p}{p_0} \right), \quad (1)$$

式中, T 为温度, p 为气压, 下标“0”表示该变量在参考面上的值, 这里设 $p_0 = 1013.25 \text{ hPa}$, $T_0 = 288 \text{ K}$; a 和 b 是待定参数, 由温度廓线确定, 本文取 $a=1$, $b=5.5$, 该取法使得理想场的温度廓线与标准大气很接近; γ 表示温度 T 的水平变化, 简单地假定其含 e 指数变化:

$$\gamma = \gamma_0 + c \exp \frac{-(x-x_0)^2}{L_\gamma^2}, \quad (2)$$

其中, $\gamma_0 = 12$, $c = -0.01$ 。

图 1 给出了理想场温度随气压的垂直剖面, 除非特别说明, 本文所有图例的参数设置是: 最大地形高度 $H = 4000 \text{ m}$, 水平格点格距为 5000 m , 地形变化折叠长度参数 $L_z = 10000 \text{ m}$, γ 变化的参数 $L_\gamma = 50000 \text{ m}$, 最大地形坡度 $\partial Z_s / \partial x = 0.26936$ 。从图 1 中可见, 该参数设定条件下理想场的温度在对流层从地面的 288 K 递减到 70 hPa 的 210 K 以下,

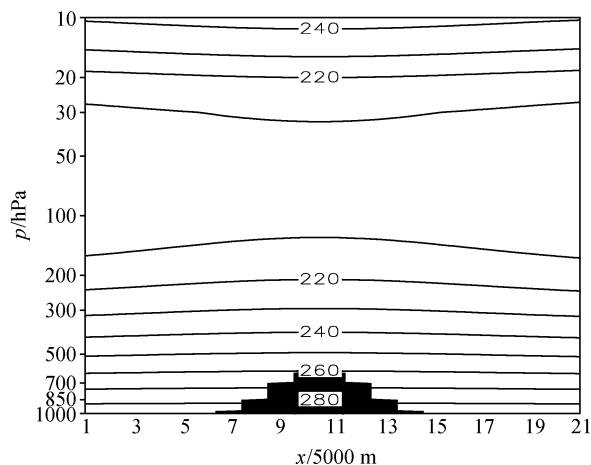


图1 理想场的温度(单位: K)随气压分布

Fig. 1 Temperature (K) profile vs. pressure in the ideal field

而在平流层温度又逐渐上升至 10 hPa 的 240 K 左右, 这样设定的理想场温度随气压的变化基本能反映中纬度实际大气的平均情况。由于 γ 水平变化的对称性, 理想场的水平气压梯度力的大小也是对称的, 这样设计的理想场更方便检验结果的正确性。与文献 [8] 不同的是, 本文使用的温压关系 [公式 (1)] 更具有普遍意义, 特别是计算中参数给定依照中尺度特征, 而文献 [8] 使用的参数是大尺度的。

由静力方程对气压积分可得位势高度 ϕ 的表达式:

$$\phi = \phi_0 - R \left(T_0 + \frac{b\gamma}{2} \ln \frac{p}{p_0} + \frac{a\gamma}{3} \ln^2 \frac{p}{p_0} \right) \ln \frac{p}{p_0}, \quad (3)$$

其中, R 为理想气体常数, ϕ_0 假定为 0。由 (3) 式可知, 这时位势高度是气压对数的 3 次函数, 给定任一点的气压可计算其位势高度。在有地形情况下, 已知的是地形的位势高度, 其地面气压应求解关于气压对数 $\ln p$ 的 3 次方程。利用卡当公式, 可得理想场的地面气压:

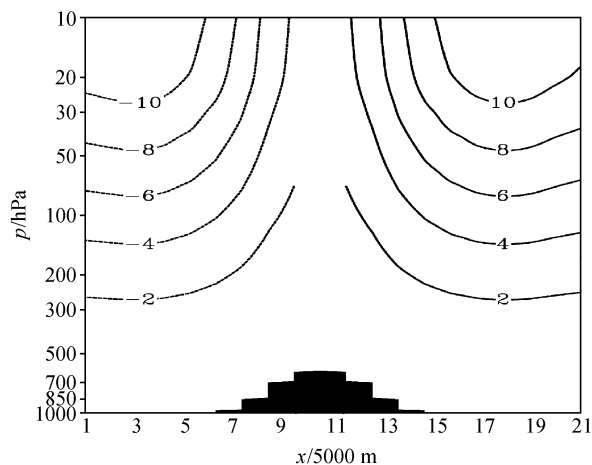
$$p = p_0 \exp \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + s^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + s^3}} - \frac{b}{2a} \right), \quad (4)$$

