

李江浩, 彭新东. 2013. 阴阳网格上质量守恒计算性能分析 [J]. 大气科学, 37 (4): 852–862, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2012.12060. Li Jianghao, Peng Xindong. 2013. Analysis of computational performance of conservative constraint on the Yin-Yang grid [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 37 (4): 852–862.

阴阳网格上质量守恒计算性能分析

李江浩 彭新东

中国气象科学研究院灾害天气国家重点实验室, 北京 100081

摘 要 质量守恒数值计算是球面准均匀阴阳网格构造全球大气环流模式的重要条件, 也是提高阴阳网格应用质量的重要技术手段。本文针对通量形式平流方程, 在球面坐标上采用多种理想数值试验对阴阳网格上的三种守恒计算方案和边界插值非守恒计算方案进行了比较检验。发现, 质量守恒方案不仅对全球数值积分重要, 还影响数值计算精度, 满足局地守恒条件的全球强迫守恒方法可以获得较高的精度; 网格内质量均匀分布的阴阳网格边界通量一致性守恒强迫计算方案, 实现了在不增加计算误差条件下保证局地和全球守恒的目的, 且具有很小的计算负担, 可以作为阴阳网格上全球质量强迫守恒的有效计算方案; 而网格质量的线性分布可以有效提高阴阳网格的数值积分计算精度, 但在一定程度上会增加计算负担。

关键词 阴阳网格 质量守恒 数值稳定性 计算精度

文章编号 1006-9895(2013)04-0852-11

中图分类号 P435

文献标识码 A

doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2012.12060

Analysis of Computational Performance of Conservative Constraint on the Yin-Yang Grid

LI Jianghao and PENG Xindong

State Key Laboratory of Severe Weather, Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081

Abstract Mass conservation is an important factor in the construction of the general circulation model on the quasi-uniform overset spherical Yin-Yang grid, and is also a key issue when applying the Yin-Yang grid to numerical models. With the help of a flux-form advection equation, we carried out a series of idealized numerical tests on a sphere to assess three conservative constraints in addition to the non-conservative boundary interpolation scheme. The test cases included a standard solid-body advection, a benchmark deformational flow, and a sine-wave advection. The results showed that the conservative constraint of mass property is important for global numerical integration and has an effect on the computational accuracy. The global conservative constraint that ensures local mass conservation gave accurate results. The boundary flux identification based on cell-wise mass constant distribution on the Yin-Yang grid achieved local and global mass conservation without either decreasing the computational accuracy or increasing computing costs. This algorithm is computationally efficient and can be an effective numerical scheme for mass conservative constraints on the overset Yin-Yang grid. However, while the boundary flux identification based on cell-wise linear distribution can improve the computational accuracy, it requires much more calculation time, which will limit its application in a dynamical model.

Keywords Yin-Yang grid, Mass conservation, Numerical instability, Computational accuracy

收稿日期 2012-04-12, 2012-09-27 收修定稿

资助项目 国家自然科学基金面上项目 41175095、40875065, 十二五科技支撑项目 2012BAC22B01

作者简介 李江浩, 男, 1988 年出生, 硕士研究生, 主要从事大气数值模式与模拟研究。E-mail: jhaoli@163.com

通讯作者 彭新东, E-mail: pengxd@cma.cma.gov.cn

1 引言

传统经纬度坐标采用了具有正交性的经纬线刻度从而可以方便地描述球面上各点的位置和矢量方向,但是由于极点的奇异性问题和经线在高纬度不断靠近的缺点,极点矢量的无法表达和极区网格距的减小严重限制数值积分时间步长的选取,成为数值模式提高计算准确度与计算效率的一大障碍。随着近几年高分辨率数值预报模式的发展,在格点模式中极点奇异性问题和网格距悬殊的问题变得尤为突出,因为网格距的南北差异随着模式分辨率的提高而放大,严重限制了模式的积分时间步长,并造成了计算时间的浪费。这种悬殊的格距也显示出模式动力本质性的新问题:在近赤道地区描述“宏观尺度”运动,而在极区描述“微观尺度”运动,动力过程和物理属性有了本质的差异。经线在高纬地区的辐合问题可以通过数学方法(如谱方法)加以缓解,而极点奇异性问题很难通过数学方式来解决,只有通过选择准均匀的网格系统来克服。通过均匀网格来改进模式的多尺度模拟能力和负载均衡能力是一个很好的选择(Zerroukat and Allen, 2012), Washington et al. (2009)对极点问题的各种处理方法给出了总结和评论,并指出对于模拟地球气候系统寻求更均匀球面网格系统是未来解决极点问题的重要途径。Williamson (2007)对球面准均匀网格做了详尽的分析和总结,球面准均匀网格主要包括 Sadourny (1972)最早提出的“立方球网格(Cubed grid)”,Kurihara (1965)总结的“精简网格(reduced grid)”或“Kurihara 网格”以及 Sadourny (1968)和 Williamson (1968)最早提出的“正二十面体网格”等,当然这些网格均比常规经纬度网格要复杂。Kageyama and Sato (2004)提出了一种准均匀无奇异重合网格系统——“阴阳网格(Yin-Yang grid),其利用两个完全相同的低纬球面经纬度网格扣合而成,避免了奇异点的存在,并且网格本身的准均匀性质有利于全球高分辨率数值模拟。

