

平均流变化对波反馈的 $A-B$ 混合方程理论及应用

高守亭

中国科学院大气物理研究所, 北京 100029

摘 要 从两层模式的基本方程出发, 推导了描述平均流对波振幅反馈的 $A-B$ 混合方程, 并通过适当变换把混合方程转化为洛仑兹系统, 用于研究平均流对边缘波扰动振幅增长的反馈机制, 以及在中性廓线附近边缘波的稳定性问题。这是对研究波流相互作用的 E-P 通量理论的一个重要扩充。同时, 作者还指出了 $A-B$ 混合方程理论在研究大气中的波流相互作用及对流方面有相当应用前景。

关键词 波-平均流相互作用 $A-B$ 混合方程 洛仑兹系统 稳定性分析

文章编号 1006-9895 (2007) 06-1151-09

中图分类号 P433

文献标识码 A

$A-B$ Hybrid Equation Theory on the Feedback of the Basic Flow Modification on the Wave and Its Application

GAO Shou-Ting

Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

Abstract Based on the two-layer model equations, the $A-B$ hybrid equations are derived to describe the feedback of the basic flow modification on the wave amplitude. After being transformed into Lorenz system, the $A-B$ equations are used to study the mechanism of the feedback of the basic flow on marginal wave, as well as their stability near the balance points in the phase space. It is a quite important complement to the E-P flux theory in wave-mean flow interactions. In addition, the potential applications of the $A-B$ hybrid equation theory to the wave-mean flow interactions and convective systems are pointed out in this paper.

Key words wave-mean flow interaction, $A-B$ hybrid equations, Lorenz system, stability analysis

1 引言

大气中的波涡流相互作用是大气动力学的重要研究内容之一, 国内外学者在该方面先后已做了很多工作^[1~14]。20 世纪后半叶, 波作用守恒和波-平均流相互作用原理, 在研究大气中各种尺度扰动的变化及其与平均流相互作用等方面变得越来越重要了。然而, 他们早期的研究都是基于拉格朗日观点的, 所以建立了拉格朗日的运动方程而不是常用的欧拉方程。实际上, 波动问题既是质点的振动问题又是能量的传播问题。从质点的振动视角去看, 建

立描述质点运动的拉格朗日方程是必要的, 但从能量传播的视角去看, 建立描述场变量的欧拉方程也是必要的。因此, 研究波流相互作用问题的最好办法是建立既有拉格朗日观点的又有欧拉观点的混合方程。为此, 早期许多著名科学家在该方面做了不少努力, 如: Whitham^[15,16] 最早通过运用平均变分原理得到波作用方程; Andrews 和 McIntyre^[1] 使用广义的拉格朗日平均 (实质上就是拉格朗日方法和欧拉方法的结合) 研究了波流相互作用问题, 得到了有限振幅波与流作用的非加速原理。由于拉格朗日方法总是涉及到质点的位移问题, 所以广义拉格

朗日平均方法在理论上虽然得到了较漂亮的结果,但在实际应用中很难精确计算。因此,广义拉格朗日平均方法在波流相互作用研究的进程中并没有显示出它的后继生命力。

在探索利用广义拉格朗日平均方法研究波流相互作用的同时,另有一些科学家却从欧拉观点出发探索研究波流相互作用的理论和方法。这当中最有代表的是 Eliassen 等^[17]和 Charney 等^[18]在波与平均流相互作用的理论表述方面取得了巨大成就,得到了用于描述波对平均流作用的物理量,即通常所说的 E-P 通量。这吸引了更多的学者关注并从事波与流相互作用的研究^[1, 3, 5, 7, 19~21]。

很多情况下,波扰动起着类似催化剂的作用。换句话说,波扰动引起的动量通量和热量通量的辐散会导致某一高度和某些纬度上的平均流发生系统性加速。在这一方面经过近数十年的研究,较系统地发展了从传统的 E-P 通量到后来的广义 E-P 通量理论。但实际上,平均流加速对波扰动可能的反馈作用则是另一个应当引人注意的问题。而且这种反馈效应是不能用 E-P 通量理论来研究的。因此平均流变化对波扰动的反馈问题一直是研究的难题,是对波流作用研究学家的挑战。

过去一直认为,平均流加速对波动的反馈仅仅是一个依赖于时间的影响因子,即整个波-平均流系统可能有一个时间尺度上的“振荡”,如赤道平流层准两年振荡(QBO)等。没有探讨出研究这种反馈效应的新方法和新理论。Pedlosky^[22]首先探讨了平均流变化对波的反馈效应,但他没有形成可使后人使用的较系统的方法论,Gao^[8]再次探讨了平均流变化对瞬变波的反馈效应,把纯数学的 A-B 方程^[23]同 Pedlosky 的有限振幅渐进展开法相结合,提出了可用于研究基本流变化对瞬变波反馈效应的 A-B 混合法。本文在较详细介绍 A-B 混合法的基础上,进一步研究了平均流变化对边缘波的反馈效应问题。

2 波流作用中耗散效应的重要性

在讨论平均流对波振幅反馈作用之前,有必要介绍 Gibbon 和 McGuinness^[24]在耗散对斜压不稳定产生影响方面做出的工作。他们通过分析包含粘滞系数 r 和 β 效应的准地转位势方程发现,随着耗散 $r \rightarrow 0$,区分波稳定与否的中性廓线可以通过令耗

散方程中的 $\omega_i = 0$ (ω_i 是 ω 的虚部)得到:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} R_d(k, \gamma, \beta) = \frac{4\beta^2 F^2}{K^2(2F - K^2)(K^2 + F^2)^2}, \quad (1)$$