其中,

$$3s = \frac{3T_0}{a\gamma} - \frac{3b^2}{4a^2}, \quad (5)$$

$$2q = \frac{b^3}{4a^3} - \frac{3bT_0}{2a^2\gamma} + \frac{3(\phi_s - \phi_0)}{aR\gamma}, \quad (6)$$

式中, ϕ_s 是地形的位势高度。为计算地形的影响,

图2 理想场气压梯度力的解析解(单位: 10^{-4} m/s^2)Fig. 2 Analytic solutions for pressure gradient force (10^{-4} m/s^2) in the ideal field

一般将地形高度设为钟型函数:

$$Z_s = H \exp \left(-\frac{(x - x_0)^2}{L_z^2} \right), \quad (7)$$

其中, H 为最大地形高度, L_z 为地形的 e 指数折叠长度, x_0 为最大地形高度所在的水平坐标值。这时, 等压面上的重力位势梯度为

$$\nabla \phi = \nabla \phi_0 - R \ln \frac{p}{p_0} \nabla T_0 - bR \ln^2 \frac{p}{p_0} \nabla \gamma - aR \ln^3 \frac{p}{p_0} \nabla \gamma, \quad (8)$$

其中,

$$\nabla \gamma = -c \frac{2(x - x_0)}{L_z^2} \exp \left(-\frac{(x - x_0)^2}{L_z^2} \right). \quad (9)$$

由 (8) 式可精确求解理想场在任何等压面上的气压梯度力, 而由 (4) 式也可精确求解任何高度上的水平气压梯度力。图 2 给出了在上文参数设置下的气压梯度力随气压的分布。由于计算网格的参数设置参考了中尺度系统的典型值, 例如最大地形坡度 $\partial Z_s / \partial x = 0.26936$, 坡度比大尺度模式大 10 倍以上, 由图 2 可见中尺度条件下气压梯度力的典型分布值, 水平气压梯度力大小从地面向高层逐渐增大, 这里给出的理想场气压梯度力关于钟型地形对称, 但符号相反。

3 几种计算方案的误差分析

3.1 计算方案设计

σ 坐标中的水平运动方程的气压梯度力项的计算公式为

$$-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_p = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_\sigma - RT \left.\frac{\partial\ln p}{\partial x}\right|_\sigma, \quad (10)$$

式中, 下标 p 、 σ 分别表示在 p 坐标和 σ 坐标中计算。(10) 式中第一项表示 σ 坡度上的气压梯度力, 第二项是为了抵消 σ 面坡度不等于等压面坡度部分而作的静力订正。(10) 式中第一项的求法一般是直接用中央差, 而第二项是两变量的积, 其计算方法变化较大, 依其求法不同而得到不同的气压梯度力计算方法。本文讨论在大尺度模式中经常使用的 3 种计算方案, 它们分别被称为:

(1) 经典法: 即 T 为气压梯度力计算格点上的温度值, 其余为中央差。

(2) 经典平均法: T 为气压梯度力计算点的左右两点的温度平均值, 即 $T = (T_{i-1} + T_{i+1})/2$, 其余为中央差。

(3) Corby 法: 将 (8) 式右端第二项取计算点的左右半个格点上的平均值, 即

$$-RT \left.\frac{\partial\ln p}{\partial x}\right|_\sigma = -\frac{1}{2} R \bar{T}_x \left.\frac{\partial\ln p}{\partial x}\right|_{\sigma, i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} R \bar{T}_x \left.\frac{\partial\ln p}{\partial x}\right|_{\sigma, i-\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

为检验各种计算方法的实际计算精度, 需设立各种模式参数, 将气压梯度力的各种计算方案在设立的模式参数下的计算结果与解析解进行对比。为使研究结果更具普遍性, 设垂直方向建立的是最通用的 p - σ 混合坐标系, 即

$$\sigma = \frac{p - p_t - p_c}{p_s - p_t - p_c}, \quad (12)$$

这里 p_t 是模式顶的气压, 本文一律取为 10 hPa; p_c 是模式以等压面作为坐标面的参考等压面。当 $p_c = 0$ 时, p - σ 混合坐标系就退化为普通的 σ 坐标。

