

大气数值模式空间分辨率的确定方法

朱禾¹ 孙岚² 廖洞贤³

1 中国气象局培训中心, 北京 100081

2 中国气象局科学研究院, 北京 100081

3 国家气象中心, 北京 100081

摘 要 集中讨论了如何决定大气数值模式空间分辨率的问题。首先, 给出模式分辨率的定义和模式各方程都应满足的不等式, 并在此基础上, 用尺度分析和单波的方法推出模式水平和垂直分辨率的预估公式。还给出针对一般模式, 以预估公式作基础, 选择一系列分辨率, 用比较试验, 结合大气结构特点, 最终确定模式分辨率的方法。并用浅水模式进行了水平分辨率的试验。

关键词 大气数值模式 分辨率 尺度分析 截断误差

文章编号 1006-9895(2007)03-0410-08

中图分类号 P435

文献标识码 A

Determination of the Spatial Resolution Required by the Atmospheric Numerical Model

ZHU He¹, SUN Lan², and LIAO Dong-Xian³

1 *China Meteorological Administration Training Center, Beijing 100081*

2 *Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081*

3 *National Meteorological Center, Beijing 100081*

Abstract Up to the present, with exception to the sensitivity test, no method has been published for determining the spatial resolution required by the atmospheric numerical model. For this reason a method is suggested to tackle the problem. At first the spatial resolution is defined as such a resolution with which every discrete term of each equation in the model except the tendency term, could not remarkably be impacted by the corresponding truncation error and would possess appropriate accuracy and the accuracy of the tendency term would also be appropriate. Then based upon the definition two inequalities for use in spatial discretization are presented. Subject to the inequalities and on the basis of the scale analysis of the atmospheric motion two formulas for pre-estimating the horizontal and vertical resolutions are derived. With them an algorithm for determining the resolutions in the free atmosphere is suggested, which consists of the following steps:

(1) Selecting several resolutions centered about the pre-estimated ones.

(2) Performing time integration and computing the norm of each term and that of the truncation error of the largest term in magnitude in each equation of the model equation set.

(3) Discriminating the resolutions which satisfy the inequalities from the other ones.

Two numerical tests are implemented by using the shallow-water equation model. According to the scale analysis and the formula for pre-estimating horizontal resolution, the resolution is found to be 80 km. So in the first test the resolutions are taken as 400, 200, 80 and 50 km. And resolutions 200, 80 and 40 km are adopted in the second

test, and the speed of the basic current and the amplitude of disturbance given at the initial instant are taken as half of those in the first test. The results show that resolutions 50 and 40 km satisfy the first inequality in the first and second tests respectively.

Finally, two preliminary conclusions are drawn as follows.

(1) From the two inequalities the resolutions suitable to the model could be discriminated from the ones unsuitable to the model.

(2) The two formulas for determining the pre-estimated resolution not only take account of the scale of the atmospheric motion, but also involve the magnitude difference between the largest term and the least term in each equation of the model equation set, which is closely related to the features of the model.

Key words atmospheric numerical model, resolution, scale analysis, truncation error

1 问题的提出

一个模式要预报准确, 对于离散模式来说, 须其各方程中的各项因离散引起的误差不致于影响它们的准确性。这时候有两方面的问题: 一是如何决定模式时间分辨率的问题, 另一是如何决定模式空间分辨率的问题。关于决定时间分辨率的问题, 李建平等^[1, 2]已讨论得很多, 本文将集中讨论决定空间分辨率(以下简称分辨率)的问题。对一定的模式分辨率来说, 除各项离散误差对被离散项的准确性产生影响外, 同方程中各项的误差还会对倾向产生影响。前一种影响在文献[3]中已讨论得很多, 比如, 对于某一物理量来说, 构成它的最短波长应大于 8 个网格距, 波幅误差才可能小于 10% 等等。但后一种影响, 一般则讨论得很少。为了说明其重要性, 可以用纬向动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv = L \quad (1)$$

$$10^{-4} \quad 10^{-4} \quad 10^{-5} \quad 10^{-3} \quad 10^{-3}$$

为例来说明。根据杨大升等^[4]对大尺度运动所作的分析, 我们把(1)式各项的量级(MTS制)列在相应项的下面。在此方程中带微商的最大项是水平气压梯度力项(用 PG 表示), 最小项是垂直平流项(用 V_a 表示)。如果取某一水平和垂直分辨率, 使除倾向外, 方程各带微商的项均用差分计算, 则

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \hat{L} = \sum_i \hat{L}_i = \sum_i L_i + \sum_i E_i, \quad (2)$$