这里, F 是内弗雷德数, $K^2 = k^2 + m^2\pi^2$ 。但是,如果设定 $r=0$,计算得到的中性廓线形式为

$$R(k, \beta) = \frac{2\beta F}{K^2(4F^2 - K^4)^{1/2}}. \quad (2)$$

上面两个中性廓线(1)和(2)式显然不重合,由此可见,即使是很微弱的粘滞效应仍然能引起中性廓线的变化。这引发了我们的思考:无粘性耗散的情况下,稳定状态以下的波扰动既不发展也不消亡,然而,摩擦耗散的出现大大改变了这种状况,因为波扰动必须吸收足够的能量以补偿耗散维持原来状态,并且要从平均流中吸收更多的能量使其发展。

因此可以推断,势必存在一个新的状态。在这个状态下,发展的波扰动会以一定的速率从平均流中获取能量,补偿扰动能量的耗散,维持波自身的能量收支平衡。于是,便归结到如何描述存在于中性廓线附近边缘波的能量平衡这样一个问题,为此,从以下的两层模式方程出发:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \phi_1 - F(\phi_1 - \phi_2)] = -\frac{r}{2} \nabla^2 \phi_1, \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \phi_2 - F(\phi_2 - \phi_1)] = -\frac{r}{2} \nabla^2 \phi_2, \quad (4)$$

其中, ϕ_1 和 ϕ_2 是每一层上的流函数, F 是内弗雷德数, r 是粘性耗散系数。假设,纬向平均流是简单的切变流,即 U_1 和 U_2 与 y 无关,这样,它们便可写作: $U_1 = -U_2 = U_s/2$ 。 ϕ_n ($n=1, 2$) 可以写为

$$\phi_n = -U_n y + \phi_n(x, y, t). \quad (5)$$

把(5)式代入方程(3)和(4)中,得到

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \phi_1 + F(\phi_2 - \phi_1)] + F(U_1 - U_2) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\frac{r}{2} \nabla^2 \phi_1, \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \phi_2 + F(\phi_1 - \phi_2)] + F(U_2 - U_1) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{r}{2} \nabla^2 \phi_2. \quad (7)$$

为在此问题中反映 y 方向上的变化,可引进正

弦函数, 这样就有:

$$\phi_n = A_n \sin(m\pi y) \exp(i(kx - \omega t)) + cc, \quad (8)$$

其中, $n=1, 2, m=1, 2, \dots$; 右端的 cc 代表了前一项的复共轭。把 (8) 式代入方程 (6) 和 (7) 中, 得到 ω 二次形式的频散关系:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) - \frac{irK^2/k}{2K^2(K^2 + 2F)}(K^2 + F) \pm i \left[K^4 U_s^2 (4F^2 - K^2) + \frac{r^2 K^4 F^2 / k^2}{2K^2(K^2 + 2F)} \right]. \quad (9)$$

于是, 得到相对于中性廓线的临界内弗雷德数 F_c :

$$F_c = \frac{K^2}{2} + \frac{r^2 K^2}{2U_s^2 k^2}. \quad (10)$$

设想一个波数为 k 的类波扰动置于基本流上, 基本流的上下层速度 U_s 取作如 $U_1 = -U_2$ 的反对称形式。于是, 由 (9) 式得到的相速 C 的实部就是零。因此, 发展的扰动不会传播, 其内弗雷德数 F 仅仅会在波数上稍微超过临界值, 即:

$$F = F_c + \Delta = \frac{K^2}{2} + \frac{r^2 K^2}{2U_s^2 k^2} + \Delta, \quad (11)$$

这里, $\Delta \ll 1$, 耗散作用仍然对决定临界平衡廓线起着重要作用。特别是当 $rK/kU_s \sim \Delta^{1/2}$ 时, 由 (9) 式可以得到:

$$kC_i = -\frac{3}{8}r \pm \frac{1}{2} \left[\frac{9}{16}r^2 + \Delta \frac{k^2 U_s^2}{K^2} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

可见, 当 Δ 逐渐大于零, kC_i 的一个根变成正值且量级为 $O(r)$, 因为 $rK/kU_s = \Delta^{1/2}$, (12) 式化为

$$kC_i = -\left(\frac{3}{8} \pm \frac{5}{8}\right)r. \quad (13)$$

从上式可见, kC_i 是 $O(r)$ 量级, 而且受扰动的波振幅一定会以 kC_i 指数速率增长。这样, 波振幅演变的一个时间尺度就可以得到, 即

$$T = \sigma t, \quad (14)$$

其中, σ 是 $O(r)$ 量级。于是, 用这个慢变时间尺度 T 作为一个新的时间变量可以很自然地描述波振幅的时间演变。

扰动流函数 $\phi_n(x, y, t)$ 相对于基本流, 具有 a_0 的特征振幅, 且决定于基本流垂直切变的超临界值 Δ 。这是因为当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 不仅 a_0 要变成零, 而且这个发展的扰动的位势涡度通量 [以 $O(a_0^2)$ 为量级] 也要变成零。这就要求特征振幅 $O(\Delta^{1/2})$ 有相同的量级。

于是, 该问题中的每个临界参数都可以根据耗散系数 r 排序, 即

$$\begin{cases} a_0 = O(r), \\ \Delta = O(r^2), \\ \sigma = O(r). \end{cases} \quad (15)$$