由于阴阳网格是一个正交的重叠网格,如其他重叠网格一样,需要解决两个方面的问题,首先是构建网格重合部分的数据通信,其次是保证守恒量(总质量、总动量、总能量、总拟能等)的全球守恒性,其中后者比前者更艰巨、更具有挑战性,满足这些物理守恒的计算格式有助于克服数值计算不稳定和保持长时间数值计算(纪立人等, 2005; 穆

穆等, 2003),而这正是大气环流模式所要求的必要条件;而对于水汽输送和化学物质的输送,保证单调性和正定性的数值解也是非常必要的(Nair et al., 2005; Peng et al., 2005)。阴阳网格的应用主要集中在大气动力框架设计方面,如 Li et al. (2006)在不考虑全球守恒的情况下,利用三次拉格朗日插值方法处理阴阳网格边界数据交换,在阴阳网格上进行了半拉格朗日平流计算, Li et al. (2008)利用多离散矩有限体积方法在阴阳网格上进行了浅水波方程试验, Baba et al. (2010)在阴阳网格上首次发展了三维大气环流模式动力框架并验证了二维浅水波方程在阴阳网格上应用的一系列理想试验, Qaddouri (2011)在阴阳网格上进行了非线性浅水波方程试验, Qaddouri and Lee. (2011)还介绍了加拿大全球静力模式在阴阳网格系统上的发展。对于这些理想数值试验或短期积分试验,并没有考虑阴阳网格的质量守恒问题,而大气质量误差会对其他物理场产生严重影响(陈嘉滨和高学杰, 2000),导致计算不稳定。Peng et al. (2006)提出了基于网格质量均匀分布重构的完全质量守恒算法首先实现了球面阴阳网格的局地 and 全球质量守恒,并用 CIP-CSLR (Xiao et al., 2002)半拉格朗日平流方案在全球计算中得到了验证。该方案采用的是单元网格质量均匀分布,因此在网格边界上的质量守恒只有一阶精度。针对这样的缺点,我们重构了单元网格内质量的线性分布以至曲线分布,改进阴阳网格上的质量守恒强迫算法,本文主要以 CIP-CSLR 通量型半拉格朗日平流算法和我们开发的单元网格质量均匀和线性分布强迫守恒方案为主要手段,评估阴阳网格上质量守恒算法的计算效率和计算精度。

2 阴阳网格简介

阴阳网格(Kageyama and Sato, 2004)是一种球面上的重合网格,它由两个相同的经纬度坐标系网格组成(图1),每个网格区域(阴或阳网格)选取球面的低纬部分,选取范围一般是 $\pi/4 - \delta \leq \lambda \leq 7\pi/4 + \delta$, $-\pi/4 - \delta \leq \varphi \leq \pi/4 + \delta$,其中 λ , φ 分别表示经度和纬度。要保证两个分量网格相互重叠,分量网格边界至少要扩展一个网格距,扩展大小取决于网格分辨率,比如 $\delta \equiv \Delta\lambda \equiv \Delta\varphi$,并且出于简便一般在两个方向扩展相同的范围大小,一个分量网格经过旋转成为另一个分量网格,两者扣合覆盖全球,重叠部分面积约占整个球面面积的6%。