其中, $\partial u / \partial t$ 是在方程(1)右端差分后的倾向; L_i 表示 $-\mathbf{V} \cdot \nabla u$ 等, $i=1, \dots, 4$; \hat{L}_i 是 L_i 的差分形式; E_i 是 \hat{L}_i 的截断误差。令

$$\max_i E_i = E_{\max},$$

且不考虑 E_i 之间相互抵销的情况, 则 $\sum_i E_i$ 的量级等于 E_{\max} 的量级, 用 $\sum_i E_i \sim E_{\max}$ 表示。再设在同一差分形式下, 带微商项量级大的, 其截断误差的量级也大(证明见 3.5 节中结果 1), 从而 V_a 的截断误差总小于 PG 的截断误差, 这时 PG 截断误差的量级即 E_{\max} 的量级。若 E_{\max} 仅为 PG 的 1/10, 则 $E_{\max} \sim 10^{-4}$, 和方程中 $\partial u / \partial t$ 的量级相等, 且大于 V_a 。这样, 倾向就不能算准, $\partial u / \partial t$ 的相对误差可能达到 100%! 如果 E_{\max} 仅为 PG 的 1%, 则 E_{\max} 小于倾向项而和 V_a 的量级相等; 但这仍不准确, 其所以如此是因为 V_a 的截断误差只有当其量级小于 V_a 时才能算作准确, 既然如此, $\partial u / \partial t$ 计算误差的量级也应小于 V_a , 才能与 V_a 一样准确, 而这是不可能的! 不过, 如果

$$E_{\max} <_M V_a, \quad (3)$$

或

$$E_{\max} <_M \min L_i = L_{\min}, \quad (4)$$

则可以认为: 方程各项的截断误差都小于 L_{\min} , $\partial u / \partial t$ 的计算误差也小于 L_{\min} 。这里 $<_M$ 表示在量级上小于。

在数值天气预报中, 尽管分辨率很早就引起了人们的注意(如 Robert^[5]、纪立人等^[6]), 但决定模式分辨率, 一般还是依靠一些试验(如敏感性试验^[7, 8]、分析(如斜压波、锋面、急流的结构)^[9]或简单理论(如波长、截断误差和分辨率之间的关系), 利用它们作出的决定并不完全可靠。比如, 敏感性试验只可能决定所试验的几种分辨率的相对好坏, 不能确定最佳分辨率, 如果最佳分辨率不在所取的分辨率之中; 而且, 影响积分结果的因素很多, 试验结果的相对好坏是否即分辨率的相对好坏仍存在问题。至于分析, 其结果受资料、个例的限

制很大,不同个例的结果会很不相同。只有在同一标准下,大量个例的统计分析结果才比较可靠。对于是否能分辨的问题,在选取分辨率时应当给予足够的重视;但分辨率应是针对模式的,而不仅仅是针对物理量的。看来,用这些方法选取分辨率,还不够全面系统,没有与模式的性质联系起来,缺乏全局性和系统的理论指导,研究新的确定分辨率的方法仍然是十分必要的。

下面,在第2节中将给出模式分辨率的定义,并提出模式对分辨率的要求;在第3节中将在尺度分析的基础上,给出决定模式分辨率的预估公式;在第4节中将给出在一般情况下决定模式分辨率的方法;在第5节中将给出用本文的方法决定浅水模式水平分辨率的数值试验结果;第6节是结论。

2 模式分辨率的定义和要求

2.1 模式分辨率的定义

根据第1节中提出的问题,可以定义模式沿某方向的分辨率为:能使模式各方程中各项因离散引起的误差既不影响被离散项应有的准确度,又不影响同方程倾向应达到准确度所要求的分辨率。下面,我们将以此为基础进行讨论。

2.2 模式分辨率的要求

设模式大气方程组为

$$\frac{\partial A_l}{\partial t} + \sum_{m_1} \Lambda_{lm_1} + \sum_{m_2} \Lambda_{lm_2} + \sum_{m_3} \Lambda_{lm_3} = 0, \quad (5)$$

其中, A_l 是预报变量, $l=1, 2, \dots$; Λ_{lm_1} 是带有水平微商的项; Λ_{lm_2} 是带有垂直微商的项; Λ_{lm_3} 是不带微商的项。

在方程(5)中,如除 $\partial A_l / \partial t$ 外,其他项的微商均用差商代替,则(5)式成为

$$\frac{\delta A_l}{\delta t} + \sum_{m_1} L_{lm_1} + \sum_{m_2} L_{lm_2} + \sum_{m_3} L_{lm_3} + \sum_{m_1} e_{lm_1} + \sum_{m_2} e_{lm_2} = 0, \quad (6)$$

其中, $\delta A_l / \delta t$ 是对应于 Λ_{lm_1} 等差分后的倾向; L_{lm_1} 和 L_{lm_2} 各是对应于 Λ_{lm_1} 和 Λ_{lm_2} 的差商, e_{lm_1} 和 e_{lm_2} 各是相应的截断误差; $L_{lm_3} = \Lambda_{lm_3}$ 。