由 (15) 式可见, 粘性耗散 r 是一个关键因子, 并且一直保持足够小的值。

在绝大多数大气模式的研究中, 耗散是个相对小量。例如, 在耗散很小这一限制下的自由大气中, 超临界值很小 ($\Delta \ll 1$) 时, 中性廓线附近的边缘扰动会从平均流吸收能量维持其缓慢发展。但从另一方面看, 尽管 Δ 很小, 但 r 以 $O(\Delta^{1/2})$ 为量级, 则 r 就会远大于 Δ , 于是对边缘扰动而言, 耗散效应就相对重要起来。于是, 从平均流吸收的能量至少将会部分耗散掉, 导致边缘扰动缓慢发展。这一物理过程为后面研究平均流对发展的波振幅的反馈作用提供了可能性。更一般的情况是, 瞬变波对平均流的影响是通过涡动通量实现的。然而, 由于运动方程有二次非线性项, 以 $\exp(kC_i t)$ 速度发展的扰动会导致平均流以 $\exp(2kC_i t)$ 速率增长, 产生变化。另外, 在常规的扰动展开式中的第 n 次项都包含了以 $\exp(nkC_i t)$ 速率增长的项, 于是高阶扰动增长对平均流的影响随时间变化很快。

对于靠近初始临界值的边缘波, 才有可能用摄动方法来研究平均流变化对这种波的反馈效应, 因为当波扰动缓慢发展时, 仅可能引起平均流很小的变化。但是, 这一变化会显著影响扰动场的动力特性以及它从平均流吸收能量的能力。这反过来说明了非线性影响会成为有限振幅扰动发展的一个重要作用项。只要扰动的振幅在发展过程中能保持足够小, 小扰动法就可以适用。所以, 这一动力过程能很好地描述平均流对波的反馈作用, 而不是波扰动对纬向平均流的影响。

3 平均流对波反馈的 A-B 混合方程

Pedlosky^[6]在研究两层模式下 β 平面上的斜压不稳定问题时, 首次得到如下形式的 A-B 方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + C_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + C_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) A = \pm \alpha_1 A - \beta_1 AB, \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + C_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) B = \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + C_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) |A|^2. \quad (17)$$

一个有趣的现象是, 当 A 是实数时, 并令

$$A = (2\beta_1)^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + C_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi,$$

$$B = \pm \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) (1 - \cos \phi),$$

方程 (16) 和 (17) 便可以简化到 Sine-Gordon 方程形式, 即

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + C_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + C_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = \pm \alpha_1 \sin \phi. \quad (18)$$

后来, Gibbon 和 McGuinness^[23] 通过考虑仅含时间变化的 $A(T_1)$, 从数学上发展了这一结果。忽略了空间微分算子, 方程 (16) 和 (17) 则可进一步简化为

$$\frac{d^2 A}{dT_1^2} = \pm \alpha_1 A - \beta_1 AB, \quad (19)$$

$$\frac{dB}{dT_1} = \frac{d}{dT_1} (|A|^2). \quad (20)$$

这就是早期的简化 $A-B$ 方程模型。尽管数学家很难从物理上推导 $A-B$ 方程, 但得到的这一纯数学结果已非常重要了。为了推导出可以描述平均流对波振幅增长反馈效应的 $A-B$ 方程, 本节一方面沿用 Pedlosky^[22] 的渐近展开方法, 同时结合 Gao^[8] 给出的变换技术, 来推导可把平均流变化对波的反馈问题转换到洛仑兹系统中去讨论的 $A-B$ 混合方程。对于一个只包含耗散作用的简单的两层模式, 即方程 (3) 和 (4):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \psi_1 - F(\psi_1 - \psi_2)] = -\frac{r}{2} \nabla^2 \psi_1, \quad (21)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \psi_2 - F(\psi_2 - \psi_1)] = -\frac{r}{2} \nabla^2 \psi_2, \quad (22)$$

在超临界态下, 内弗雷德数 F 可以写成 (11) 式的形式。在波的不稳定区, 对于靠近中性曲线的边缘波进行摄动展开分析, 每一个参数都可以表示为 (15) 式所示的 $O(r)$ 量级的形式。根据第 2 节的分析, 把时间变量用多尺度表示以描述波振幅演变的慢过程, 即

$$T = \sigma, \quad (23)$$

这里, T 是一个新时间变量, σ 和 $O(r)$ 同一量级。于是, ϕ_n 可写作:

$$\phi_n = -U_n y + \phi_n(x, y, T). \quad (24)$$

对小值 r , 扰动场可以进行摄动展开:

$$\phi_n(x, y, T, r) = r(\phi_n^1 + r\phi_n^2 + r^2\phi_n^3 + \dots). \quad (25)$$

如果流体被限制在刚性边界区域 $y=0$ 和 $y=1$ 内,

那么边界上的经向速度就消失了。边界条件可写为

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (26)$$

当方程 (23)、(24) 和 (25) 被代入 (21) 和 (22) 式中, 就得到关于 γ 的不同幂次的一个系列近似方程。首先是一级近似问题, 即由 $O(r)$ 量级的各项组成的近似方程:

$$\frac{U_s}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla^2 \phi_n^1 + \frac{K^2}{2} (\phi_n^1 + \phi_{n-(1)^n}^1) \right] = 0. \quad (27)$$

该方程的解可以写为

$$\phi_n^1 = A_n^1(T) \frac{e^{ikx}}{2} \sin(m\pi y) + cc, \quad (28)$$

其中, $A_1^1 = A_2^1 = A$ 。

由包含 $O(r^2)$ 量级的项组成了如下的关于 ϕ_n^2 的非齐次二次近似方程:

$$\begin{aligned} \frac{U_s}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla^2 \phi_n^2 + \frac{K^2}{2} (\phi_n^2 + \phi_{n-(1)^n}^2) \right] = \\ -\frac{\sigma}{r} \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{r}{2\sigma} \right) \nabla^2 \phi_n^1 - J(\phi_n^1, \nabla^2 \phi_n^1). \end{aligned} \quad (29)$$

