

高精度迎风偏斜格式的比较与分析

冯涛^{1, 2} 李建平¹

1 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

2 中国科学院研究生院, 北京 100039

摘 要 利用一种具有任意阶精度的一般显式有限差分公式构造出高精度迎风偏斜格式, 并利用 Fourier 分析法评估了这些迎风偏斜格式的耗散误差与频散误差。结果表明, 偶阶精度格式的数值相速度快于实际相速度, 而奇阶精度格式的数值相速度慢于实际相速度。并且, 偶阶精度格式的耗散误差与频散误差低于相邻的奇阶精度格式。为了检验这些格式的计算性能, 在一维问题上进行了应用。首先, 考虑恒定风场条件下的一维平流试验。主要选择两种不同的初始条件来评价数值格式的精度, 这两种试验问题分别是高斯函数、方波函数。试验结果表明, 随着数值格式精度的提高, 数值格式的误差逐渐减小。而对于高于六阶精度的格式来说, 改进的程度并不是很大。其次, 应用各阶格式到具有两种不同初始条件的无粘 Burgers 方程。数值结果表明, 随着数值格式阶数的增加, 数值结果也得到了明显改进。而对于高于六阶精度的格式来说, 进一步的变化并不明显。总之, 在兼顾效率与精度条件下六阶迎风偏斜格式是最好的。

关键词 显式有限差分公式 迎风偏斜格式 平流方程

文章编号 1006-9895(2007)02-0245-09

中图分类号 P435

文献标识码 A

A Comparison and Analysis of High Order Upwind-Biased Schemes

FENG Tao^{1,2} and LI Jian-Ping¹

1 State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

2 Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

Abstract High order upwind-biased schemes based on the general explicit difference formulas with arbitrary order accuracy from Li (2005) are developed. The dissipation and dispersion errors of these upwind-biased schemes are assessed by means of the Fourier analysis. The results show that the numerical phase speeds for even order schemes are faster than the real phase speed. But the numerical phase speeds for odd order schemes are slower than the real phase speed. Moreover, the dissipation and dispersion errors of the even order scheme are smaller than the next lower-order odd scheme. For the upwind-biased schemes derived, there is an increase of the dissipation error in the high wave number range. However, the increase of numerical dissipation in the low wave number range is very small. Some numerical dissipation is needed in the high wave number range for some flow problems. The decision that a numerical modeler should always make is how much numerical dissipation is need. The upwind-biased schemes provide some additional alternatives for adjusting numerical dissipation. These schemes are applied to a one-dimensional model in order to test their computational performance. Firstly, consider one-dimensional advection in a constant velocity field. The two types of test problems that are used to evaluate the accuracy of a numerical scheme are the Gaussian function and the square wave function. The first example is the advection of the square wave func-

tion. This function reveals a numerical method's capability to handle Gibb's oscillations that arise in the vicinity of discontinuities. The second example is the advection of the Gaussian function. This function provides a demonstration of each scheme's ability to transport well resolved, smoothly varying functions over larger distances. Testing results show that the errors of numerical schemes gradually decrease as the order of the scheme increases and further changes are moderate for higher than sixth order scheme. A high order scheme, although not maintaining a positive definite field, will reduce the problem of negative quantities dramatically. Secondly, consider the inviscid Burgers' equation. The inviscid Burgers' equation is used as the test model because it is the simplest equation that allows scale collapse (shock formation), and because it has analytic solutions. There are many important phenomena in the atmosphere that are associated with sharp gradients. One requirement of a computational method for the scale collapse phenomena would seem to be an ability to accurately represent a very sharp gradient in the computational domain. In addition, any numerical dispersion error due to the presence of a shock should not contaminate the smooth solution away from the shock. Numerical results show that there is a drastic improvement when going from the first to sixth order, while further changes are moderate. The results indicate the usefulness of the upwind-biased scheme in handling the advection near discontinuities and the development of scale collapse regions in atmospheric numerical models. In conclusion, the sixth-order upwind-biased scheme appears to be the best balance between efficiency and accuracy. It appears that the sixth-order upwind-biased scheme is well suited for many atmospheric modeling applications where advection plays a significant role.

Key words explicit finite difference formulas, upwind-biased scheme, advection equation

1 引言

有限差分格点所能分辨的最短波长是 2 倍格距波。高频波的存在不但会引入计算误差,而且会导致数值不稳定。迎风有限差分法可以通过引入数值耗散来有效衰减高波数部分。然而,数值耗散有可能超越物理扩散。这样,迎风格式需要合理地设计来产生适宜的数值耗散。为了减小数值耗散,已经发展了二阶 Crowley 格式^[1]、基于三次迎风插值的三阶格式^[2]、单调保持的 TVD (Total Variation Diminishing) 格式^[3]、应用 JFNK (Jacobin-free Newton-Krylov) 方法求解的二阶全隐式差分格式^[4]等等。由于需要控制数值耗散与改进数值解精度,高精度迎风格式的发展显得尤其重要。高阶迎风有限差分格式因其较小的数值耗散已经被应用于湍流数值模拟。Rai 和 Moin^[5]利用具有五阶精度的迎风偏斜差分格式,直接模拟不可压槽道湍流问题,其五阶迎风偏斜逼近式是由非等距 Lagrange 插值多项式而得。由于 Lagrange 插值多项式的系数求解非常复杂,因此用它来构造高阶精度有限差分逼近格式是困难的^[5]。Tremback 等^[6]提出了一般时间向前差迎风平流算子,比较了一阶到十阶迎风平流格式,在同时考虑效率与精度时得出六阶格式是一种最好的格式。此迎风平流格式是利用网格