由于方程(6)中不仅有水平微商,还有垂直微商,为了确定分辨率的方便,下面,我们将对水平和垂直方向分别进行考虑。根据(4)式,在方程组(5)的任一方程中,不等式

$$e_{1l} <_M \tilde{A}_l \quad (7)$$

和

$$e_{2l} <_M \tilde{A}_l \quad (8)$$

应同时满足。这里 $e_{1l} = \max_{m_1} e_{lm_1}$, $e_{2l} = \max_{m_2} e_{lm_2}$, $\tilde{A}_l = \min_{m_1, m_2, m_3} (L_{lm_1}, L_{lm_2}, L_{lm_3})$ 。可以看出:如果不等式(7)和(8)成立,在近似意义下,方程(6)中带差商的项均有相当准确度,可以适当地发挥作用。这符合模式分辨率的定义。

3 5个结果

考虑不同模式,其数学和计算形式、物理内容都可能有很大的差别,为便于广泛应用,我们不针对特定模式进行研究,而针对平均情况进行研究。为此,我们将在单波情况下,用尺度分析方法推导确定模式水平和垂直分辨率的预估公式。在此之前还要确定各项量级与各项截断误差量级之间的关系。

结果1 在同一方程中,对于带有差商的,形如 $a \delta A / \delta x$ 和 $b \delta B / \delta x$ 的两项,其中量级大的,其截断误差的量级也大;如相等,其截断误差的量级也相等。

证:设 $a = \bar{a}a'$, $b = \bar{b}b'$, $A = \bar{A}A'$, $B = \bar{B}B'$, $x = Lx'$, 其中 \bar{a} 、 \bar{b} 、 \bar{A} 、 \bar{B} 和 L 各是 a 、 b 、 A 、 B 和 x 的特征尺度。于是,

$$a \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{\bar{a} \bar{A}}{L} a' \frac{\delta A'}{\delta x'},$$

$$b \frac{\delta B}{\delta x} = \frac{\bar{b} \bar{B}}{L} b' \frac{\delta B'}{\delta x'}.$$

如 $a \delta A / \delta x$ 的量级大于或等于 $b \delta B / \delta x$ 的量级,则

$$\bar{a} \frac{\bar{A}}{L} \geq_M \frac{\bar{b} \bar{B}}{L}, \quad (9)$$

这里, $() \geq_M ()$ 表示在量级上前者的绝对值大于或等于后者的绝对值。如果采用中心差,则 $a \delta A / \delta x$ 和 $b \delta B / \delta x$ 的截断误差 E_A 和 E_B 各是

$$E_A = \frac{(\Delta x)^2}{6} a \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \Big|_{x=\xi} = \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\bar{a} \bar{A}}{L^3} a' \frac{\partial^3 A'}{\partial x'^3}$$

和

$$E_B = \frac{(\Delta x)^2}{6} b \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} \Big|_{x=\xi} = \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\bar{b} \bar{B}}{L^3} b' \frac{\partial^3 B'}{\partial x'^3},$$

其中, $\xi = x + \theta \Delta x$, $0 < \theta < 1$ 。按(9)式,

$$E_A \geq_M E_B \quad (10)$$

成立。

显然, 在同一方程中最大项的截断误差之量级, 也是各项截断误差中的最大者。还必须指出: 如 A (或 B) 表示 P 、 T 或 ρ , 在水平方向, \bar{A} (或 \bar{B}) 须用 $\Delta_H \bar{A}$ (或 $\Delta_H \bar{B}$) 代替。如果在垂直方向或时间方向, 还须用 $\Delta_V \bar{A}$ (或 $\Delta_V \bar{B}$), 或 $\Delta_r \bar{A}$ (或 $\Delta_r \bar{B}$) 代替。这里 $\Delta_H \bar{A}$, $\Delta_V \bar{A}$, $\Delta_r \bar{A}$ 等各是 A (或 B) 的水平变化量, 垂直变化量和时间变化量的特征尺度。

结果 2 设 A 和 B 各是方程组 (6) 的某方程中量级最大的带有 x 差商 (代表水平差商, 下同) 的项和最小项 (不一定带有差商), 其量级各是 10^{A_x} 和 10^{B_1} , $A_x > B_1$, A_x 和 B_1 均为无因次整数, 且 $A = a\delta F/\delta x$, 则在满足不等式 (7) 的条件下,

$$(\Delta x_s)_l = \frac{\sqrt{6}L}{10^{[(A_x - B_1)_M + r]/2}} \quad (11)$$

成立。反之, 如 (11) 式成立, 则 (7) 式亦成立。其中, $r \geq 1$ 表示计算准确度的参数, 取正整数; 下标 s 表示是用尺度分析方法推出的。