从 (28) 式可得:

$$\nabla^2 \phi_n^1 = -K^2 \phi_n^1,$$

即

$$J(\phi_n^1, \nabla^2 \phi_n^1) = 0. \quad (30)$$

于是, 在方程 (29) 中不再包含非线性强迫项。从方程 (29) 中可以得到如下形式的特殊解:

$$\phi_n^2 = A_n^2 \frac{e^{ikx}}{2} \sin(m\pi y) + cc. \quad (31)$$

把 (30) 和 (31) 式代入方程 (29) 中, 有

$$\begin{aligned} (-1)^n K^2 \frac{U_s}{8} ik (A_n^2 - A_{n-(1)^n}^2) = \\ \frac{\sigma}{r} \frac{K^2}{2} \left(\frac{dA}{dT} + \frac{r}{2\sigma} A \right). \end{aligned} \quad (32)$$

求解此方程, 得到关于 A_n^2 的解为

$$A_n^2 = A_1^2 - \frac{4i}{kU_s} \frac{\sigma}{r} \left(\frac{dA}{dT} + \frac{r}{2\sigma} A \right). \quad (33)$$

由于 A_1^2 可以取任何值, 这里简便起见取作零。于是, 得到的特殊解是

$$\phi_n^2 = 0, \quad (34)$$

$$\phi_n^2 = \frac{4i}{kU_s} \left(\frac{\sigma}{r} \right) \left(\frac{dA}{dT} + \frac{r}{2\sigma} A \right) \frac{e^{ikx}}{2} \sin(m\pi y) + cc. \quad (35)$$

方程 (29) 的齐次解可以通过积分如下的关于 x 的齐次方程得到, 即

$$\frac{U_s}{2} \left[\nabla^2 \phi_n^2 + \frac{K^2}{2} (\phi_n^2 + \phi_{n-(1)^n}^2) \right] = \Phi_n^2(y, T). \quad (36)$$

这样得到的齐次解一定是 $\Phi_n^2(y, T)$ 形式的解了。

为了表达清晰, 总的直到包括 $O(r^2)$ 量级的扰动流函数的全部解 ϕ_1 和 ϕ_2 可写为:

$$\phi_1 = rA \frac{e^{ikx}}{2} \sin(m\pi y) + cc + \Phi_1^2(y, T), \quad (37)$$

$$\phi_2 = rA \frac{e^{ikx}}{2} \sin(m\pi y) + cc + r^2 [Q_2^2(x, y, T) + \Phi_2^2(y, T)]. \quad (38)$$

这里,

$$Q_2^2 = -\frac{4i\sigma}{kU_s r} \left(\frac{dA}{dT} + \frac{r}{2\sigma} A \right) \frac{e^{ikx}}{2} \sin(m\pi y) + cc, \quad (39)$$

且有,

$$\nabla^2 Q_2^2 = -K^2 Q_2^2. \quad (40)$$

至此可见, 在 $O(r^2)$ 量级的方程中没有包含超临界值 Δ , 所以有必要寻找 $O(r^3)$ 量级的近似方程, 于是得到:

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \frac{U_s}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla^2 \phi_n^3 + \frac{K^2}{2} (\phi_n^3 + \phi_{n-(1)^n}^3) \right] = \\ -\frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial T} \left[\nabla^2 \phi_n^2 - \frac{K^2}{2} (\phi_n^2 - \phi_{n-(1)^n}^2) \right] + \\ (-1)^n \frac{U_s}{2} \frac{\delta}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_n^1 + \phi_{n-(1)^n}^1) - \nabla^2 \phi_n^2 - \\ J_1 \left[\phi_n^1, \nabla^2 \phi_n^2 + \frac{K^2}{2} (\phi_{n-(1)^n}^2 - \phi_n^2) \right] - \\ J_2 \left[\phi_n^2, \nabla^2 \phi_n^1 + \frac{K^2}{2} (\phi_{n-(1)^n}^1 - \phi_n^1) \right], \quad (41) \end{aligned}$$

其中, $\delta = \Delta + (r^2/2) U_s (K^2/k^2)$.

从 (28) 式, 可以直接得到 J_2 的简化形式为:

$$J_2 \left[\phi_n^2, \nabla^2 \phi_n^1 + \frac{K^2}{2} (\phi_{n-(1)^n}^1 - \phi_n^1) \right] = J_2 (\phi_n^2, \nabla^2 \phi_n^1), \quad (42)$$

J_1 可以写作:

$$\begin{aligned} J_1 = (-1)^{n-1} \frac{\sigma}{r} \frac{K^2}{2} \frac{m\pi}{U_s} \cdot \\ \left(\frac{d}{dT} |A|^2 + \frac{r}{\sigma} |A|^2 \right) \sin(m\pi y). \quad (43) \end{aligned}$$

通过对 x 积分计算和重新组合方程 (41) 中的各项, (41) 式可改写为:

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \frac{U_s}{2} \left[\nabla^2 \phi_n^3 + \frac{K^2}{2} (\phi_n^3 + \phi_{n-(1)^n}^3) \right] = -\frac{\sigma}{r} \cdot \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\partial^2 \Phi_n^2}{\partial y^2} - \frac{K^2}{2} (\Phi_n^2 - \Phi_{n-(1)^n}^2) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_n^2}{\partial y^2} + \right. \\ \left. (-1)^{n-1} \frac{\sigma}{r} \frac{K^2}{2} \frac{m\pi}{U_s} \left(\frac{d}{dT} |A|^2 + \frac{r}{\sigma} |A|^2 \right) \cdot \right. \\ \left. \sin(m\pi y) \right\} x - (-1)^{n-1} \frac{[(-1)^n + 2]}{2} \frac{\sigma}{r} \cdot \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_2^2}{\partial T} + (-1)^n ik \frac{U_s}{2} \frac{\delta}{r^2} A e^{ikx} \sin(m\pi y) -$$

$$\left[ik \frac{A}{2} e^{ikx} \sin(m\pi y) + cc \right].$$

$$\left[\frac{\partial^3 \Phi_n^2}{\partial y^3} + \frac{K^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_n^2 + \Phi_{n-(1)^n}^2) \right] +$$

$$\frac{K^2 [(-1)^n + 1]}{2} Q_2^2, \quad (44)$$

这里, $|A|^2 = AA^*$, A^* 是 A 的复共轭。因为方程 (44) 右端前三项都是与 x 无关的项, 如果它们的值不等于零, 那么它们将会对 $\phi^{(3)}$ 产生响应, 这个响应会在 x 方向线性增长。为了保持这里的展开形式合理, 则必有