点上的值通过 Lagrange 多项式插值得到。最近, Li^[7]给出了具有任意阶精度的一般显式有限差分公式,此公式是以泰勒展开式为基础,利用范德蒙行列式性质而得到的。利用此公式可以直接得到基于等距与非等距网格的一阶或更高阶导数的数值近似值,还可以构造出微分方程和偏微分方程的差分格式。本文利用此一般显式有限差分公式,构造出基于等距网格的一阶至十阶精度迎风偏斜格式,同时对这些迎风偏斜格式进行比较分析,并得到一个最优的格式。

2 高精度有限差分方法

考虑如下二维线性平流方程及对应的半离散化方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{F_j}{\Delta x} = 0, \quad (2)$$

式中, $u = u(x, t)$, c 取为常数, 本文 c 选为大于零, $F_j / \Delta x$ 为 $\partial u / \partial x$ 的差分逼近式。

一阶导数的一般差分逼近式可以直接通过在网点上函数值的线性组合来表示。(2)式中的导数逼近式 $F_j / \Delta x$ 可直接通过离散函数 u_j 的线性组合来表示。Li^[7]给出如下具有任意阶精度的一般显式有限差分公式,

$$f^{(m)}(x_i) = \frac{1}{h^m} \sum_{j=0}^n d_{n+1,i,j}^{(m)} f(x_j) + O_{n,j}^{(m)}(h^{n-m+1}), \quad (3)$$

其中, $x_i = x_0 + ih$ ($i=0, 1, \dots, n, h \neq 0$), f 是所选定点的函数。

$$\begin{cases} d_{2,0,1}^{(1)} = 1, & n = 1, \\ d_{2,1,0}^{(1)} = -1, & n = 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$d_{n+1,i,j}^{(m)} = \frac{(-1)^{(m-j)} m! a_{n-1,i,j}^{(m-1)}}{j!(n-j)!}, \quad j \neq i, n > 1, \quad (5)$$

$$d_{n+1,i,i}^{(m)} = - \sum_{j=0, j \neq i}^n d_{n+1,i,j}^{(m)}, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

$$a_{n-1,i,j}^{(m-1)} = a_{m-1}(-i, \dots, k-i, \dots, n-i), \quad (k=0, 1, \dots, n, k \neq i, j) \quad (7)$$

$$\begin{cases} a_n^{(0)} = a_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n, \\ a_n^{(1)} = a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_{n-1} + \\ \quad x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_1 x_3 \dots x_n + x_2 x_3 \dots x_n, \\ a_n^{(2)} = a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_{n-2} + \dots + \\ \quad x_3 x_4 \dots x_n, \\ \dots \\ a_n^{(n-2)} = a_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 + \\ \quad x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ a_n^{(n-1)} = a_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ a_n^{(n)} = a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1, \end{cases} \quad (8)$$

余项

$$O_{n,j}^{(m)}(h^{(n-m+1)}) = \frac{(-1)^{n-m} m! h^{n-m+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{f^{(n+1)}(\xi_j) a_{n-1,i,j}^{(m-1)} (i-j)^{n+1}}{(-1)^j j!(n-j)!}. \quad (9)$$

可根据精度的需要, 选择适当个数的网格基架点数。构成二阶精度的逼近式需要三个网格基架点, 三个网格基架点可以构造三种二阶精度的差分逼近式。构造 N 阶精度的格式需要 $N+1$ 个网格基架点, $N+1$ 个网格基架点可以构造 $N+1$ 种 N 阶精度的差分逼近式。在本文中, 导数的逼近式中更多地利用了上游点上的函数值 (指相对于波的传播方向而言), 这类格式称为迎风偏斜格式。这一点从物理上考虑是很容易理解的, 因为波是从上游传下来的。下面给出具体的逼近一阶导数的一阶至十阶迎风偏斜格式:

一阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{h} (-f_{j-1} + f_j), \quad (10)$$

二阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{2h} (f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j), \quad (11)$$

三阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{6h} (f_{j-2} - 6f_{j-1} + 3f_j + 2f_{j+1}), \quad (12)$$

四阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{12h} (-f_{j-3} + 6f_{j-2} - 18f_{j-1} + 10f_j + 3f_{j+1}), \quad (13)$$

五阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{60h} (-2f_{j-3} + 15f_{j-2} - 60f_{j-1} + 20f_j + 30f_{j+1} - 3f_{j+2}), \quad (14)$$

六阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{60h} (f_{j-4} - 8f_{j-3} + 30f_{j-2} - 80f_{j-1} + 35f_j + 24f_{j+1} - 2f_{j+2}), \quad (15)$$

七阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{420h} (3f_{j-4} - 28f_{j-3} + 126f_{j-2} - 420f_{j-1} + 105f_j + 252f_{j+1} - 42f_{j+2} + 4f_{j+3}), \quad (16)$$

八阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{840h} (-3f_{j-5} + 30f_{j-4} - 140f_{j-3} + 420f_{j-2} - 1050f_{j-1} + 378f_j + 420f_{j+1} - 60f_{j+2} + 5f_{j+3}), \quad (17)$$

九阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{2520h} (-4f_{j-5} + 45f_{j-4} - 240f_{j-3} + 840f_{j-2} - 2520f_{j-1} + 504f_j + 1680f_{j+1} - 360f_{j+2} + 60f_{j+3} - 5f_{j+4}), \quad (18)$$