证: 设 A 、 a 、 B 的特征尺度仍和结果 1 中的一样; 再设 $F = \bar{F}F'$, \bar{F} 是 F 的特征尺度。于是,

$$\bar{A}A' = \bar{a} \frac{\bar{F}}{L} a' \frac{\delta F'}{\delta x},$$

故

$$\bar{A} \sim \bar{a} \frac{\bar{F}}{L} \sim 10^{A_x}.$$

按不等式 (7), 应有

$$\frac{1}{6} \frac{\bar{a}\bar{F}}{L^3} (\Delta x_l)^2 <_{M} 10^{B_1}.$$

为了方便, 不妨令

$$\frac{1}{6} \frac{\bar{a}\bar{F}}{L^3} (\Delta x_l)^2 = 10^{B_1 - r},$$

于是, 式 (11) 得证。用同法可证逆结果成立。

结果 3 设 A 和 B 各是某方程中的带有 z 差商的最大项和最小项 (不一定带有 z 差商), 其量级各是 10^{A_z} 和 10^{B_1} , 且 $A_z > B_1$, $A = a\delta F/\delta z$, A_z 和 B_1 各是大于 1 的整数, 则在满足不等式 (8) 条件下,

$$(\Delta z_s)_l = \frac{\sqrt{6}H}{10^{[(A_z - B_1)_M + r]/2}} \quad (12)$$

成立; 反之, 如式 (12) 成立, 则式 (8) 亦成立。

用曾在结果 2 中同样的方法, 可以证明 (证明从略)。这里 H 是垂直厚度的特征尺度。

从 (11)、(12) 两式可以看出: 如某方程中的

$A_x - B_1$ 或 $A_z - B_1$ 为模式方程组中的最大者 [即 $\max(A_x - B_1)_l$ 或 $\max(A_z - B_1)_l$], 则根据 (11) 或 (12) 式所求出的水平或垂直网格距必为方程组中, 从各方程所求出的最小者, 因而, 用这样的水平或垂直网格距求出的各方程中的最大截断误差必然都满足不等式 (7) 或 (8)。因此, 作为模式方程组的分辨率, 应有

$$\Delta x_s = \frac{\sqrt{6}L}{10^{[(A_x - B_1)_M + r]/2}}, \quad (13)$$

和

$$\Delta z_s = \frac{\sqrt{6}H}{10^{[(A_z - B_1)_M + r]/2}}, \quad (14)$$

这里, $()_M = \max()_l$ 。注意: 这时 $(A_x - B_1)_M$ 和 $(A_z - B_1)_M$ 不一定出现在同一个方程中, Δx_s 和 Δz_s 各表示模式的水平分辨率和垂直分辨率。(13) 和 (14) 式是本文用作模式分辨率的预估公式。不过这不是唯一的, 我们也可以用其他方法估计, 比如用单波在满足不等式 (7) 和 (8) 的条件下来推导预估公式等。

结果 4 设某方程中 A 的表示, 它和 B 的量级仍与结果 2 中一样, 但

$$F = \hat{F} \sin\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right),$$

则在满足不等式 (7) 的条件下, 公式

$$(\Delta x_w)_l = \frac{\sqrt{6}L}{\pi 10^{[(A_x - B_1)_l + r]/2}} \quad (15)$$

成立。这里 $L = \Lambda/2$, 下标 w 表示是用单波计算的。

证: 因为

$$E_A = a \frac{2\pi}{\Lambda} \hat{F} \cos\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - a \frac{F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x)}{2\Delta x} =$$

$$a \frac{\pi}{L} \hat{F} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left[\frac{\pi}{H} z \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{L} \Delta x\right)}{\frac{\pi}{L} \Delta x}\right]\right],$$

把上式右端中的 $\sin(\pi/L)\Delta x$ 用 Taylor 级数展开, 在条件 (7) 下有

$$\frac{\bar{a}\hat{F}}{6L} \pi \left(\frac{\pi}{L} \Delta x\right)^2 < 10^{B_1},$$

即

$$\frac{1}{6} 10^{A_x} \left(\frac{\pi}{L} \Delta x\right)^2 = 10^{B_1 - r},$$

故式(15)成立。这里水平长度特征尺度取作 $\Delta/2\pi$ 。于是初看起来用(15)式得到的 $(\Delta x_w)_l$ 比用(11)式得到的 $(\Delta x_s)_l$ 小, 但因为 L 的定义不同, 这样比还不合适。

结果5 设某方程中 A 的表示, 它和 B 的量级仍与结果3中一样, F 的表示式与结果4中一样, 则在满足不等式(8)的条件下, 公式

$$(\Delta z_w)_l = \frac{\sqrt{6}H}{\pi 10^{[(A_z - B_1)_l + r]/2}} \quad (16)$$

成立。证明从略。

(13)、(14)、(15)、(16)式说明: Δx_s 等受两个因素的影响: 一个是运动的水平特征尺度 L , 尺度越大, Δx_s 等也越大; 另一个是 $(A_x - B_1)_M$, 它越大, Δx_s 等越小。这两个因素的作用正好相反。对于垂直方向, 结果也相似。在静力模式中, 一般 $(A_x - B_1)_M$ 较大, $(A_z - B_1)_M$ 较小, 预报受水平分辨率的影响较大; 在非静力模式情况, 一般 $(A_x - B_1)_M$ 较小, $(A_z - B_1)_M$ 较大, 垂直分辨率的提高对预报质量有重要影响。