3.2 现有方案的计算误差分析

设高分辨率的中尺度 p - σ 混合坐标模式计算网格的水平格距为 5 km, 垂直方向上分为 100 层, 取 $p_c = 390$ hPa, 即地面至 400 hPa 的 σ 坐标为 60 层, 400 hPa 以上的 p 坐标为 40 层, σ 坐标中采用等 σ 分层, p 坐标中采用等 $\ln p$ 分层, 地面气压由 (4) 式计算, 计算网格采用 A 格点。上述 3 种方案的计算结果如图 3 所示。

从图 3 可见, 3 种计算方案的误差形态基本相近, 最大误差均在地形梯度最大的地面附近, 向上逐渐减少, 特别是在使用 p 坐标的 400 hPa 以上区域, 计算误差较地面附近的计算误差有很大的减

少, 这也是许多模式采用 p - σ 坐标的原因。通常的情况是在 $\partial Z_s / \partial x > 0$ 时, 计算的气压梯度力比实际值大, 反之, 在 $\partial Z_s / \partial x < 0$ 时, 计算的气压梯度力比实际值小。注意到图 3 的等值线标值不是等间隔的, 实际上计算误差从陡峭地面附近向上很快减小, 且图 3a、b 的等值线标值与图 3c 不同。比较图 3 的等值线标值可以发现经典法的计算误差最大, 平均经典法次之, 而 Corby 方案的计算误差最小且计算误差比经典法和平均经典法的误差小得多, 在

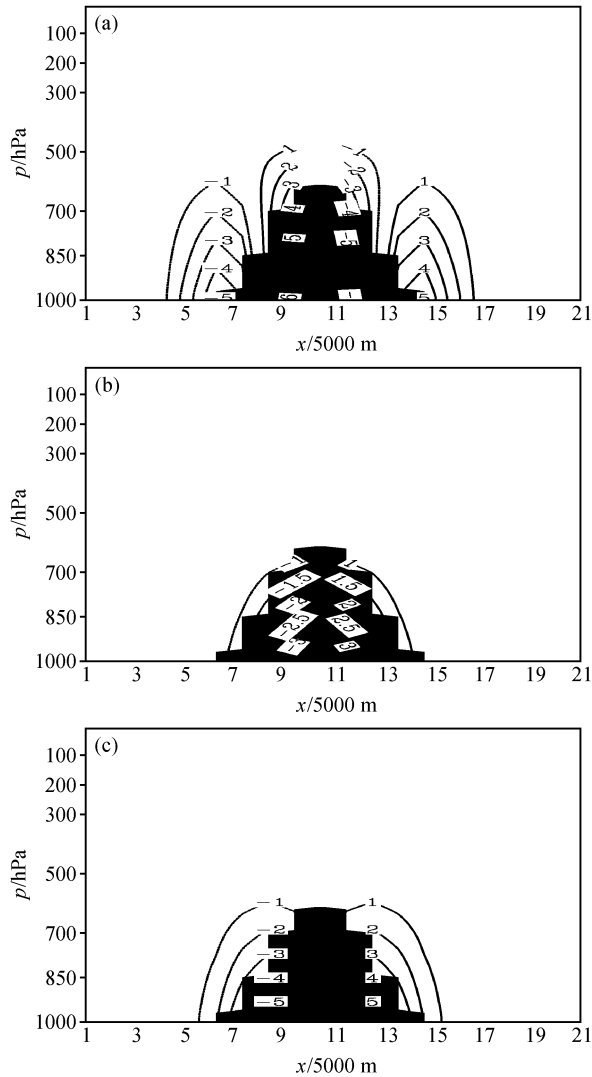


图 3 常用的几种气压梯度力计算方案的计算误差(解析值—网格计算值): (a) 经典法, 单位: 10^{-2} m/s²; (b) 平均经典法, 单位: 10^{-3} m/s²; (c) Corby 方案, 单位: 10^{-4} m/s²