十阶迎风偏斜格式:

$$f'(x_j) = \frac{1}{2520h} (2f_{j-6} - 24f_{j-5} + 135f_{j-4} - 480f_{j-3} + 1260f_{j-2} - 3024f_{j-1} + 924f_j + 1440f_{j+1} - 270f_{j+2} + 40f_{j+3} - 3f_{j+4}). \quad (19)$$

3 数值格式的 Fourier 分析

对线性问题, 当求解区域为 $[-\infty, +\infty]$ 或在有限区域 $[-L, +L]$ 的边界上满足周期条件, 则问题的解可通过 Fourier 级数来表示。Fourier 分析法^[8]为取初值为单个 Fourier 分量, 用以研究数值解的精度与行为。通过 Fourier 分析法可了解不同

尺度量离散导数的逼近精度。在单纯进行精度分析时并不要求被离散的函数是线性的。现在考虑线性问题,取初值为 $u(x, 0) = \exp(ikx)$, 方程(1)的准确解为

$$u(x, t) = \exp[ik(x - ct)], \quad (20)$$

取 $u(x_j, 0) = \exp(ikx_j)$ 为初值, 则差分方程(2)的准确解为

$$u(x_j, t) = \exp\left(-ck \frac{h}{a} t\right) \exp\left[ik\left(x_j - c \frac{p}{a} t\right)\right], \quad (21)$$

其中 $a = k\Delta x$, h 与数值耗散有关, p 与数值波的传播速度有关。对具体的格式可以求出 h 与 p 的分析表达式来。对照式(20)和式(21)可知, 对取定波数 k , 数值解逼近准确解, 要求

$$h/a \rightarrow 0, p/a \rightarrow 1 \quad (a = k\Delta x), \quad (22)$$

它们的逼近程度反映了格式的精度。下面给出一阶至十阶迎风偏斜格式 h 与 p 随 a 的变化情况。

在图1和图2中, 给出了一阶至十阶迎风偏斜格式的频散误差和耗散误差, 其中曲线1、2、3、4、5、6、7、8、9、10依次对应为一阶格式、二阶格式、三阶格式、四阶格式、五阶格式、六阶格式、七阶格式、八阶格式、九阶格式、十阶格式, 曲线0为 $p = a = k\Delta x$ 曲线, 它对应于微分方程的准确解。从图1可以看出, 对低波分量, 各种格式都能较好地逼近准确解。并且, 偶阶精度格式的数值相速度快于实际相速度, 而奇阶精度格式的数值相速度慢于实际相速度。与低阶精度格式相比, 高精度格式对

中高波分量有较好的模拟能力。此外, 偶阶精度迎风偏斜格式的频散性明显小于相邻的奇阶精度迎风偏斜格式。从图2可以看出, 各阶格式在低波段有较小的数值耗散, 在高波段有着较大的数值耗散。在低波段奇阶精度迎风偏斜格式耗散性高于相邻的偶阶精度迎风偏斜, 在高波段奇阶精度迎风偏斜格式耗散效应明显低于相邻的偶阶精度迎风偏斜格式。

4 线性平流试验

为了进一步比较一阶至十阶迎风偏斜格式的性能, 我们以方波和高斯波的初值问题为例进行计算。

时间导数的差分逼近的方法有: (1) 采用多层结构, 这就要求知道前时间层的值, 如三层结构; (2) Lax-Wendroff 型的多步格式。该方法对于常系数的情况, 可构造简单且计算量小的高阶精度差分格式, 但在一般非常系数的情况下, 方法极为复杂; (3) R-K 型的多步法。该方法发展较为成熟, 逻辑简单, 且可占用较少的内存。

时间导数的差分逼近采用三阶精度的 R-K 三步方法^[9]。设 $L(u)$ 为 $\partial u / \partial x$ 的差分逼近式, 则对于方程(1), 三阶精度的三步方法有以下形式

$$\begin{cases} u^{(1)} = u^{(0)} + c\Delta t L(u^{(0)}), \\ u^{(2)} = \frac{3}{4} u^{(0)} + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} c \Delta t L(u^{(1)}), \\ u^{(3)} = \frac{1}{3} u^{(0)} + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} c \Delta t L(u^{(2)}), \end{cases} \quad (23)$$