4 在预估基础上的修正

4.1 比较试验

针对自由大气, 用一定模式, 按如下步骤进行试验。

(1) 选取一系列分辨率。根据模式方程组各项的量级, 求出 $(A_x - B_1)_M$ 和 $(A_z - B_1)_M$, 按公式(13)和(14)把所求的 Δx_s 和 Δz_s 作为预估分辨率, 在其附近选取一系列分辨率 $\Delta x_q, \Delta z_q, q, q' = 1, 2, \dots$ 。

(2) 作时间积分。计算各预报时刻 $t_1, t_2 \dots$ 模式方程组中各项 $L_{lm}^{q,q'}$ 在网格点的值; 其上标表示分辨率, 下标表示方程 l 中的第 m 项。

(3) 计算 $\|L_{lm}^{q,q'}\|$ 。 $\|L_{lm}^{q,q'}\|$ 定义作

$$\|L_{lm}^{q,q'}\| = \frac{1}{(I-1)(J-1)(K-1)} \cdot \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} |(L_{lm}^{q,q'})_{ijk}| \quad (17)$$

(4) 计算各方程中量级最大的带差商项的截断误差及其量级。设某项含有 x 方向的中心差商 $\delta F/\delta x$, 其截断误差 $e_x(\delta F/\delta x)$ 是

$$e_x(\delta F/\delta x) \approx \frac{1}{12\Delta x} [F_{i+2, jk} - F_{i-2, jk} - 2(F_{i+1, jk} - F_{i-1, jk})] \quad (18)$$

对于 y 或 z 的差商, 其截断误差计算公式类似。

于是, 用(18)式可以求出各项的截断误差 $E_{lm}^{q,q'}$ 。用其格点值代替(17)式中的 $L_{lm}^{q,q'}$, 用该式可求出其量级, 即 $\|E_{lm}^{q,q'}\|$ 。

(5) 比较各时刻各方程中用 $\Delta x_q, \Delta z_q$ 求出的最大项截断误差和其最小项的量级。根据(7)和(8)式, 有

$$\|E_H\|_l^{q,q'} <_M \tilde{L} \| \tilde{L} \|_l^{q,q'} \quad (19)$$

和

$$\|E_V\|_l^{q,q'} <_M \tilde{L} \| \tilde{L} \|_l^{q,q'} \quad (20)$$

可判断(19)、(20)式是否同时满足, 如不满足, 则不合理, 须试其它分辨率; 如同时满足, 则合理, 可以用所试分辨率作模式分辨率。这里

$$\|E_H\|_l^{q,q'} = \max_{m_1} (\|E_{lm_1}^{q,q'}\|),$$

$$\|E_V\|_l^{q,q'} = \max_{m_2} (\|E_{lm_2}^{q,q'}\|),$$

$$\tilde{L} \| \tilde{L} \|_l^{q,q'} = \min_{m_1, m_2, m_3} (\|L_{lm_1}^{q,q'}\|, \|L_{lm_2}^{q,q'}\|, \|L_{lm_3}^{q,q'}\|).$$

4.2 考虑大气结构特点进行修正

设用上面的方法, 在自由大气情况所决定的分辨率为 $\Delta x^q, \Delta z^q$, 在其基础上, 我们可以根据大气结构特点作进一步的修正。以垂直分辨率为例, 如考虑边界层中 Ekman 螺线等特点, 分辨率应不少于5层; 如要描写好云层分布, 在自由大气中 Δz 应小于1000 m。不过, 这些都还不能恰当地描写好锋面结构(一般厚度只有1~2 km)^[10]。考虑到这一点, 即使 $\Delta z \leq 200$ m 也不为过。对于 Δx 的修正也类似。当然, 修正只是指对预估网格加密而言, 如所要求的分辨率已经达到, 则不必修正。

经过上面的修正, 可以认为, 所取模式分辨率已比较合理了。但是, 这样确定的分辨率还只是模式最低分辨率; 如准确度要求更高, 还应取 $r \geq 2$, 并用前面的方法重新确定分辨率。

5 浅水方程的数值试验和分析

5.1 方程组各项的量级和预估分辨率

根据杨大升等^[4]所给的大尺度运动的特征尺度 $L \sim 10^6$ m, $H \sim 10^4$ m, $U \sim 10$ m/s, $\tau \sim 10^5$ s, $\Delta_H H \sim \Delta H \sim 10^2$ m, 浅水方程组可以表示成如下形式, 各项的量级写在它们所在位置的下面。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

$10^{-4} \quad 10^{-4} \quad 10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-3}$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (22)$$

$10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 10^{-1} \quad 10^{-1}$

这里 L 、 H 、 U 、 τ 、 $\Delta_t H$ 、 $\Delta_H H$ 分别是水平长度、垂直厚度、水平风速、时间、等压面高度时间变化量和水平变化量的特征尺度; 还略去了 y 方向的动量方程。

根据方程 (21)、(22), 可以求得 $(A_x - B_1)_M = 2$; 按公式 (13) 和 (14), 取 $r=1$, 则 $\Delta x_s \approx 80 \text{ km}$ 。于是, 我们可以取 $\Delta x = \Delta y = 400, 200, 80, 50 \text{ km}$