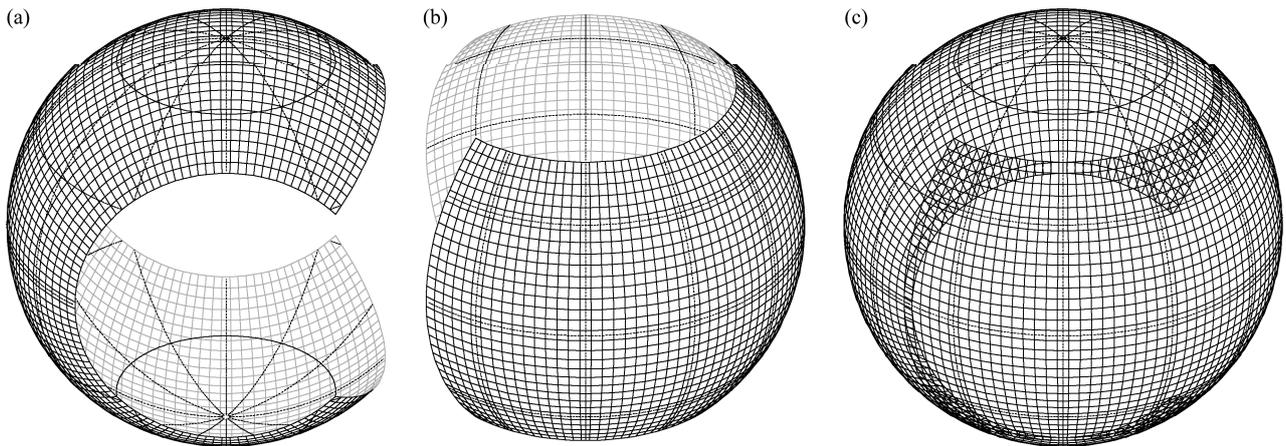


图1 (a) Yin 网格; (b) Yang 网格; (c) Yin-Yang 重叠网格

Fig. 1 (a) Yin zone, (b) Yang zone, and (c) composite Yin-Yang grid

关于阴阳网格的特点在 Kageyama and Sato (2004)、Peng et al. (2006)、Baba et al. (2010)、Staniforth and Thuburn (2012) 和 Zerroukat and Allen (2012) 中都有相关介绍, 包括网格正交性、无奇异点、准均匀、易于区域分割和并行运算及其坐标转换等。当然, 任何一个网格都不是完美无缺的, 阴阳网格就存在分量网格之间交叠和内部边界等不足, 不仅影响数值计算精度, 而且守恒处理也比较困难, 大气模式守恒量包括质量、能量、动量等, 质量守恒是模式设计所首要考虑的, 这也是本文所要讨论的关键问题。

3 阴阳网格平流计算和守恒强迫

3.1 阴阳网格通量型平流计算

在全球大气数值模拟中平流输送过程是一种重要的动力过程, 所以平流方案的设计尤为关键。现在大家普遍认为一个好的平流方案应该至少具有以下几个基本性质: 1) 守恒性; 2) 精度高, 数值耗散小; 3) 正定性, 没有明显的虚假振荡; 4) 频散误差小, 相速度计算精确; 5) 可以保持平流量的形状或空间分布; 6) 计算效率比较高, 但是, 很难有一个平流方案可以在所有这些方面表现得非常完美 (Xiao et al., 2002)。通量形式的平流方程可以很好地保证平流物理量的守恒性, 从而较好地保持数值模式计算的稳定性, 经向和纬向坐标分别用 λ 和 φ 表示, 对于任一标量 q (如水汽), 在球面上通量形式的平流方程 (无源汇项) 为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \lambda}(\tilde{u}q) + \frac{\partial}{\partial \mu}(\tilde{v}q) + \frac{\partial}{\partial z}(wq) = 0, \quad (1)$$

其中, $\mu = \sin \varphi$, $\tilde{u} = u \cos \varphi / a(1 - \mu^2)$, $\tilde{v} = v \cos \varphi / a$,

u, v, w 分别表示风的三个纬向、经向和垂直方向分量, a 表示地球半径。

我们使用 CIP-CSLR (Conservative Semi-Lagrangian with Rational function) 物质平流算法 (Xiao et al., 2002), 它是基于 CIP (Constrained Interpolation Profiles) 发展的一种保证物理场精确守恒的半拉格朗日方法。不同于传统上不考虑导数计算的半拉格朗日方法, 它通过考虑格点一阶导数或积分值构建 Hermit 插值多项式, 形成一种紧致插值函数的平流计算, 只用一个网格单元格上的多种变量矩构造高阶插值有理函数, 有利于大规模并行计算。在求解单元界面值时, 它采用上游点处拟合出的多项式高阶曲线的值来替换, 这类似于半拉格朗日后向追踪方法; 而在计算网格单元积分平均值时, 采用通量守恒形式的方程进行更新, 保证网格积分平均值完全守恒。CIP-CSLR 方案利用了有理函数的正定性, 具有高精度、正定、保形、守恒等性质, 频散、耗散误差很小, 而且不依赖人工限制条件, 适合于长期气候模拟和化学物质输送模拟。Peng et al. (2005) 通过试验证明 CIP-CSLR 平流算法应用于阴阳网格上相对于常规经纬度网格上取得的平流精度更高。

正如其他交叠网格系统一样, 在交叠区域需要插值法 [如 Li et al. (2006) 所采用的拉格朗日插值] 进行阴和阳网格区之间的数据交换, 每一个分量网格中处于交叠区域的格点分为边界网格点和内部网格点, 边界网格点上的数值通过另一个分量网格上的内部网格点上数值插值得到。由于线性插值方法比较简便而且能够保证边界数值单调性, 而高阶插值方法容易在大梯度区域或不连续区域引起数

值振荡，所以本文采用双线性插值方法，这种方法已在 Peng et al. (2006) 中介绍。

3.2 阴阳网格守恒强迫方法简介

阴阳网格由两个相同网格区交错扣合而成，当平流量在单个网格区内平流时，由于 CIP-CSLR 平流算法本身具有守恒性，可以保证局地质量守恒，然而当平流量穿越网格区边界时，会发生质量变化和计算误差增大，因此如何重构边界处的质量守恒显得非常重要，也是十分必要的。所以在平流输送过程中，考虑阴阳网格上的全球质量守恒我们采用三种计算方法：第一种是人为限制每一积分时间步上的质量总体变化为零（manual mass-variation vanish，缩写为 MV），这种方法在每一时间步上将总质量与初始总质量的差值平均分配到每一个网格内，从而修正各个网格内的质量使得总质量不发生改变，这种方法属于一种人为的限制条件；第二种和第三种较为客观，即强迫阴阳网格边界通量收支平衡，进而修正边界网格上的通量，差别在于前者计算边界通量时假定网格内质量均匀分布（piecewise mass constant distribution，缩写为 MC），与时间层次无关，所以计算量相对较小；而后者在边界通量计算时考虑网格内质量呈双线性分布（piecewise mass linear distribution，缩写为 ML），需要每个时次上重构质量计算，所以在可能提高计算精度的同时也会导致计算量增加。下面我们通过数值理想试验对这三种守恒方案进行评估，并且为了便于比较我们还给出没有守恒强迫（仅对阴阳网格边界进行插值，non-conservative interpolation，缩写为 NC）条件下的数值理想试验结果。