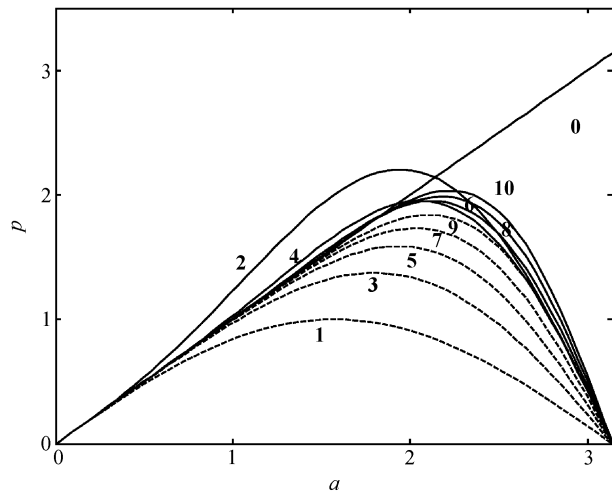


图1 一阶至十阶迎风偏斜格式的频散误差

Fig. 1 The dispersion errors of upwind-biased schemes for orders 1 through 10

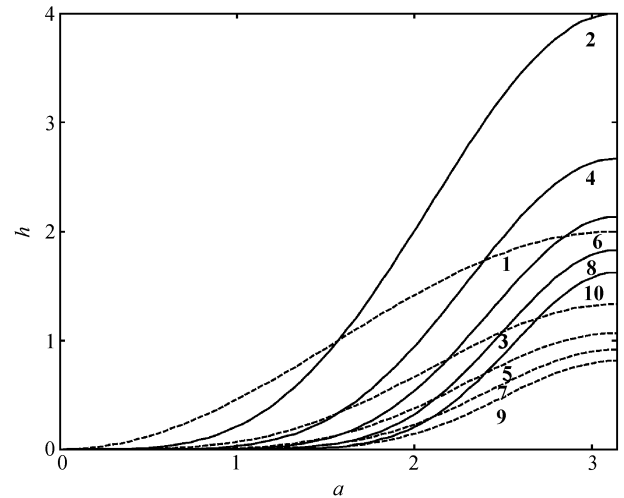


图2 一阶至十阶迎风偏斜格式的耗散误差

Fig. 2 The dissipation errors of upwind-biased schemes for orders 1 through 10

空间导数的差分逼近选择空间一阶至十阶迎风偏斜格式。

给定方波的初始条件:

$$u(x) \big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < 3/32, \\ 1, & 3/32 \leq x \leq 9/32, \\ 0, & x > 9/32, \end{cases} \quad (24)$$

计算时选取常数 c 为 1, 柯朗数为 $Cu = c\Delta t/\Delta x = 0.1$, 空间步长为 $\Delta x = 1/128$, 计算区域 $[0, 1]$ 选用周期边界条件, 计算 1280 个时间步长刚好是一个周期, 也就是说在此理想情况下最终状态与初始状态保持一致。计算结果如图 3 所示。

给定高斯波的初始条件:

$$u(x) \big|_{t=0} = \exp[-400(x-0.5)^2]. \quad (25)$$

计算时选取常数 c 为 1, 柯朗数为 $Cu = c\Delta t/\Delta x = 0.1$, 空间步长为 $\Delta x = 1/128$, 计算区域 $[0, 1]$ 选用周期边界条件, 计算 1280 个时间步长刚好是一个周期, 也就是说在此理想情况下最终状态与初始状态保持一致。计算结果如图 4 所示。

在图 3 和图 4 中, 给出了一阶至六阶迎风偏斜

格式在两个不同初始条件下的数值结果。从图 3 与图 4 可以看出, 一阶格式具有很强的耗散性, 而二阶格式的耗散性减小, 但是存在一定程度的频散性。对于方波分布, 高于二阶精度的高精度迎风偏斜格式的耗散性与频散性明显减小, 相对于频散性来说, 各阶格式的耗散性是较小的, 而偶阶精度迎风偏斜格式的频散性明显低于相邻的奇阶精度迎风偏斜格式。并且, 六阶精度迎风偏斜格式的数值解与解析解最为接近。而对于高斯分布, 六阶迎风偏斜格式的数值解与解析解更为接近。

Takacs^[10] 给出三种指标来衡量差分格式的优劣, 这三种指标分别是总误差, 耗散误差, 频散误差。总误差由均方差来定义,

$$E = \frac{1}{M} \sum_j (q_T - q_D)^2, \quad (26)$$

这里, q_T 为准确解, q_D 为数值解, M 为空间网格点的总数。(26)式可以写为

$$E = \sigma^2(q_T) + \sigma^2(q_D) - 2\rho\sigma(q_T)\sigma(q_D) + (\bar{q}_T - \bar{q}_D)^2, \quad (27)$$