进行试验, 记为第一次试验。

5.2 初始场, 水平侧边界条件和差分方案

参照文献[11], 取

$$u = u_0 - u_1 \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2\pi y}{L}, \quad (23)$$

$$v = v_0 + u_1 \cos \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L}, \quad (24)$$

$$\phi = gZ_0 + \frac{Lf}{2\pi} u_1 \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} + \frac{u_1^2}{4} \left(\cos \frac{4\pi x}{L} + \cos \frac{4\pi y}{L} \right), \quad (25)$$

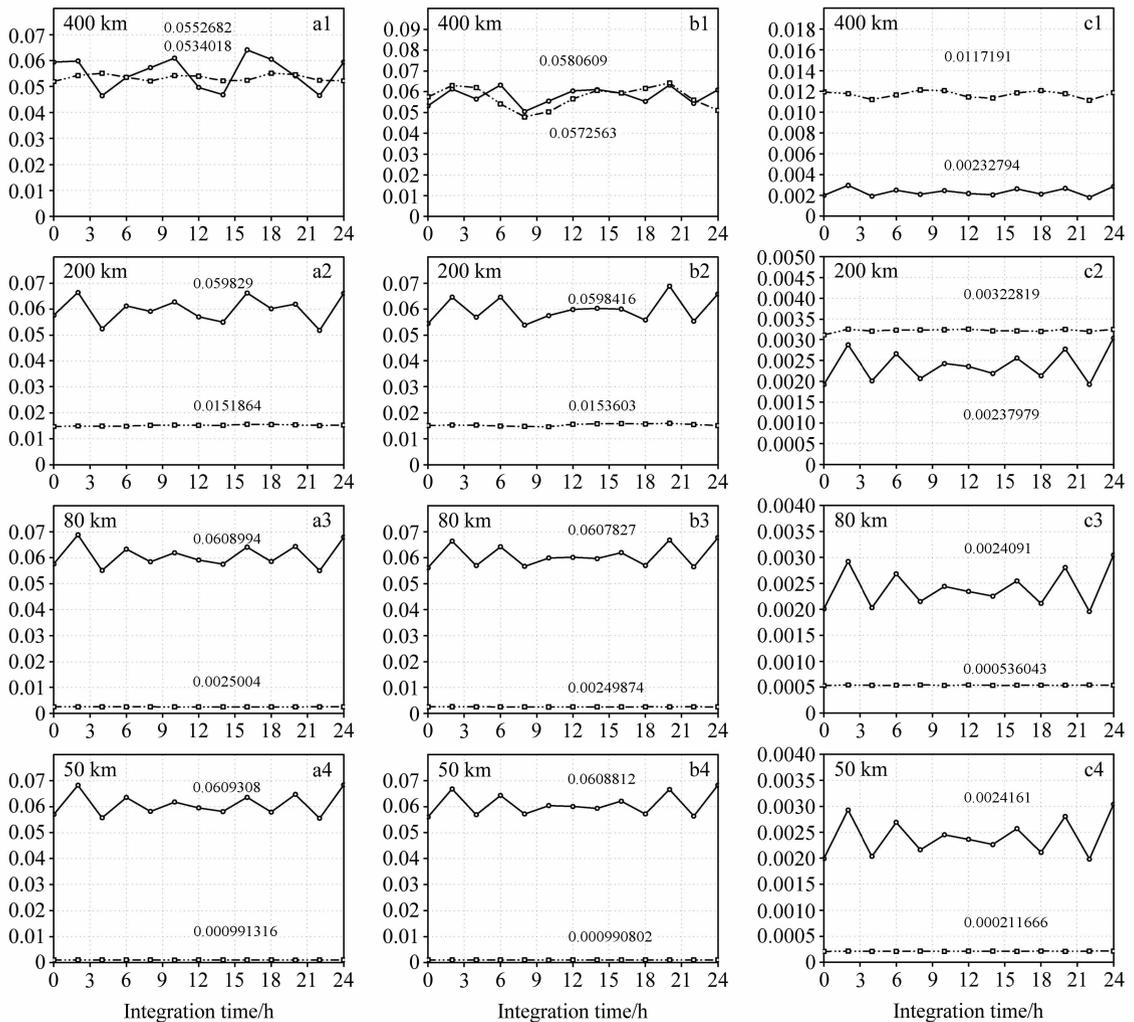


图1 在第一次试验中几种不同分辨率下最大项的截断误差 $\|E_H\| q^{\cdot q}$ (虚线) 和最小项 $\|\tilde{L}\| q^{\cdot q}$ (实线) 随积分时间变化的比较: (a1、a2、a3、a4) 运动方程 x 分量; (b1、b2、b3、b4) 运动方程 y 分量; (c1、c2、c3、c4) 连续方程。左上角数值代表分辨率; 折线上(下)方数值代表每条折线的平均值