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\partial^2 \phi_n^2}{\partial y^2} - \frac{K^2}{2} (\phi_n^2 - \phi_{n-(1)^n}^2) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_n^2}{\partial y^2} + \\ (-1)^{n-1} \frac{\sigma}{r} \frac{K^2}{2} \frac{m\pi}{U_s} \left(\frac{d}{dT} |A|^2 + \frac{r}{\sigma} |A|^2 \right) \cdot \\ \sin(m\pi y) = 0, \quad (45) \end{aligned}$$

或有

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\partial^2 \phi_n^2}{\partial y^2} - \frac{K^2}{2} (\phi_n^2 - \phi_{n-(1)^n}^2) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_n^2}{\partial y^2} = \\ (-1)^{n-1} \frac{\sigma}{r} \frac{K^2}{2} \frac{m\pi}{U_s} \left(\frac{d}{dT} |A|^2 + \frac{r}{\sigma} |A|^2 \right) \cdot \\ \sin(m\pi y), \quad (46) \end{aligned}$$

(46) 式左端项表示了由耗散产生的损失项对纬向平均的位势涡度变化率的订正^[22], 右端项则是瞬变波振幅及其时间变化项。

由于此问题在垂直方向上的反对称性, 且两层上经向环流要满足质量守恒定律。于是, 有

$$\phi_1^2 = -\phi_2^2 = M\phi(y, T), \quad (47)$$

其中, M 是一个待定常数。

这样, (46) 式可进一步写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - K^2 \phi \right] + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{K^2 m\pi}{2MU_s} \cdot \\ \left(\frac{d}{dT} |A|^2 + 2\gamma |A|^2 \right) \sin(m\pi y), \quad (48) \end{aligned}$$

这里, $\gamma = r/2\sigma$ 。

本文的目的在于, 通过讨论平均流对扰动的反馈机制以确定 $A(T)$ 及其随时间变化, 仅有方程 (48) 是不够的, 还需要找到另外一个表示 $\phi(y, T)$ 和 $A(T)$ 的关系式。从 (44) 式可见, 其右端项的一部分, 即该方程的齐次解, 与 $e^{ikx} \sin(m\pi y)$ 成比例。这个强迫项也将对 ϕ_n^3 产生反馈效应。把方程 (44) 两边同乘以 $(k/2\pi) e^{ikx} \sin(m\pi y)$, 再从 0 到 1

对 y 积分, 并使用边界条件以及分部积分法, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{U_s ik^3}{4} \int_0^1 (\phi_2^3 - \phi_1^3) \sin(m\pi y) dy &= (-1)^n \cdot \\ &\frac{(-1)^n + 2}{8} K^2 \frac{\sigma}{r} \frac{\partial G}{\partial T} + \frac{(-1)^n + 1}{16} K^2 G + \\ &(-1)^n \frac{ikU_s \delta}{4r^2} A + \frac{ik}{2} AM \int_0^1 \sin^2(m\pi y) \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} dy, \end{aligned} \quad (49)$$

其中,

$$G = -\frac{4i\sigma}{kU_s r^2} \left(\frac{dA}{dT} + \frac{r}{2\sigma} A \right).$$

由方程 (49) 可见, 当 $n=1$ 或 $n=2$ 时, 方程 (49) 左端项是相同的表达形式。这表明, 对于 $n=1$ 和 $n=2$ 的情况, 它们的右端项都必须一致, 即

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{3r}{4\sigma} \frac{dA}{dT} - \frac{k^2 U_s^2}{4K^2 \sigma} \left(\delta - \frac{r^2}{2U_s^2} \right) A = \\ -\frac{r^2 k^2 U_s M}{2K^2 \sigma^2} A \int_0^1 \sin^2(m\pi y) \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} dy. \end{aligned} \quad (50)$$

对方程 (50) 最后一项进行分部积分, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{3}{2} \gamma \frac{dA}{dT} - A + \\ \frac{r^2 k^2 U_s m \pi M}{2K^2 \sigma^2} A \int_0^1 \sin(2m\pi y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Pedlosky^[22] 为上述振幅方程的推导做出了重要贡献, 然而在得到波振幅方程后, 他把注意力集中在寻找求解 ϕ 的方法上, 目的是找出 ϕ , 再将 ϕ 代入波振幅方程得到 A 。尽管这是惯常的做法, 但不能完成从波振幅方程转换到洛仑兹系统, 再利用相空间来讨论波的稳定性。

为了完成这种转换, 这里采取如下步骤^[8]。令

$$B = \int_0^1 \sin(2m\pi y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy, \quad (52)$$

则方程 (51) 可写作:

$$\frac{d^2 A}{dT^2} + \frac{3}{2} \gamma \frac{dA}{dT} - A + \frac{r^2 k^2 U_s m \pi M}{2K^2 \sigma^2} AB = 0. \quad (53)$$

为了确定 M , 必须要回到方程 (48) 中, 对 (49) 式两边同乘 $\sin(m\pi y)$, 再对 y 从 0 到 1 积分, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{\gamma}{1 + K^2/4m^2\pi^2} B = \\ \frac{K^2 m \pi}{4(1 + K^2/4m^2\pi^2) U_s M} \left(\frac{d}{dT} + 2\gamma \right) |A|^2. \end{aligned} \quad (54)$$