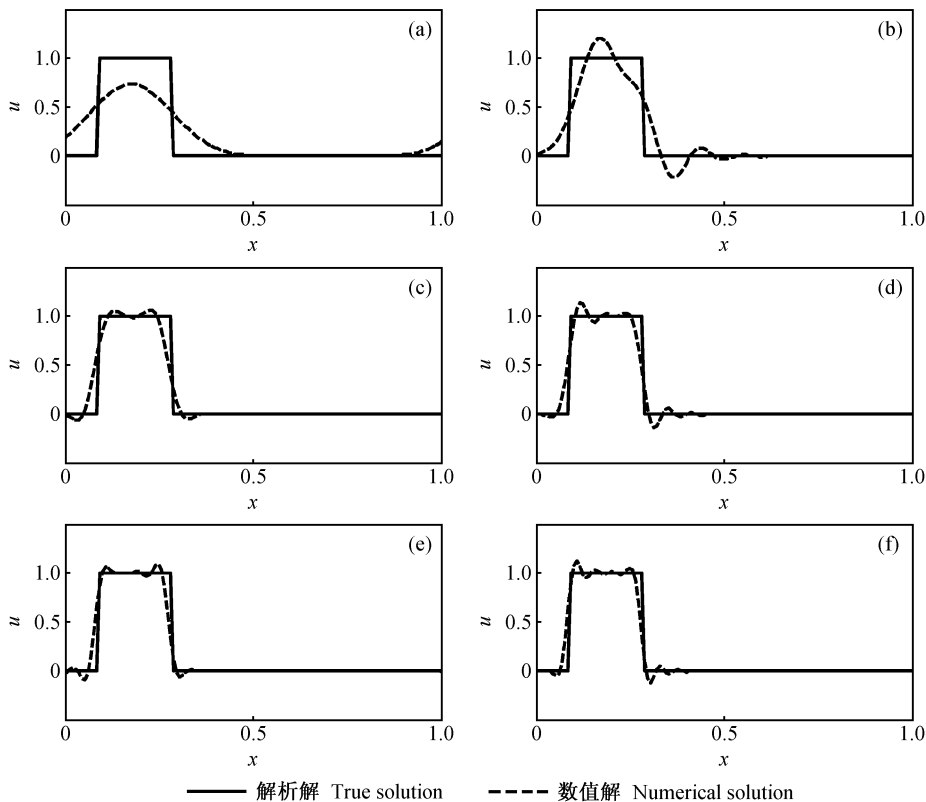


图 3 方波平流迎风偏斜格式的数值结果: (a) 一阶格式; (b) 二阶格式; (c) 三阶格式; (d) 四阶格式; (e) 五阶格式; (f) 六阶格式

Fig. 3 Numerical results of upwind-biased schemes for the advection of a square wave: (a) first-order scheme; (b) second-order scheme; (c) third-order scheme; (d) fourth-order scheme; (e) fifth-order scheme; (f) sixth-order scheme

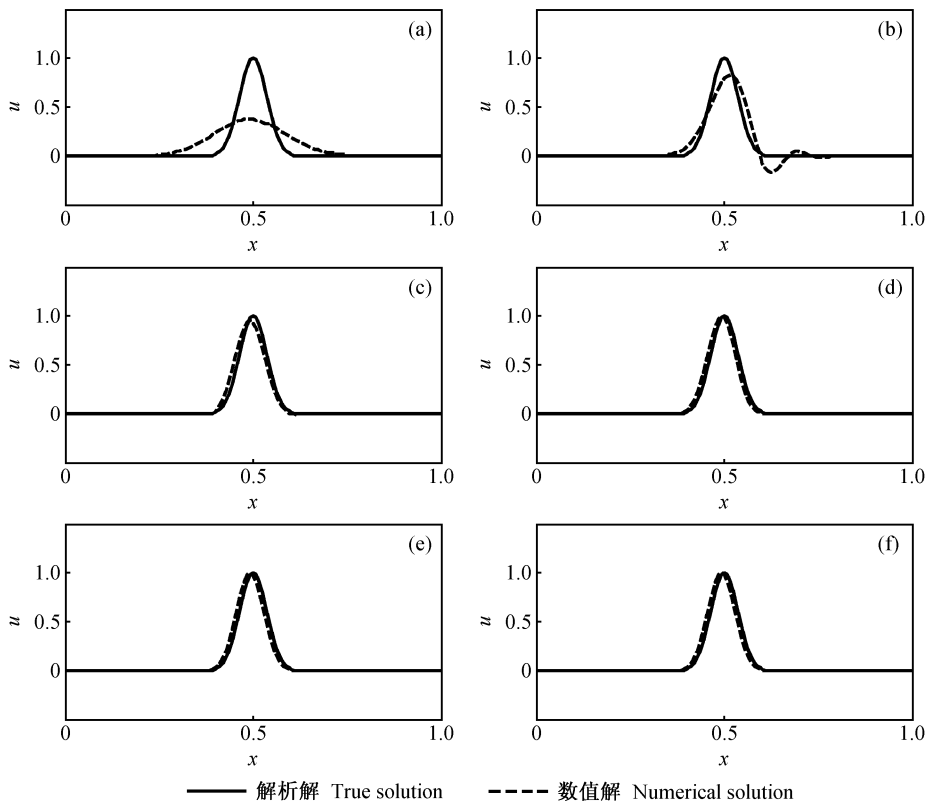


图 4 高斯平流迎风偏斜格式的数值结果, 其余同图 3

Fig. 4 Same as Fig. 3, but for numerical results of upwind-biased schemes for the advection of a Gaussian wave

表 1 方波问题的数值误差比较

Table 1 Comparison of numerical errors for a square wave profile

指标 Index	迎风偏斜格式的阶数 Order number of the upwind-biased schemes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>E</i>	4.63×10^{-2}	2.15×10^{-2}	1.16×10^{-2}	8.53×10^{-3}	9.78×10^{-3}	8.22×10^{-3}	9.69×10^{-3}	8.66×10^{-3}	9.90×10^{-3}	2.53×10^{-1}
<i>S</i>	2.04×10^{-2}	4.86×10^{-4}	2.70×10^{-4}	1.01×10^{-4}	7.20×10^{-5}	4.68×10^{-5}	3.60×10^{-5}	2.88×10^{-5}	2.30×10^{-5}	8.35×10^{-2}
<i>P</i>	2.58×10^{-2}	2.10×10^{-2}	1.13×10^{-2}	8.43×10^{-3}	9.70×10^{-3}	8.17×10^{-3}	9.65×10^{-3}	8.63×10^{-3}	9.87×10^{-3}	1.69×10^{-1}

表 2 高斯波问题的数值误差比较

Table 2 Comparison of numerical errors for a Gaussian wave profile

指标 Index	迎风偏斜格式的阶数 Order number of the upwind-biased schemes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>E</i>	2.43×10^{-2}	5.36×10^{-3}	1.63×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	4.20×10^{-3}
<i>S</i>	1.19×10^{-2}	1.05×10^{-4}	1.79×10^{-5}	8.25×10^{-8}	1.40×10^{-8}	1.50×10^{-10}	4.50×10^{-11}	8.90×10^{-12}	7.40×10^{-12}	3.75×10^{-4}
<i>P</i>	1.24×10^{-2}	5.26×10^{-3}	1.61×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	3.82×10^{-3}