Fig. 3 Numerical error for schemes used in community on pressure gradient force (analytic solution minus numerical solution based on grid): (a) Classical scheme, units: 10^{-2} m/s²; (b) classical average scheme, units: 10^{-3} m/s²; (c) Corby's scheme, units: 10^{-4} m/s²

表 1 气压梯度力的各种计算方案的最大误差极值随模式垂直分层的变化

Table 1 The variation of error maximum for schemes used in community on pressure gradient force followed by vertical layers in the model

	垂直分层数 Vertical layers								
	20	30	45	60	80	100	120	150	200
经典法 Classical scheme/ 10^{-2} m/s ²	2.42	2.47	2.49	2.50	2.51	2.52	2.52	2.53	2.53
经典平均法 Average classical scheme/ 10^{-3} m/s ²	2.04	2.09	2.12	2.13	2.14	2.14	2.15	2.16	2.17
Corby 法 Corby's scheme/ 10^{-4} m/s ²	6.00	6.10	6.18	6.22	6.25	6.26	6.28	6.29	6.30

陡峭地面附近平均小一个数量级，这也正是 MM5、WRF 等中尺度模式普遍采用 Corby 方案的原因。

3.3 现有方案的计算误差统计分析

了解计算误差的分布形态后，需进一步分析中尺度模式的气压梯度力计算误差的统计特征。在中尺度模式中，随着水平格距的细化，模式的垂直分层也越来越密。随着垂直分层的增加，气压梯度力的计算是否就越来越精确？表 1 给出了误差极值随模式垂直分层数的变化情况。从表 1 可见该问题的答案是否定的，即计算精度与计算方案有关，经典法的最大计算误差量级是 10^{-2} m/s²，经典平均法的最大计算误差量级是 10^{-3} m/s²，Corby 法的最大计算误差量级是 10^{-4} m/s²，而与模式的垂直分层没有明显关系。且随着随模式分辨率的提高，无论何种计算方案，计算精度不但没有提高，反而有恶化的趋势。因此，应当寻找新的计算方案来提高模式的气压梯度力计算精度，使其随着模式垂直分层数的增加而精度提高，才能满足高分辨率中尺度模式发展的需要。

4 改进方案

4.1 改进方案的设计

从上面的分析可知，不论何种计算方案，计算误差的最大值都会出现在 σ 坐标的地形坡度最大处，而在 p 坐标的误差很小。分析 σ 坐标中的气压梯度力计算公式 (8)，第一项表示 σ 坡度上的气压梯度力，第二项是为了抵消 σ 面坡度不等于等压面坡度部分而作的静力订正。从物理概念上可将计算误差归结为计算 (8) 式第二项时的不准确所至，即在计算抵消 σ 面坡度不等于等压面坡度部分而作静力订正项时出现了误差。因为当模式的地形坡度很大时，相邻的 σ 面上两点在气压上可以相差几个 σ 层，这时静力订正项的计算是非常复杂的，它不仅

与两点附近的模式温度有关，而且也与这两点之间的所有温度分布有关，因此静力订正应该考虑到两点之间的整个气压柱的温度分布情况，而不仅仅考虑计算网格点周围的若干点的组合。在这种复杂的情形下，改进静力订正项的计算办法是采用基于静力方程订正的回插等压面法，即先通过静力方程求出等压面上对应点的高度，然后在等压面上计算气压梯度力。当 σ 面上相邻的两点在气压上相差几个 σ 层时，必须根据模式的垂直气压分布来回插等压面。具体在等压面上求对应点高度的方案是：

(1) 当相邻点的气压在计算点气压柱一个垂直分层内时，直接用该层的温度参数求出相邻点的气压柱在等气压面的位势高度（如图 4a 所示）。求 A、B 两点之间的气压梯度力，先求出从计算点 B 气柱上与 A 点相同气压的 C 点的高度，设此时该垂直层内温度和气压对数为线性变化关系，温度随气压对数变化率 k ，由静力方程，则 C 点的高度为

$$H_C = H_B + R \left[T_B + 0.5k \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right) \right] \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right), \quad (13)$$

其中，

$$k = \frac{T_D - T_E}{\ln P_D - \ln P_E}. \quad (14)$$

(2) 当相邻点的气压不在计算点气压柱一个垂直分层内时，先求出相邻点气压柱上对应于计算点气压所在的位置层，再用该层温度参数求出 A 点气压在气柱 B 上的对应点 C 的高度（如图 4b 所示）。

$$H_C = H_E + R \left[T_E + 0.5k \ln \left(\frac{P_A}{P_E} \right) \right] \ln \left(\frac{P_A}{P_E} \right). \quad (15)$$