Fig. 1 Comparison between the truncation errors of the largest term $\|E_H\| q^{\cdot q}$ (dotted line) and the least term $\|\tilde{L}\| q^{\cdot q}$ (solid line) with various resolutions in the first test: (a1, a2, a3, a4) The x -component motion equation; (b1, b2, b3, b4) the y -component one; (c1, c2, c3, c4) the continuity equation. The number in the upper left corner represents the resolution; the numerical value above (or below) the broken line represents the average

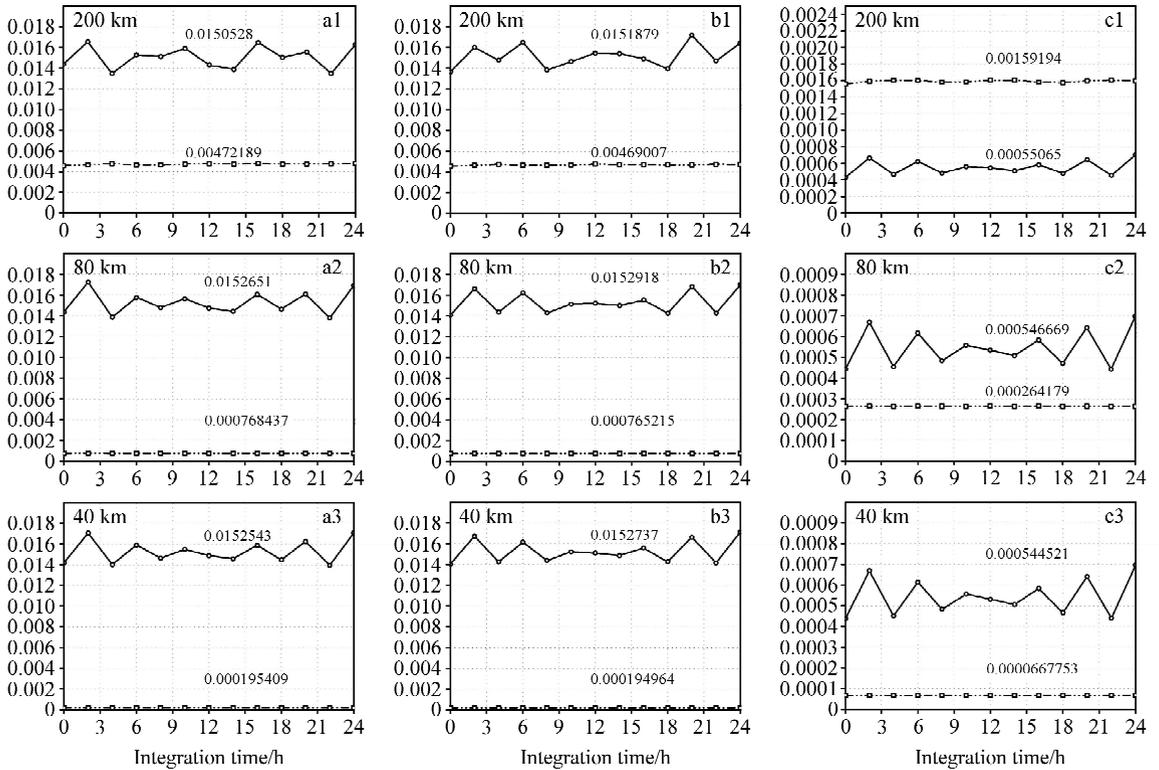


图2 同图1, 但为第二次试验

Fig. 2 Same as Fig. 1, but for the second test

其中, ϕ 满足平衡方程, $\phi = gz$, $v_0 = 0$ m/s, $u_0 = 20$ m/s, $u_1 = 40$ m/s, $Z_0 = 8000$ m; f 取作常数, 等于 10^{-4} s^{-1} , 相当于 f 在 $\phi = 43^\circ \text{ N}$ 的值, $g = 9.8$ m/s². 积分区域取为 $8000 \text{ km} \times 4000 \text{ km}$, $L = 4000$ km。

计算时采用季仲贞和王斌的完全能量守恒格式^[12], 并采用周期边界条件。

5.3 计算结果

在时间积分时, 在浅水波方程组的各方程中按 $\|L_m^{\eta'}\|$ 的大小从中选出最小项, 并计算最大项的截断误差 $\|E_H\| q^{-\eta'}$, 结果如图 1 所示。从图 1 可以看出: 随着分辨率的提高, 三个方程中最大项的截断误差都不断减小, 但最小项却变化较小。在 400 km 粗分辨率条件下, 不论那个方程都不能满足不等式 (19)。当分辨率升到 200 km 和 80 km 时, 两个运动方程中最大项的截断误差范数均小于最小项的范数, 但连续方程在 200 km 条件下, 最大项截断误差仍然超过其最小项; 而图 1 的 a3、b3、c3 中的最大项截断误差虽都比最小项小, 但未达一个量级。当分辨率进一步提高到 50 km 时, 三个方程中各最小项均比其最大项截断误差大 1 个量