这里, σ^2 为方差, ρ 为 q_T 与 q_D 的相关系数, σ 为标准差, $\bar{q}_T$ 与 $\bar{q}_D$ 分别为 q_T 和 q_D 的平均值。(27) 式又可写为

$$E = [\sigma(q_T) - \sigma(q_D)]^2 + (\bar{q}_T - \bar{q}_D)^2 + 2(1 - \rho)\sigma(q_T)\sigma(q_D), \quad (28)$$

这样耗散误差与频散误差分别定义为

$$S = [\sigma(q_T) - \sigma(q_D)]^2 + (\bar{q}_T - \bar{q}_D)^2, \quad (29)$$

$$P = 2(1 - \rho)\sigma(q_T)\sigma(q_D), \quad (30)$$

下面给出以上方波问题与高斯波问题相应的总误差, 耗散误差与频散误差。

在表 1 和表 2 中，给出了一阶至十阶迎风偏斜格式在两个不同初始条件下的数值误差。从表 1 和表 2 可以看出，高于二阶精度的高精度迎风偏斜格式具有较小的总误差。偶阶精度迎风偏斜格式总误差小于相邻的奇阶精度迎风偏斜格式。相对于频散误差来说，各阶格式的耗散误差是较小的，频散误差的变化趋势与总误差保持一致。并且，随着数值格式精度的提高，数值格式的误差逐渐减小。而对于高于六阶精度的格式来说，改进的程度并不是很大。也就是说，数值格式的性能并不能完全由截断误差的阶数决定，随着数值格式精度的提高，虽然截断误差逐渐减小，但是舍入误差却逐渐增加，这样，必然存在着一个数值格式使得总误差达到最小。因此，在同时考虑效率与精度的情况下可以得到六阶精度迎风偏斜格式是最优的格式。

5 无粘 Burgers 方程试验

Kuo 等^[11]给出了用内插方法求解的一维无粘 Burgers 方程的解。该方程在 $(x_0 - \bar{u}t, 1)$ 附近出现较大梯度。为了便于比较，我们采用一阶至十阶

迎风偏斜格式对该方程进行求解。

考虑无粘 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{31}$$

在有限区域 $(-1, 1)$ ，给出如下初始条件(I)：

$$u(x, 0) = f(x) = \bar{u} - \arctan^{-1}(x - x_0), \tag{32}$$

分析解为

$$u(x, t) = f(x - u(x, t)t), \tag{33}$$

因

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0+\bar{u}t} = \frac{1}{t-1} \rightarrow -\infty \quad (\text{当 } t \rightarrow 1 \text{ 时}). \tag{34}$$

该方程在 $(x_0 - \bar{u}t, 1)$ 出现奇异点。计算中所选各参数为 $\bar{u}=1.0$, $x_0=-1.0$, $\Delta t=0.0078125$, 格点数 $N=32$ 。计算结果如图 5 所示。

Bermejo 等^[12]给出另外一个平滑的初始条件(II)：

$$u(x, 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin \pi x, \tag{35}$$

此时 t 为 0.66。计算中所选各参数为 $\bar{u}=1.0$, $x_0=-1.0$, $\Delta t=0.015$, 格点数 $N=81$ 。计算结果如图 6 所示

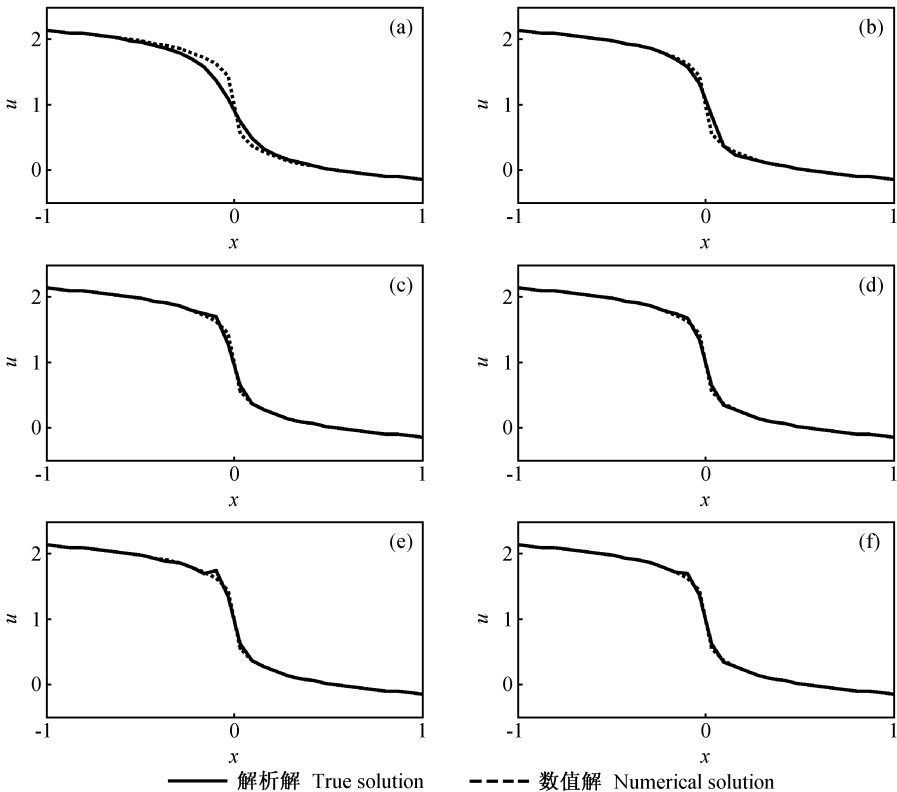


图 5 无粘 Burgers 方程在 $t=1.0$ 的解，其余同图 3

Fig. 5 Same as Fig. 3, but for solutions of the inviscid Burgers' equation at $t=1.0$