于是, 为了方便取

$$M = \frac{K^2 m \pi}{4(1 + K^2/4m^2\pi^2) U_s},$$

保证方程 (54) 两边对 T 的导数项有相同阶数。最后, 方程 (54) 化为:

$$\frac{\partial B}{\partial T} + \Gamma B = \left(\frac{d}{dT} + 2\gamma \right) |A|^2, \quad (55)$$

其中, $\Gamma = \gamma/(1 + K^2/4m^2\pi^2)$ 。

方程 (53) 中的非线性项也应该与线性项有相同的阶数, 则对 σ 和 r 应当有

$$\begin{aligned} r &= \frac{k}{K} \left(\frac{m\pi U_s}{2} \Delta \right)^{1/2}, \\ \sigma &= m\pi K \left[\frac{\Delta}{(4m^2\pi^2 + K^2) U_s} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

这样, 方程 (53) 就可以简化为:

$$\frac{d^2 A}{dT^2} + \frac{3}{2} \gamma \frac{dA}{dT} - A + AB = 0. \quad (56)$$

方程 (55) 和 (56) 就构成了一对 $A-B$ 混合方程, 其中 B 代表了有波作用激发的平均流订正, A 是扰动发展的振幅。

4 平均流对波反馈的稳定性分析

为了进一步探讨稳定性问题, 下面先把 $A-B$ 混合方程 (55) 和 (56) 转换到洛仑兹系统中, 然后讨论增长的扰动振幅的稳定性问题。出于这一目的, 做如下变换:

$$\tau = \Omega T, \quad (57)$$

$$X = \sqrt{2} \Omega^{-1} A, \quad (58)$$

$$Y = \frac{1}{\gamma} \Omega X + X, \quad (59)$$

$$Z = \frac{1}{\gamma} \Omega^{-1} B. \quad (60)$$

这里, Ω 是一个待定参数, \dot{X} 代表 X 关于 τ 的导数。借助上面的变换, 方程 (56) 可以改写为:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{X}}{d\tau} + \frac{3}{2} \gamma \Omega^{-1} \dot{X} = \Omega^{-2} X - \gamma \Omega^{-1} XZ, \end{aligned} \quad (61)$$

式中, 取 $\Omega = \gamma/2$, $\gamma_1 = 1 + 2/\gamma^2$ 。

对式 (59) 关于 τ 求导, 然后代入方程 (61), 得到:

$$\dot{Y} = -XZ + \gamma_1 X - Y. \quad (62)$$

利用 (57)~(60) 式, 方程 (55) 可写为:

$$\dot{Z} = -b_1 Z + \frac{1}{2} (X^* Y + XY^*), \quad (63)$$

这里, $b_1 = 2/(1 + K^2/4m^2\pi^2)$, X^* 和 Y^* 分别是 X 和 Y 的共轭。方程 (59)、(62) 和 (63) 构成了一个复洛仑兹系统, 即

$$\dot{X} = -\sigma_1 X + \sigma_1 Y, \quad (64)$$

$$\dot{Y} = -XZ + \gamma_1 X - Y, \quad (65)$$

$$\dot{Z} = -b_1 Z + \frac{1}{2}(X^* Y + XY^*), \quad (66)$$

式中, $\sigma_1 = 2$ 。

把 A-B 混合方程转到洛仑兹系统中的重要性不仅是可以在相空间里分析稳定性, 更重要的是在方程 (65) 中清楚地表现了平均流对扰动振幅的反馈作用。

为了使问题尽可能简单, 还需要考查何种情况下波振幅 A 取正值。于是, 增长的扰动振幅 A 的特性还需在相空间加以研究。为了研究实振幅 A 的情况, 在不失一般性的基础上, 考察特殊点 $\dot{X} = 0$ 。从方程 (59) 可得:

$$X = Y, \quad (67)$$

把 (67) 式代入 (62) 式, (62) 式变成

$$Z = \gamma_1 - 1. \quad (68)$$

从 (68) 式可见, $\dot{Z} = 0$ 。

再把 (67) 和 (68) 式代入 (66) 式, 得到:

$$|X|^2 = b_1(\gamma_1 - 1), \quad (69)$$

其中,

$$b_1(\gamma_1 - 1) = \frac{32m^2\pi^2 K^2 \Delta}{(4m^2\pi^2 + K^2)^2 U_s r^2}. \quad (70)$$

只要 $\Delta > 0$, 从 (69) 式可以得到:

$$X = \pm [b_1(\gamma_1 - 1)]^{1/2}. \quad (71)$$

因此, X 是一个实数。实际上这个问题里, Δ 一定取正值, 即在这个研究问题中实振幅 A 的条件一直能满足。这样上面讨论的复洛仑兹系统可以被约化为实洛仑兹系统 (特别是在平衡点附近), 即

$$\dot{X} = -\sigma_1 X + \sigma_1 Y, \quad (72)$$

$$\dot{Y} = -XZ + \gamma_1 X - Y, \quad (73)$$

$$\dot{Z} = -b_1 Z + XY. \quad (74)$$

方程 (72) ~ (74) 就是标准的洛仑兹系统。 σ_1 和 γ_1 分别对应着原始的洛仑兹方程中的普朗特数和雷诺数, 但它们有了不同的物理意义。实际上, 方程 (73) 可以回到原始方程的形式:

$$\frac{d^2 A}{dT^2} + \frac{3\gamma}{2} \frac{dA}{dT} + \frac{\gamma}{2}(B-1)A = 0. \quad (75)$$

从方程 (75) 发现, 波振幅 A 随时间的变化完全依赖于参数 γ 和平均流订正 B。该方程本质上说是一个非线性方程, 因为 B 决定于 T 和 A, 但决定程度明显小于 A 对 B 和 T 的依赖, 所以这里仍可以把