4 数值理想试验

本文采用球面浅水方程最为广泛使用的刚体旋转试验和变形流试验，对非守恒方案和三种守恒方案进行计算结果分析与评估。球面刚体旋转试验是 Williamson et al. (1992) 提出的一组全球浅水模式的标准测试试验之一，变形流试验是一种相对刚体平流更为严格的试验，其考虑一个球面旋转变形的涡流随着时间变化使流体发生变形而产生很大的空间梯度，观察涡流的演变情况、评估数值方案的描述能力。因为影响计算误差主要在于阴阳网格的重合部分，所以我们将注意力关注在阴阳网格重合部分。

根据 Williamson et al. (1992) 的定义，平流量的全球积分公式为

$$I(q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\pi/4}^{7\pi/4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} q_{\text{yin}}(\lambda, \varphi) \cos \varphi d\lambda d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_{\pi/4}^{7\pi/4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} q_{\text{yang}}(\lambda, \varphi) \cos \varphi d\lambda d\varphi - I_0, \quad (2)$$

其中

$$I_0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{overset}} q_{\text{yin}}(\lambda, \varphi) \cos \varphi d\lambda d\varphi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{overset}} q_{\text{yang}}(\lambda, \varphi) \cos \varphi d\lambda d\varphi \quad (3)$$

是重叠部分积分值，归一化误差公式有

$$L_1(q) = \frac{I[q(\lambda, \varphi) - q_T(\lambda, \varphi)]}{I[q_T(\lambda, \varphi)]}, \quad (4)$$

$$L_2(q) = \frac{\{I[q(\lambda, \varphi) - q_T(\lambda, \varphi)]^2\}^{1/2}}{\{I[q_T(\lambda, \varphi)]^2\}^{1/2}}, \quad (5)$$

$$L_{\text{inf}}(q) = \frac{\max \left[\begin{array}{l} |q_{\text{yin}}(\lambda, \varphi) - q_{\text{yin},T}(\lambda, \varphi)|, \\ |q_{\text{yang}}(\lambda, \varphi) - q_{\text{yang},T}(\lambda, \varphi)| \end{array} \right]}{\max \left[|q_{\text{yin},T}(\lambda, \varphi)|, |q_{\text{yang},T}(\lambda, \varphi)| \right]}, \quad (6)$$

其中 $q_{\text{yin},T}(\lambda, \varphi)$ 和 $q_{\text{yang},T}(\lambda, \varphi)$ 是阴阳网格平流量真值解。

4.1 刚体平流试验

Williamson et al. (1992) 提出一种在无辐散风场中二维刚体“余弦钟”平流试验，由于采用无辐散风场，平流过程中“余弦钟”应保持不形变。这个试验经常被用来测试全球平流计算方案。标量的初始分布为

$$q(\lambda, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi r / R)], & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases} \quad (7)$$

这里 $r = a \cdot \cos^{-1} [\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)]$ 表示 (λ, φ) 与“余弦钟”中心 (λ_0, φ_0) 的大圆距离，“余弦钟”中心初始位于 $\lambda_0 = \pi/2, \varphi_0 = 0$ （赤道上）， $R = a/3$ ， a 是地球半径。定常无辐散风场为

$$\begin{cases} u = u_0 (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \cos \lambda \sin \alpha), \\ v = -u_0 \sin \lambda \sin \varphi, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $u_0 = 2\pi a / (12d)$ ，即“余弦钟”平流 12 天可绕地球大圆旋转一圈， α 为旋转轴与球坐标系极轴的夹角，用以调整旋转方向， $\alpha = 0^\circ$ 表示沿赤道平面旋转， $\alpha = 90^\circ$ 表示跨越极点旋转。本文试验选择 $\alpha = 90^\circ$ 和 $\alpha = 45^\circ$ ，以让余弦钟尽可能多次通过阴阳网格重合部分。

本试验选择分辨率为 $1.125^\circ \times 1.125^\circ$ （相当于 $80 \times 240 \times 2$ 个格点），Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

数选为 1.0, $\alpha=90^\circ$ 时, 积分步长为 3240 s, 没有守恒强迫 (NC) 和三种守恒方法 (MV, MC 和 ML) 下的全球积分总质量和归一化误差 (L_2 , L_{inf}) 随时间演变如图 2 所示, 在每一个网格区域内各种误差在靠近赤道时减小, 远离赤道时增大, 在非守恒条