采用上述改进方案计算气压梯度力的误差如图 5 所示。与图 3 比较，显然，在同等参数条件下，改进方案的计算误差已大为减少，突出的是没有了地形附近的误差大值区，特别是在陡峭地面附近计算误差已经减少到 10^{-6} m/s² 以下，达到了陡峭地形附

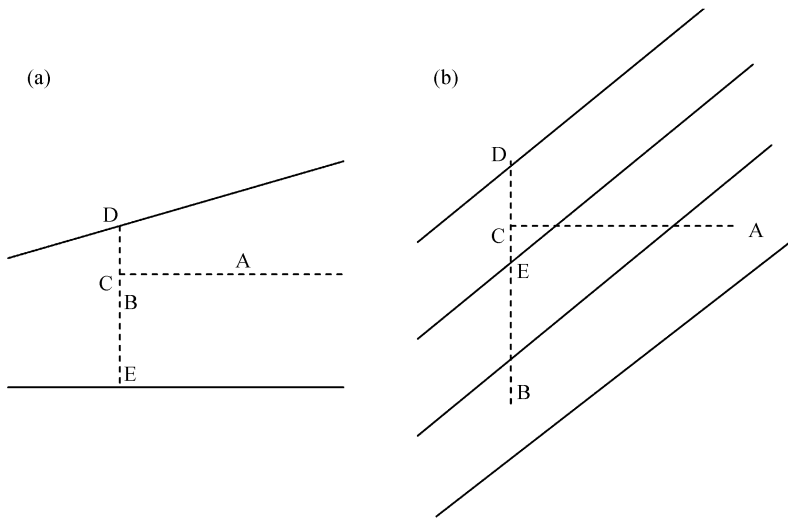


图 4 计算气压梯度力的改进方案计算示意图

Fig. 4 Schematic diagram of new scheme on pressure gradient force algorithm

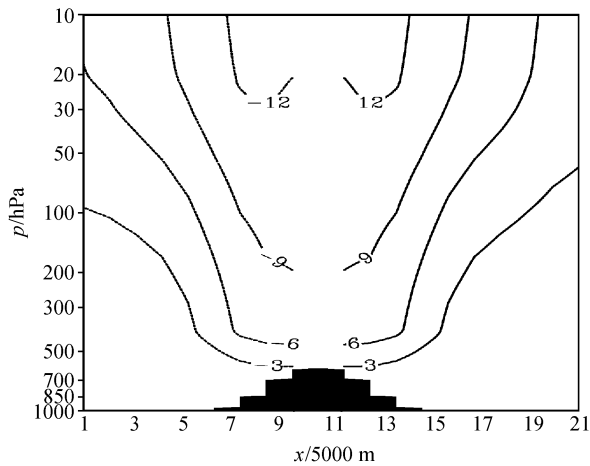


图 5 改进方案的气压梯度力的计算误差 (单位: 10^{-6} m/s^2)

Fig. 5 Numerical error for the new scheme on pressure gradient force (10^{-6} m/s^2)

近较精确计算气压梯度力的目的。而相对计算误差较大的高层也只有 10^{-5} m/s^2 ，比图 3 中最好的 Corby 方案的计算误差小一个数量级以上，从而保证了陡峭地形附近气压梯度力的高精度计算，同时也大大改善了高层的计算精度。由于陡峭地面附近计算误差在 10^{-6} m/s^2 以下，即便是采用大步长的时间积分方案，也完全能满足中尺度模式的精度要求。

4.2 改进方案计算误差的特点

改进方案不但精度比现有中尺度模式采用的 Corby 方案高，而且其最大特点是随着中尺度模式

分辨率的提高，计算误差将很快减小。表 2 给出了改进的气压梯度力计算方案的误差统计特征量随模式垂直分层的变化，从表中可见随着模式垂直分辨率的提高，改进方案计算气压梯度力的最大误差和误差方差都快速减小。当模式垂直分辨率从 20 层增加 10 倍到 200 层时，最大误差极值从 $2.4 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ 减小到 $0.09 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ ，陡峭地形附近的误差方差也从 $7.71 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ 减少到 $0.27 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ ，即误差减少到原值的 1/27 左右。表中还显示当模式分辨率为 60 层时，改进方案可比 Corby 方案减少 95% 左右的误差，而当模式分辨率增加到 200 层时，计算误差可比 Corby 方案减少 99% 左右。因此，可以认为随着中尺度模式垂直分辨率的提高，改进方案可以使水平气压梯度力的计算快速收敛到真解，而表 1 显示现通常使用的 Corby 方案是不收敛的。