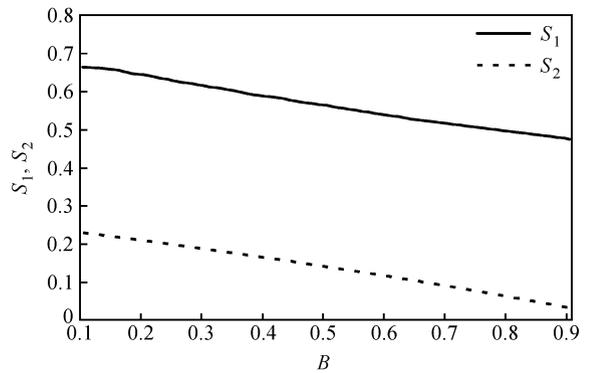


图 1 S_1 和 S_2 曲线的比较图

Fig. 1 Comparison between S_1 and S_2 curves

小时间间隔里的 B 视作定值, 于是方程 (75) 经过线性化便得到了关于 A 的增长指数 $S_2 [A = \exp(S_2 t)]$ 的方程:

$$S_2^2 + \frac{3\gamma}{2} S_2 + \frac{\gamma}{2}(B-1) = 0. \quad (76)$$

从而得到指数 S_2 的解:

$$S_2 = \frac{-\frac{3\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3\gamma}{2}\right)^2 - 2(B-1)\gamma}}{2}. \quad (77)$$

当 $B < 1$ 时, 该指数为实数, 并且根据增长扰动的物理意义推断 S_2 取正值。若取 $\gamma = 0.5$, 并且令 B 的值在 0.1 到 0.9 之间变化, 就可以得到如图 1 虚线所示的 A 的增长指数 S_2 与 B 的变化关系。由图 1 可见, 当 B 增加时, S_2 减少, 即平均流订正抑制了扰动振幅的增长, 所以振幅 A 随时间一直呈现缓慢变化趋势。尽管这只是对平均流反馈效应的一个很粗略的估计, 但它还是表明了 B 变大时他是如何约束扰动振幅增长的。

5 结论和讨论

仅仅从方程 (55) 和 (56) 的形式上看, 由于方程 (55) 中包含了 B 对 T 的导数项, 所以不足以说明它们能描述平均流对增长的扰动振幅的反馈作用。为了清楚地显示出这一反馈效应, 采取了下面一些处理。从方程 (56) 可以得到:

$$\frac{d^3 A}{dT^3} + \frac{3}{2}\gamma \frac{d^2 A}{dT^2} - \frac{dA}{dT} + B \frac{dA}{dT} + A \frac{dB}{dT} = 0. \quad (78)$$

再把方程 (55) 代入方程 (78) 中, 便得到

$$\frac{d^3 A}{dT^3} + \frac{3}{2}\gamma \frac{d^2 A}{dT^2} + (B-1) \frac{dA}{dT} +$$

$$A \left[\left(\frac{d}{dT} + 2\gamma \right) |A|^2 - \Gamma B \right] = 0, \quad (79)$$

或

$$\frac{d^3 A}{dT^3} + \frac{3}{2} \gamma \frac{d^2 A}{dT^2} + (B-1) \frac{dA}{dT} - \Gamma AB + \left(\frac{d}{dT} + 2\gamma \right) A |A|^2 = 0. \quad (80)$$

从方程 (80) 可以清楚地看到, 增长的扰动振幅 A 随时间 T 的变化主要有平均纬向基本流 B 和耗散作用 γ 决定, 因此可以清楚地看到平均流变化对波的作用。但方程 (80) 是一个非线性方程, 直接求其解析解可能会遇到困难, 求解需要特殊的处理方法。这里先对方程作线性化, 讨论平均流对增长的扰动振幅的反馈作用。在第 2 节已经知道, 发展的扰动振幅为 $O(r)$ 的量级。从物理意义上看, 该扰动振幅应该是正实数。这意味着 $A|A|^2$ 等于 A^3 , 于是其量级是 $O(r^3)$ 。如果增长的波振幅 A 随时间是缓慢增加的, 通过比较方程 (80) 各项可以发现: 由于 B 被看作是一个与增长扰动振幅 A 相当大小的值, 那么包含 $A|A|^2$ 的项至少比其他项小一个量级。于是在此条件限制下, 包含 $A|A|^2$ 的项可以忽略。对发展的扰动振幅而言, 方程 (80) 可线性化为:

$$\frac{d^3 A}{dT^3} + \frac{3}{2} \gamma \frac{d^2 A}{dT^2} + (B-1) \frac{dA}{dT} - \Gamma AB = 0. \quad (81)$$

这里, B 实际上是 T 的函数, 但 B 随时间 T 的变化比 A 随 T 的变化要慢。如果我们把每段 ΔT 间隔里的 B 视作不变量, 那么方程 (81) 可采用如下方法求解。

令 $A = \exp(S_1 T)$, 把它代入方程 (81) 中, 得到

$$S_1^3 + \frac{3}{2} \gamma S_1^2 + (B-1) S_1 - \Gamma B = 0. \quad (82)$$

方程 (82) 是关于 T 的三次方程形式, 所以形式上不及方程 (76) 简单。既然 γ 已经给定, 取 $\Gamma = 0.25$, 也可以作出一条类似于指数 S_2 与 B 的变化关系的曲线, 图 1 中的实线便反映了 S_1 和 B 的变化关系。尽管这只是对平均流反馈效应的一个很粗略的估计, 但它还是表明了 B 变大是约束扰动振幅增长的。

比较图 1 中的两条曲线不难发现, 表征扰动振幅增长的指数 S_1 和 S_2 都随着 B 的增大而减小, 而

且二者变化趋势近乎平行。这表明, B 对 A 的影响无论是在方程 (76), 还是在其简化形式的方程 (81) 中, 得到的结果是一样的。然而从方程 (76) 中得到指数 S_2 要更容易些, 这也是上一节把 $A-B$ 混合方程转换到洛仑兹系统中去的一个原因。