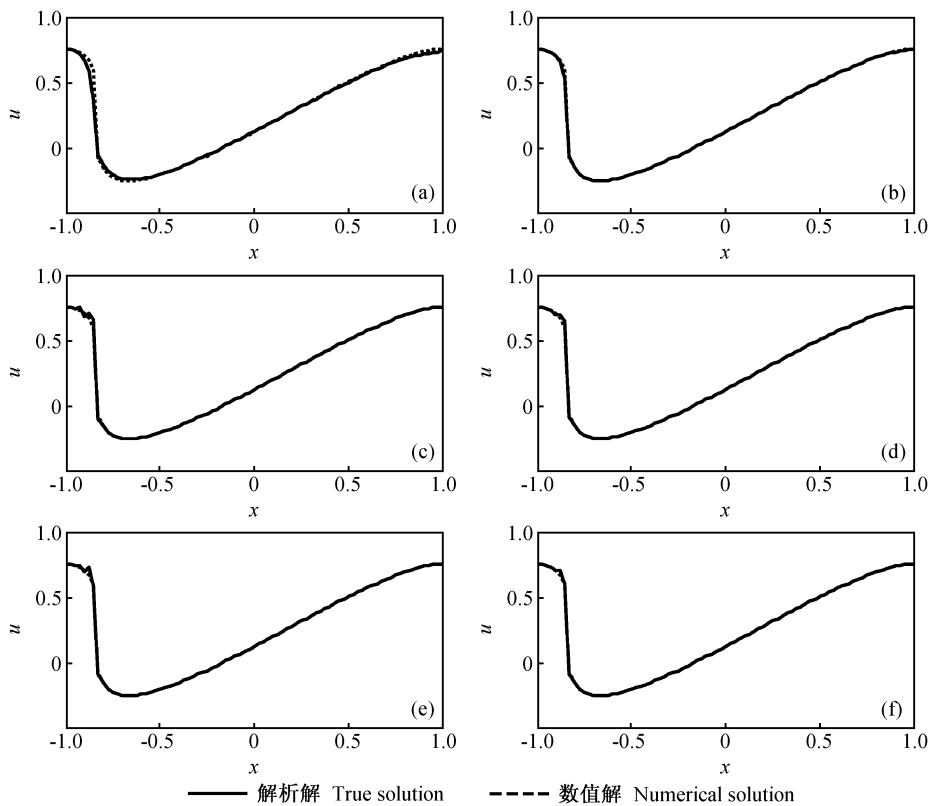


图 6 无粘 Burgers 方程在 $t=0.66$ 的解, 其余同图 3
Fig. 6 Same as Fig. 3, but for solutions of the inviscid Burgers' equation at $t=0.66$

表 3 初始条件 (I) 的数值误差比较

Table 3 Comparison of numerical errors for the initial condition (I)

指标 Index	迎风偏斜格式的阶数 Order number of the upwind-biased schemes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	9.02×10^{-3}	2.93×10^{-3}	1.41×10^{-3}	7.89×10^{-4}	8.82×10^{-4}	5.17×10^{-4}	6.79×10^{-4}	4.05×10^{-4}	5.73×10^{-4}	3.43×10^{-4}
S	9.96×10^{-4}	2.46×10^{-5}	1.22×10^{-6}	2.36×10^{-6}	3.44×10^{-6}	3.28×10^{-6}	4.17×10^{-6}	3.78×10^{-6}	4.35×10^{-6}	4.04×10^{-6}
P	8.02×10^{-3}	2.91×10^{-3}	1.41×10^{-3}	7.87×10^{-4}	8.78×10^{-4}	5.14×10^{-4}	6.75×10^{-4}	4.01×10^{-4}	5.69×10^{-4}	3.39×10^{-4}

表 4 初始条件 (II) 的数值误差比较

Table 4 Comparison of numerical errors for the initial condition (II)

指标 Index	迎风偏斜格式的阶数 Order number of the upwind-biased schemes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	8.23×10^{-4}	6.12×10^{-5}	5.34×10^{-5}	4.07×10^{-5}	8.38×10^{-5}	1.16×10^{-5}	1.67×10^{-4}	1.13×10^{-4}	2.97×10^{-4}	1.87×10^{-5}
S	1.30×10^{-4}	3.05×10^{-6}	7.03×10^{-7}	7.68×10^{-7}	2.20×10^{-6}	3.12×10^{-7}	5.03×10^{-7}	4.52×10^{-6}	1.15×10^{-5}	1.57×10^{-7}
P	6.93×10^{-4}	5.82×10^{-5}	5.27×10^{-5}	4.00×10^{-5}	8.16×10^{-5}	1.13×10^{-5}	1.67×10^{-4}	1.09×10^{-4}	2.85×10^{-4}	1.85×10^{-5}