改进方案在现阶段有特别重要的意义。当前，中尺度模式的垂直分辨率普遍从 20~30 层向 80~100 层过渡（例如，欧洲中心的中期预报模式即将从 60 层升级为 91 层），从表 2 可见当模式分辨率从 20 层向 100 层加密时，也是改进方案的计算误差下降得最快的时期。因此，若采用该方案，当模式垂直分辨率提高时，水平气压梯度力的误差也将随模式垂直分辨率的提高而快速减少，从而进一步改进陡峭地形附近的模拟和预报效果。若仍采用 Corby 方案，从表 1 可知，随着模式垂直分辨率的

表 2 改进的气压梯度力计算方案的误差统计特征量随模式垂直分层的变化

	垂直分层数 Vertical layers								
	20	30	45	60	80	100	120	150	200
最大误差极值 Error maximum/ 10^{-4} m/s ²	2.40	0.95	0.46	0.29	0.20	0.16	0.12	0.10	0.09
陡峭地形附近方差 Variance near steep slope/ 10^{-5} m/s ²	7.71	2.85	1.36	0.84	0.62	0.51	0.37	0.32	0.27
与 Corby 法相比误差极值减少量 Reducing error maximum compared with Corby's scheme	60.0%	84.4%	92.6%	95.3%	96.8%	97.4%	98.1%	98.4%	98.6%

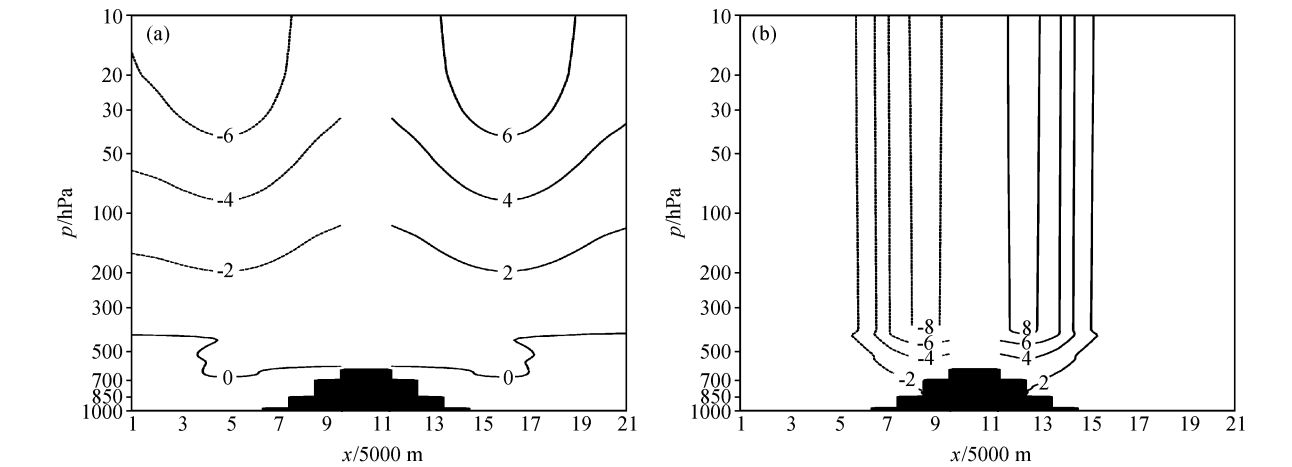


图 6 改进方案中的气压梯度力误差来源 (点参数同图 1, 单位: 10^{-6} m/s²): (a) 差分近似截断误差; (b) 静力方程截断误差
Fig. 6 Source of numerical error (10^{-6} m/s²) for new scheme on pressure gradient force (parameters as Fig. 1): (a) Error caused by differencing truncation; (b) error caused by hydrostatics truncation