波流相互作用是大气中最常见的现象之一。波对流的作用, 主要表现在波通过其动量通量和热量通量的辐散辐合引起平均流的加速或减速; 而流对波的作用, 主要表现在平均流加速后会引发基本流的超临界现象, 从而造成非线性超临界不稳定, 使得波域中中性廓线附近的边缘波得以发展。波对流的作用主要可用 E-P 通量理论来诊断, 而流对波的作用主要通过 $A-B$ 混合方程理论来体现。在日常天气变化当中, 预报业务人员经常感知到高高空出现急流或局地风速突然出现加强时, 就意味着对流天气或暴雨天气的来临。这实质上就是当基本流发生变化时会引起局地扰动 (波动) 的不稳定发展。从这个意义上讲, 研究流对波作用的 $A-B$ 混合方程理论在天气预报中有着重要的应用前景, 值得在该方面深入研究, 并把理论分析用于天气预报实际。

参考文献 (References)

- [1] Andresws D G, McIntyre M E. Planetary waves and vertical shear: The generalized Eliassen-Palm relation and the mean zonal acceleration. *J. Atmos. Sci.*, 1976, **33**: 2031~2048
- [2] Andresws D G, McIntyre M E. An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian-mean flow. *J. Fluid. Mech.*, 1978, **89**: 609~646
- [3] Edmon H J, Hoskins B J, McIntyre M E. Eliassen-Palm cross sections for the troposphere. *J. Atmos. Sci.*, 1980, **37**: 2600~2615
- [4] Andresws D G. A finite-amplitude Eliassen-Palm theorem in isentropic coordinates. *J. Atmos. Sci.*, 1983, **40**: 1877~1883
- [5] 黄荣辉, 岸保勘三郎. 关于冬季北半球定常行星波传播另一波导的研究. 中国科学(B), 1983, **10**: 940~950
Huang Ronghui, Gambo. The study about another waveguide of stationary planetary wave propagation in the Northern Hemisphere winter. *Science in China (Series B)* (in Chinese), 1983, **10**: 940~950
- [6] Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. 2nd ed. Springer-Verlag, 1987. 593~601
- [7] Gao Shouting, Tao S Y, Ding Y H. The generalized E-P flux of wave-mean flow interactions. *Science in China (Series B)*,

- 1990, **33**: 704~715
- [8] Gao Shouting. A-B hybrid equation method of nonlinear bifurcation in wave-flow interaction. *Adv. Atmos. Sci.*, 1991, **8**: 165~174
- [9] Ren S. Finite-amplitude wave-activity invariants and nonlinear stability theorems for shallow water semigeostrophic dynamics. *J. Atmos. Sci.*, 2000, **57**: 3388~3397
- [10] Gao Shouting, Ran Lingkun. On the parameterization scheme of gravity wave drag effect on the mean zonal flow of mesosphere. *Chinese Science Bulletin*, 2003, **48** (10): 1020~1023
- [11] 高守亭, 冉令坤. 重力波上传破碎对中层纬向平均流拖曳的参数化方案. *科学通报*, 2003, **48** (7): 726~729
Gao S T, Ran L K. The parameterized scheme of the drag effect of up-going gravity wave breaking on the zonal mean flow in the middle atmosphere. *Chinese Science Bulletin* (in Chinese), 2003, **48** (7): 726~729
- [12] Ran Lingkun, Gao Shouting. Ageostrophic theory of zonal flow acceleration and wave-activity conservation law. *Acta Meteorological Sinica.*, 2004, **18** (1): 87~94
- [13] 冉令坤, 高守亭, 雷霆. 高空急流区内纬向基本气流加速与 EP 通量的关系. *大气科学*, 2005, **29**: 409~416
Ran L K, Gao S T, Lei T. Relation between acceleration of basic zonal flow and EP flux in the upper-level jet stream region. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2005, **29**: 409~416
- [14] Ran L K, Gao S T. A three-dimensional wave-activity relation for pseudomomentum. *J. Atmos. Sci.*, 2007, **64**: 2126~2134
- [15] Whitham G B. A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. *J. Fluid. Mech.*, 1965, **22**: 273~283
- [16] Whitham G B. Two-timing, variational principles and waves. *J. Fluid. Mech.*, 1970, **44**: 373~395
- [17] Elissen A, Palm E. On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geophys. Publ.*, 1961, **22**: 1~23
- [18] Charney J G, Drazin P G. Propagation of planetary-scale disturbances from the lower into the upper atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1961, **66**: 83~109
- [19] Grimshaw R. Wave action and wave-mean flow interaction, with application to stratified shear flows. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 1984, **16**: 11~44
- [20] Wu Guoxiong, Chen Biao. Non-acceleration theorem in a primitive equation system: I. Acceleration of zonal mean flow. *Adv. Atmos. Sci.*, 1989, **6**: 1~20
- [21] 高守亭, 陶诗言. 高空急流加速与低层锋生. *大气科学*, 1991, **15**: 11~21
Gao Shouting, Tao Shiyan. Acceleration of high level jet-stream and frontogenesis in lower level. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (Scientia Atmospherica Sinica)* (in Chinese), 1991, **15**: 11~21
- [22] Pedlosky J. Finite-amplitude baroclinic wave packets. *J. Atmos. Sci.*, 1972, **29**: 680~686
- [23] Gibbon J D, McGuinness M J. The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers. *Physica* 5D, 1982, 108~122
- [24] Gibbon J D, McGuinness M J. Amplitude equations at the critical points of unstable dispersive physical systems. *Proc. Roy. Soc. London (Series A)*, 1981, **377**: 185~219