下面给出以上两个不同初始条件相对应的总误差, 耗散误差与频散误差。

在图 5 和图 6 中, 给出了一阶至六阶迎风偏斜格式在两个不同初始条件下的数值结果, 在表 3 和

表 4 中, 给出了一阶至十阶迎风偏斜格式在两个不同初始条件下的数值误差。从图 5 和图 6 可以看出, 各阶格式在突变点误差都比其他点大; 而六阶迎风偏斜格式在突变点误差最小。这表明六阶格式能

够比较准确地描述具有较大梯度的问题^[13]。从表 3 和表 4 可以得到, 随着数值格式阶数的增加, 数值结果也得到了明显改进。而对于高于六阶精度的格式来说, 改进的程度并不是很大, 因此, 在同时考虑精度与效率的情况下, 六阶迎风偏斜格式是最优的格式。

6 结论

本文利用一般显式有限差分公式构造了一阶至十阶的高精度迎风偏斜格式。针对一维线性平流方程, 通过 Fourier 分析方法比较了各阶迎风偏斜格式的耗散误差与频散误差。对低波分量, 偶阶精度格式的耗散误差小于相邻的奇阶精度格式, 偶阶精度格式与奇阶精度格式都具有较小的频散误差。并且, 偶阶精度格式的数值相速度快于实际相速度, 而奇阶精度格式的数值相速度慢于实际相速度。对于高波分量, 偶阶精度格式比相邻的奇阶精度格式具有较强的耗散效应, 偶阶精度格式的频散性小于相邻的奇阶精度格式。奇、偶阶精度格式的行为差异的原因在于用差分替导数时会带来截断误差, 截断误差中的偶阶导数产生数值耗散(数值粘性), 奇阶导数产生数值频散(色散)。为了检验这些格式的计算性能, 在一维问题上进行了应用。首先, 考虑恒定风场条件下的一维线性平流试验。主要选择两种不同的初始条件来评价数值格式的精度, 这两种试验问题分别是高斯函数、方波函数。对于方波分布, 高于二阶精度的高精度迎风偏斜格式的耗散误差明显减小, 同时存在着一定程度的数值频散。而对于高斯分布, 高精度迎风偏斜格式的耗散性与频散性得到明显改善。数值结果表明, 随着数值格式精度的提高, 数值格式的误差逐渐减小。而对于高于六阶精度的格式来说, 改进的程度并不是很大。其次, 应用各阶格式到具有两种不同初始条件的无粘 Burgers 方程。试验结果表明, 随着数值格式阶数的增加, 数值结果也得到了明显改进。而对于高于六阶精度的格式来说, 进一步的变化并不明显。也就是说, 数值格式的性能并不能完全由截断误差的阶数决定, 随着数值格式精度的提高, 虽然截断误差逐渐减小, 但是舍入误差却逐渐增加, 这样, 必然存在着一个数值格式使得总误差达到最小。总之, 在兼顾效率与精度条件下六阶迎风偏斜格式是最好的。

参考文献 (References)

- [1] Crowley W P. Numerical advection experiments. *Mon. Wea. Rev.*, 1968, **96**: 1~11
- [2] Leonard B P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1979, **19**: 59~98
- [3] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 1983, **49** (3): 357~393
- [4] 陈嘉滨, 纪立人, 陈长胜, 等. JFNK 方法概述及其在大气全隐式非静力模式中的应用方案. *大气科学*, 2006, **30** (5): 821~833
Chen Jiabin, Ji Liren, Chen Changsheng, et al. A review of JFNK methods and its applications in atmospheric non-hydrostatic model. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2006, **30** (5): 821~833
- [5] Rai M M, Moin P. Direct simulation of turbulent flow using finite difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 1991, **96** (1): 15~53
- [6] Tremback C J, Powell J, Cotton W R. The forward-in-time upstream advection scheme: Extension to higher orders. *Mon. Wea. Rev.*, 1986, **115**: 540~555
- [7] Li J P. General explicit difference formulas for numerical differentiation. *J. Comput. Appl. Math.*, 2005, **183**(1): 29~52, doi: 10.1016/j.cam.2004.12.026
- [8] 马延文, 傅德薰. 高精度有限差分法与复杂流动的数值模拟. *自然科学进展*, 2002, **12** (8): 785~793
Ma Yanwen, Fu Dexun. High order accurate difference scheme and numerical simulation of complex flows. *Progress in Natural Science* (in Chinese), 2002, **12** (8): 785~793
- [9] 傅德薰, 马延文. 物理问题的数值模拟及高精度差分格式. *计算物理*, 1992, **9** (4): 501~505
Fu Dexun, Ma Yanwen. Numerical simulation of physical question and high order accurate difference scheme. *Chinese Journal of Computational Physics* (in Chinese), 1992, **9** (4): 501~505
- [10] Takacs L L. A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors. *Mon. Wea. Rev.*, 1985, **113**: 1050~1065
- [11] Kuo H-C, Willians R T. Semi-Lagrangian solution to the inviscid Burgers' equation. *Mon. Wea. Rev.*, 1990, **118**: 1278~1288
- [12] Bermejo R, Staniforth A. The conversion of semi-Lagrangian advection schemes to quasi-monotone schemes. *Mon. Wea. Rev.*, 1992, **120**: 2622~2632
- [13] 王军, 陈嘉滨. 完全非内插半拉格朗日格式在一维 Burgers 方程及二维浅水方程上的应用. *大气科学*, 2000, **24** (4): 493~508
Wang Jun, Chen Jiabin. An application of noninterpolating semi-Lagrangian scheme to one-dimensional Burgers equation and two-dimensional shallow water equations. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2000, **24** (4): 493~508