提高, 陡峭地形附近的水平气压梯度力的误差反而将逐渐增大, 陡峭地形附近的模拟和预报结果可能恶化。

4.3 改进方案的误差来源分析

由表 2 可知, 改进方案的计算误差比现有的 Corby 方案小很多, 但图 5 所示的改进方案仍有一定的计算误差, 下面对这些计算误差的来源进行分析。

σ 坐标中气压梯度力的计算方案中第一项表示 σ 坡度上的梯度力, 第二项是为了抵消 σ 面坡度大于等压面坡度部分而作的静力订正。对于非水平面的情况, 这两项都有静力平衡关系而相互抵消, 但在实际计算中两项都有计算误差, 其结果是造成气压梯度力的误差不仅来自差分近似, 也来自静力方程的截断误差。由于计算使用的是理想场, 因此可以根据公式 (3) 得到任一气压点的精确重力位势, 当不使用差分静力方程计算格点的重力位势, 而使

用公式 (3) 精确确定各格点的重力位势, 就可基本上消除静力方程的截断误差, 这样得到的气压梯度力计算误差主要来源于模式的差分近似, 本文称为差分近似截断误差。而总的计算误差减去差分近似截断误差, 就得到主要由静力方程的截断误差产生的计算误差, 本文称为静力方程截断误差。这两项误差的分布如图 6 所示。

从图 6 可见, 在改进方案中静力方程截断误差在 σ 坐标中从地面往上逐渐增加, 直至 p 坐标中稳定而不再增加。所以 $p-\sigma$ 坐标中静力方程截断误差源于中低层采用 σ 坐标, 而高层 p 坐标中该项误差将不再增加 (这也是数值模式采用 $p-\sigma$ 坐标的原因之一)。但 σ 坐标和 p 坐标都可产生差分近似截断误差。当水平网格距为 5 km、垂直分层为 100 时, 来自差分近似截断误差和静力方程截断误差基本相当, 数量级都为 10^{-6} 至 10^{-5} m/s², 即由于差分近似造成的计算误差和静力方程截断导致的误差

在该模式参数下基本相当, 再要提高计算精度应同时考虑提高模式的水平分辨率和垂直分辨率。这也解释了表 2 中当模式垂直层数从 100 增加到 200 时, 计算误差减少的速度较模式层数从 20 增加到 100 层时变慢的原因。因为差分近似截断误差主要决定于网格距和水平差分方案, 与垂直分层关系不大; 而静力方程截断误差随着垂直分层的增加而减小。当垂直分层较稀疏时, 这时总误差中主要来自静力方程截断误差, 因而当模式层数从 20 层增加到 100 层时总误差随着静力方程截断误差快速下降, 总误差很快减小。而当模式垂直层数达 100 以上时, 这时总误差中相当一部分来自差分近似截断误差, 若要继续减少计算误差, 除减少静力方程截断误差外, 还必须考虑减少差分近似截断误差的方法。

5 结论

陡峭地形附近的气压梯度力计算精度是困扰高分辨率 σ 坐标模式发展的主要问题之一, 虽然国内外气象学家对如何提高地形跟随坐标系下气压梯度力的计算精度问题做了细致而富有成效的工作, 但即便是静止平衡大气仍然没有一种方案能对气压梯度力进行准确计算, 寻找更准确的气压梯度力算法仍是模式发展的关键问题之一。本文通过理想场试验的方法, 检验了现有模式中使用的气压梯度力算法精度, 提出了基于静力方程订正的气压回插法。研究表明:

(1) 现有模式中适合于天气尺度的气压梯度力算法在陡峭地形附近都存在较大的计算误差, 其中以 Corby 方案计算精度最高, 在典型中尺度模式参数的设置下计算精度为 10^{-4} m/s^2 。

(2) 现有模式的气压梯度力算法不收敛, 即计算误差不会随模式的垂直分辨率提高而减小。相反, 随模式垂直分辨率的提高, 计算误差有增加的趋势。

(3) 改进的气压梯度力算法比 Corby 方案的计算精度有较大提高, 在典型中尺度模式参数设置下计算精度可达 10^{-6} m/s^2 , 当垂直分层为 60 时, 可比 Corby 方案减少 95% 的误差。