件下, 当“余弦钟”穿越阴阳网格边界时全球总质量和各种误差发生跳跃, 而在三种守恒方案下, 全球总质量保持守恒, 当刚体通过阴阳网格边界时, 误差也会发生脉冲式的跳跃, 可见阴阳网格边界处的耦合处理是十分重要的。为便于比较, 图 3 给出

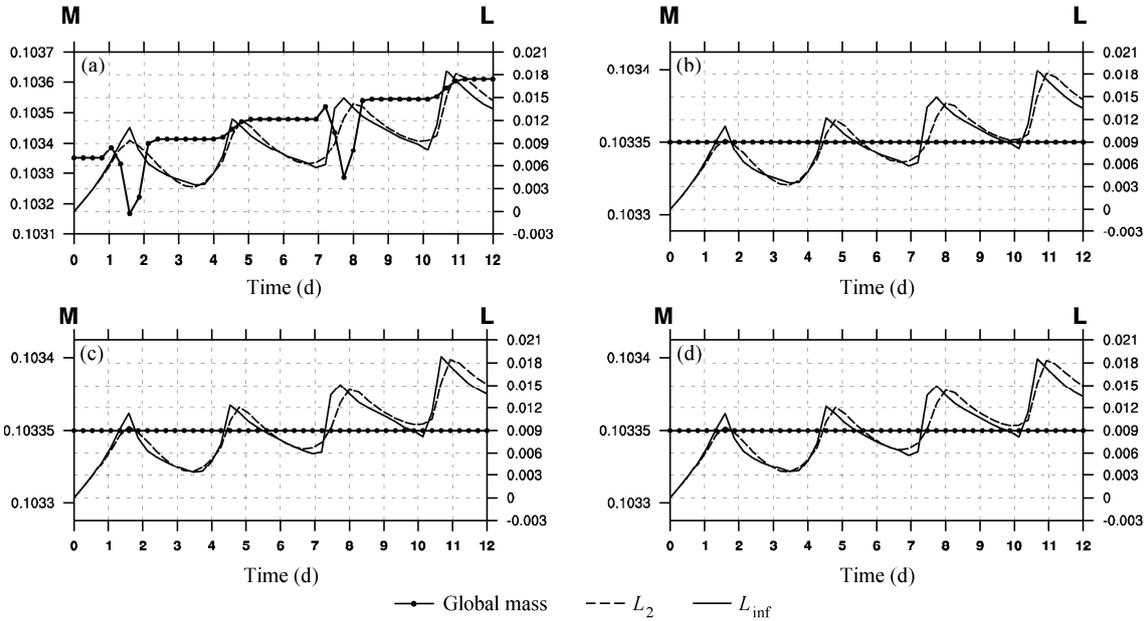


图 2 “余弦钟”试验: NC 方法 (a), MV 方法 (b), MC 方法 (c) 和 ML 方法 (d) 下全球积分总质量 (左纵坐标) 和误差 (右纵坐标) 随时间演变 ($\alpha=90^\circ$, $\Delta t=3240$ s)

Fig. 2 “Cosine bell” poleward advection test: The temporal evolution of global mass (left ordinate) and error (right ordinate) with schemes (a) NC, (b) MV, (c) MC, and (d) ML ($\alpha=90^\circ$, $\Delta t=3240$ s)