级。此时可以认为方程组中各项已达到要求, 这个分辨率就是我们所需要的。值得注意的是: 在图 1 中, 对于分图 a3 和 b3, 当 Δx 取作 80 km 时, 不等式 (19) 已满足, 而分图 c3 却不满足; 只有当 Δx 取作 50 km 时, 所有方程才满足该不等式的要求。这是为什么? 对于这个问题, 我们可以按方程 (21) 中所示的量级 $(A_x - B_1)|_{l=1} = 1$ 和按方程 (22), $(A_x - B_1)|_{l=3} = 2$ 来解释。因为 $10^{(A_x - B_1)l}$ 和网格距成反比, $(\Delta x)_1$ 应大于 $(\Delta x)_3$ 的缘故。

此外, 天气系统的结构与强度对分辨率的选择也会有影响。比如, u_0 、 u_1 的值分别取作 10 m/s 和 20 m/s, 分辨率分别取作 200 km、80 km、40 km, 在上述其他条件不变的情况下, 用同样的分析, 计算得出的模式分辨率约为 40 km 就是证明。计算结果如图 2 所示。这次计算记为第二次试验。

6 结论

根据前面的分析计算, 取 (13) 式作为水平分辨率的预估公式是合理的, 在此基础上给出的取分

分辨率的方法也是可行的。考虑(14)式与(13)式相似,根据它选取垂直分辨率的方法也应当是合理的。这些情况说明:选取模式分辨率不同于选取个别物理量和个别方程的分辨率,必须从模式全局考虑,使模式方程组各项都能发挥其应有的作用,这样,网格距不仅应与运动尺度成正比,还应与 $10^{(A_x-B_1)M}$ (或 $10^{(A_z-B_1)M}$)成反比。这是预估公式(13)、(14)和常用的根据最短波长、截断误差和分辨率的关系来选取网格距的方法的最大不同。不过,预估公式的基础是尺度分析,分析本身很粗,由此得出的结果自然很粗,公式(13)和(14)只能作为选取分辨率的参考。另外,由于选取模式分辨率牵涉到很多问题,今后还需要做很多工作,要不断通过分析计算进行改进,本文只是这方面工作的一个初步尝试。

参考文献 (References)

- [1] 李建平, 曾庆存, 丑纪范. 非线性常微分方程的不确定性原理 I. 数值结果. 中国科学 (E 辑), 2000, **30** (5): 403~412
Li Jianping, Zeng Qingcun, Chou Jifan. Computational uncertainty principle in nonlinear ordinary differential equations. I. Numerical results. *Science in China (Series E)*, 2000, **43** (5): 449~460
- [2] 李建平, 曾庆存, 丑纪范. 非线性常微分方程的不确定性原理 II. 理论分析. 中国科学 (E 辑), 2000, **30** (6): 550~567
Li Jianping, Zeng Qingcun, Chou Jifan. Computational uncertainty principle in nonlinear ordinary differential equations. II. Theoretical analysis. *Science in China (Series E)*, 2001, **44** (1): 55~74
- [3] 廖洞贤, 柳崇健. 数值天气预报中的若干新技术. 北京: 气象出版社, 1995. 453pp
Liao Dongxian, Liu Chongjian. *Several Techniques Used in Numerical Weather Prediction* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 1995. 453pp
- [4] 杨大升, 刘余滨, 刘式适. 动力气象学. 北京: 气象出版社, 1980. 423pp
Yang Dasheng, Liu Yubin, Liu Shikuo. *Dynamic Meteorology* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 1980. 423pp
- [5] Robert A. The semi-implicit method. Numerical Methods Used in Atmospheric Models. Vol II GARP Publications Series, No. 17 WMO, 1979. 417~437
- [6] 纪立人, 陈嘉滨, 张道民, 等. 数值预报模式动力框架发展的若干问题综述. 大气科学, 2005, **29** (1): 120~130
Ji Liren, Chen Jiabin, Zhang Daomin, et al. Review of some numerical aspects of the dynamic framework of NWP model. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2005, **29** (1): 120~130
- [7] Miyakoda K, Strickler R F, Nappo C J, et al. The effect of horizontal grid resolution in an atmospheric circulation model. *J. Atmos. Sci.*, 1971, **28** (4): 481~499
- [8] Houghton D D. Spacial resolution impacts on National Weather Service nested model simulation. Ninth Conference on NWP, AMS, 1991
- [9] Yanai M, Nitta T. Finite difference approximation for barotropic instability problem. *J. Meteor. Soc. Japan*, 1968, **46** (5): 389~403
- [10] 丁一汇. 高等天气学. 北京: 气象出版社, 2005. 585pp
Ding Yihui. *Advanced Synoptic Meteorology* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 2005. 585pp
- [11] Charney J. The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. *Tellus VII*, 1955, **7** (1): 22~26
- [12] 季仲贞, 王斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用. 大气科学, 1991, **15** (2): 1~10
Ji Zhongzhen, Wang Bin. Further discussion on the construction and application of difference scheme of evolution equations. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (Scientia Atmospherica Sinica)* (in Chinese), 1991, **15** (2): 1~10