(4) 改进的气压梯度力算法是收敛的, 即随着模式分辨率的提高, 计算精度不断提高。特别是当现有模式的垂直分辨率提高时, 水平气压梯度力计

算误差将快速减小。

改进方案的不足之处是计算量较现有流行方案偏大, 特别是该方案在逻辑关系上较复杂, 隐式计算时实现起来有一定困难。

参考文献 (References)

- [1] Phillips N A. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteor.*, 1957, **14**: 184~185
- [2] 钱永甫, 颜宏, 王谦谦, 等. 行星大气中地形效应的数值研究. 北京: 科学出版社, 1988. 39~41
Qian Yongfu, Yan Hong, Wang Qianqian, et al. *Numerical Research of Terrain Effects in Planet Atmosphere* (in Chinese). Beijing: Science Press, 1980. 39~41
- [3] 朱抱真, 张学洪, 骆美霞. 在 σ 坐标中计算地形作用的一个静力扣除方案. 第二次全国数值天气预报会议文集. 北京: 科学出版社, 1980. 67~73
Zhu Baozhen, Zhang Xuehong, Luo Meixia. A hydrostatic subtraction scheme on terrain effects in σ coordinates. *Proceeding of the Second National Numerical Weather Prediction Congress* (in Chinese). Beijing: Science Press, 1980. 67~73
- [4] 颜宏, 钱永甫. 有地形数值模式中坐标变换和气压梯度力计算问题的讨论. 大气科学, 1981, **5**: 175~187
Yan Hong, Qian Yongfu. The discussion on coordinate transform and pressure gradient force scheme in numerical model with terrain. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (Scientia Atmospherica Sinica)* (in Chinese), 1981, **5**: 175~187
- [5] Dannard M, Zhang Q, Kozlowski J. On computing the horizontal pressure gradient force in sigma coordinate. *Mon. Wea. Rev.*, 1993, **121**: 3173~3183
- [6] 钱永甫, 周天军. 陡峭地形区气压梯度力的误差扣除法. 热带气象学报, 1994, **4**: 358~368
Qian Yongfu, Zhou Tianjun. Error subtraction method in computing pressure gradient force for high and steep topographic areas. *Journal of Tropical Meteorology* (in Chinese), 1994, **4**: 358~368
- [7] Zheng W, Qian Y. Improvement on computing the horizontal pressure force in sigma coordinate. *Acta Meteorologica Sinica*, 1999, **13**: 304~315
- [8] 杨晓娟, 钱永甫. $p-\sigma$ 坐标系数值模式中气压梯度力的递推算法. 大气科学, 2003, **27**: 171~181
Yang Xiaojuan, Qian Yongfu. The recurrent computational methods of pressure gradient force in the $p-\sigma$ coordinate numerical models. *Scientia Atmospherica Sinica* (in Chinese), 2003, **27**: 171~181
- [9] Corby G A, Gilchrist A, Newson R L. A general circulation model of the atmosphere suitable for long period integrations.

- Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1972, **98**: 809~832
- [10] Janjic Z I. Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography. *Beitr. Phys. Atmos.*, 1977, **50**: 185~199
- [11] Arakawa A, Suarez M J. Vertical differencing of the primitive equations in sigma coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, 1983, **111**: 34~45
- [12] Arakawa A, Konor C S. Vertical differencing of the primitive equations based on the Charney-Phillips grid in hybrid- σ - P vertical coordinate. *Mon. Wea. Rev.*, 1996, **124**: 511~528
- [13] Smagorinsky J, Holloway J L, Hembree G D. Prediction experiments with a general circulation model. Proc. Inter. Symp. Dynamics Large Scale Atmospheric Processes, 1967. 70~134
- [14] Kurihara Y. Note on finite-difference expressions for the hydrostatic relation and pressure gradient force. *Mon. Wea. Rev.*, 1968, **96**: 654~656
- [15] Steppeler J, Hess R, Schattler U, et al. Review of numerical methods for nonhydrostatic weather prediction models. *Meteor. Atmos. Phys.*, 2003, **82**: 287~301
- [16] David L A, Brown A R. Assessment of which scales of orography can be credibly resolved in a numerical model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 2001, **127**: 1125~1237
- [17] Schar C, Leuenberger D, Fuhrer O, et al. A new terrain-following vertical coordinate formation for atmospheric prediction models. *Mon. Wea. Rev.*, 2002, **130**: 2459~2480