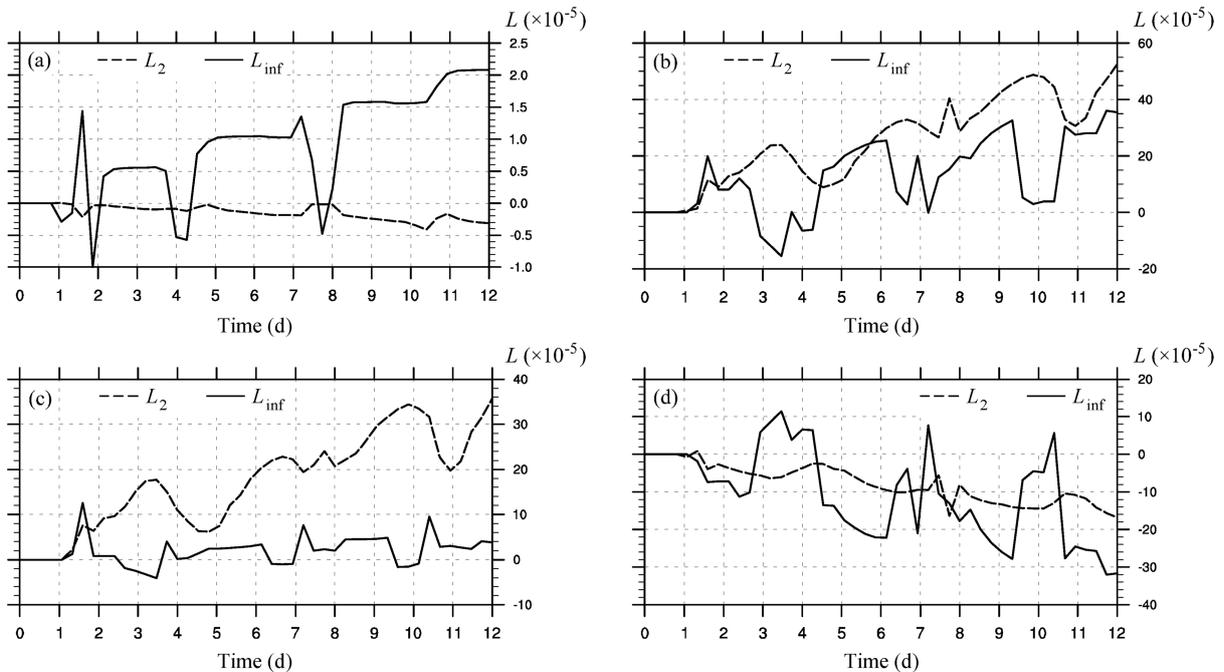


图 3 (a) MV 方法与 NC 方法误差之差, (b) MC 方法与 NC 方法误差之差, (c) ML 方法与 NC 方法误差之差以及 (d) ML 方法与 MC 方法误差之差随时间演变 ($\alpha=90^\circ$, $\Delta t=3240$ s)

Fig. 3 Time series of the error differences: (a) The error of MV minus the error of NC; (b) the error of MC minus the error of NC; (c) the error of ML minus the error of NC; (d) the error of ML minus the error of MC ($\alpha=90^\circ$, $\Delta t=3240$ s)

三种守恒方法分别与非守恒方法的误差之差随时间的演变情况，可见守恒方法与非守恒方法的平流误差相近（相差最大量为 10^{-4} 左右），即强迫守恒限制条件不会明显影响刚体平流的误差，而人为限制守恒方法（MV）尽管不太合理但是与边界强迫通量守恒方法（MC 和 ML）计算误差相近，即通过边界通量的强迫守恒对平流计算误差累积不会造成太大的影响，而将边界单元格质量均匀分布（MC）改为双线性分布后（ML）后计算误差有所降低，可以改善计算精度，但是降低程度并不是很大（量为 10^{-4} ）（图 3d）。以上结果可能与刚体平流试验中钟形物体面积较小有关。

图 4 是 $\alpha=45^\circ$ 、积分时间步长为 1620 s，非守恒条件（NC）下和三种守恒方法（MV, MC, ML）的“余弦钟”平流全球总质量和计算误差随时间演变图，误差增长情况基本与 $\alpha=90^\circ$ 时一致。为方便比较，图 5 同样给出三种守恒方法与非守恒方法误差之差，首先可以看出三种强迫守恒方法下的误差增长与非守恒条件下的误差增长相似（相差量为 10^{-5} ），可见守恒强迫方案在刚体平流试验中对计算误差的影响较小，说明在阴阳网格边界处理中即使没有守恒强迫，网格边界所引起的计算误差对于短期积分而言并不明显；其次可以看出将边界网格质量均匀分布假定（MC）改为双线性分布的质量守恒强迫（ML）后， L_2 , L_{inf} 误差相应地有所降低（量为 10^{-4} ），对改善积分结果的计算精度有帮助，只

是误差减小量在短时间内并不是很大。当积分延长至 96 天时，比较了 MC 方法和 NC 方法下的全球总质量和计算误差演变情况（图略），发现 NC 条件下总质量不断减少，96 天后总质量减少了 13.9%，而 MC 方案可以严格保证总质量自始至终守恒；MC 与 NC 方法下的计算误差 L_2 和 L_{inf} 之差值呈线性下降，在第 96 天 L_2 的差值达到 -0.003，改善了 1%， L_{inf} 的差值达到 -0.018，改善了 4.5%，说明质量强迫守恒方案在长期积分过程中是非常必要的，并且相对非守恒方案，强迫守恒方案对计算精度的改善也会随积分时间增加而越来越明显。

通过以上比较我们可以看出，尽管强迫守恒方法下的平流误差相对于非守恒条件下的平流误差的改善在短时间内并非十分显著，但是在数值模式长期积分过程中，如气候模拟，这种改善就会累积而产生明显效果，从而影响模式的积分稳定性。因此我们要尽量保证全球总质量的守恒，而且好的数值方案应该尽量少的依靠人工加入的限制条件，同时考虑到计算效率和对计算资源的要求，我们选择计算量相对较小、完全守恒的阴阳网格边界单元格质量均匀分布强迫守恒（MC）的计算方案更具有实际意义。图 6 给出这种方法下“余弦钟”在阴阳网格上向极地方向旋转情况（ $\alpha=90^\circ$ ， $80 \times 240 \times 2$ 个网格， $\Delta t=3240$ s）下绕地球一圈的平流计算结果，可以看出“余弦钟”在平流过程中能够很好的保持初始形状，而且四次经过阴阳网格重叠部分时

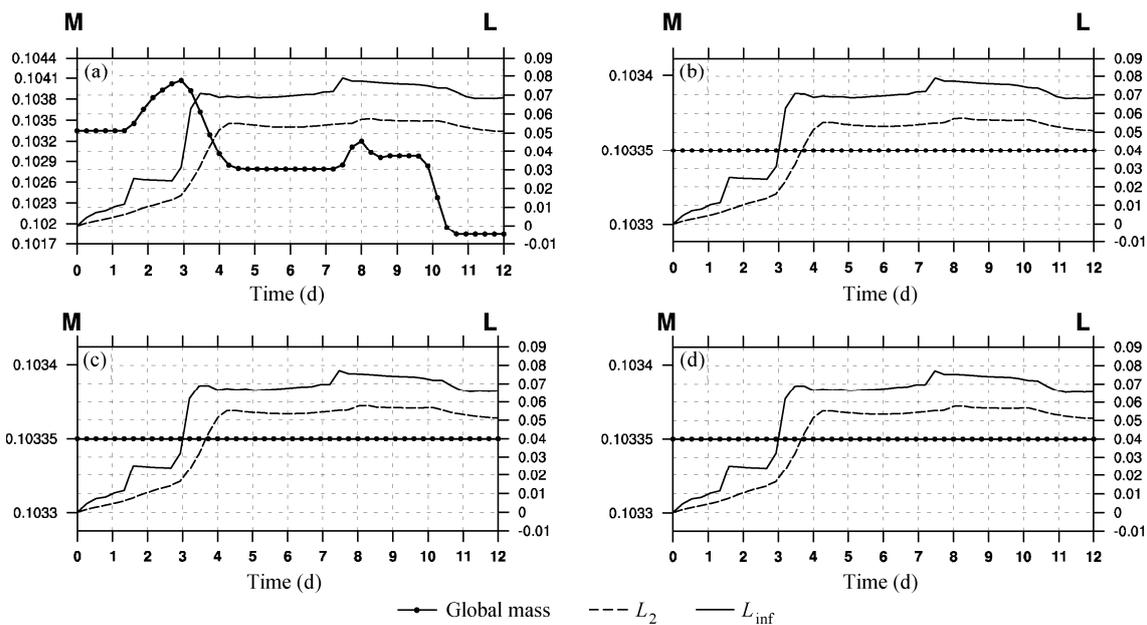


图 4 同图 2，但 $\alpha=45^\circ$ ， $\Delta t=1620$ s

Fig. 4 Same as in Fig. 2, but for $\alpha=45^\circ$, $\Delta t=1620$ s

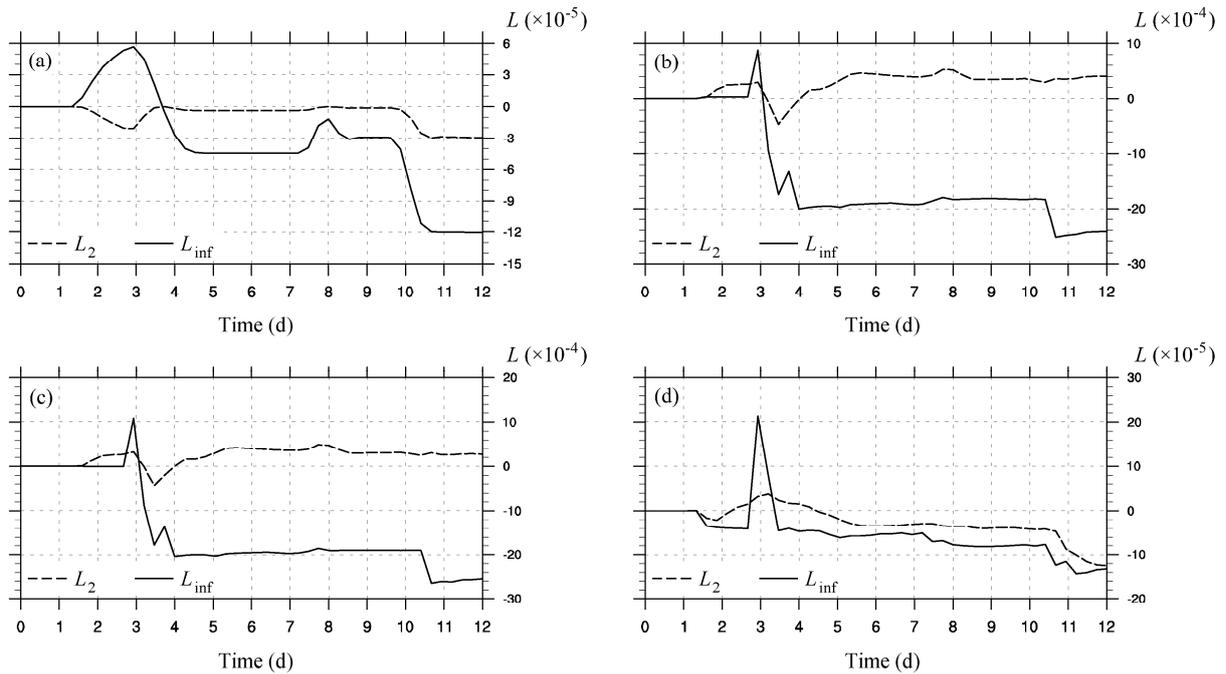


图 5 同图 3, 但 $\alpha=45^\circ$, $\Delta t=1620$ s
Fig. 5 Same as in Fig. 3, but for $\alpha=45^\circ$, $\Delta t=1620$ s

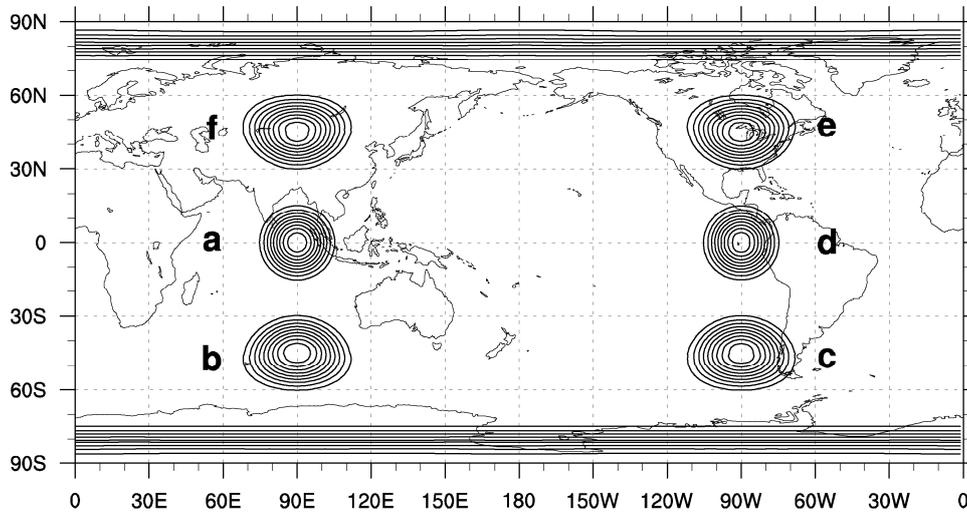


图 6 边界网格标量均匀分布强迫守恒 (MC) 方法下“余弦钟”跨越极点旋转, 分辨率是 $1.125^\circ \times 1.125^\circ$, 旋转依次是 a**→**b**→**c**→**d**→**e**→**f**→**a, 其中 b, c, e, f 穿过阴阳网格重合部分 (等值线为平流量分布大小, 其值从 0.1 到 0.9, 间隔 0.1)

Fig. 6 Contour plots of the “Cosine bell” during the poleward advection with a resolution of $1.125^\circ \times 1.125^\circ$ with scheme MC. The contours are plotted from 0.1 to 0.9 with an interval of 0.1. The bell’s rotation direction is a**→**b**→**c**→**d**→**e**→**f**→**a, and the bell passes the overlapping border four times in b, c, e, f

(b, c, e, f) 也未发生太大的形变, 经过 12 天平流后可以很好地保持原状回到初始位置 (图 7), 阴阳网格完全避免了常规经纬度网格存在的坐标奇异和极区经线辐合问题。为了分析边界守恒强迫下这种平流计算的收敛性, 表 1 给出这种方法不同分辨率下“余弦钟”沿经向旋转一圈后的计算误差 (即 day=12 d), 可以看出当空间分辨率提高后计算误差

呈三阶递减速率收敛, 同时进一步说明了阴阳网格在全球高分辨率数值模拟中具有广阔的应用前景。

4.2 变形流试验

变形流试验也叫球面锋生试验 (Nair et al., 1999; Peng et al., 2006), 是 Doswell (1984) 涡旋问题的一种演变 (Nair and Machenhauer, 2002; Nair et al., 2002), 在旋转坐标系上两个对称的涡旋同时生成。

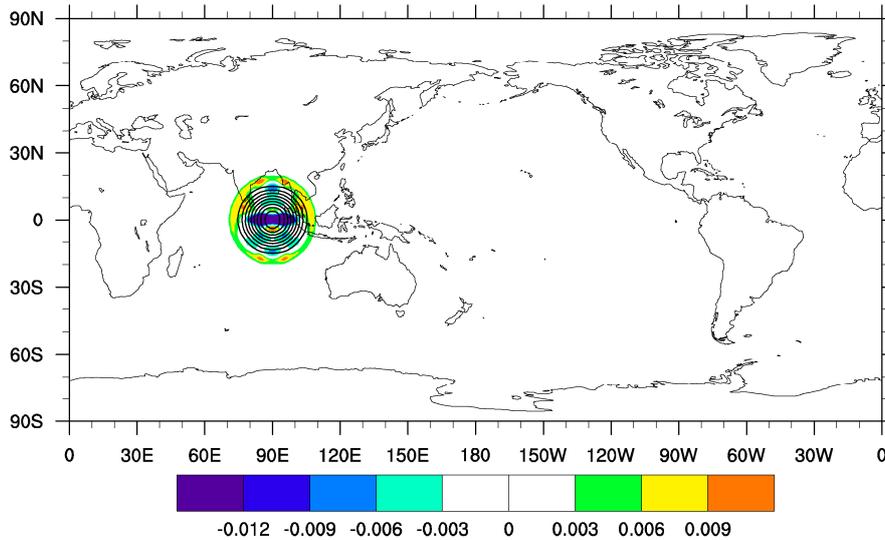


图 7 边界网格均匀分布强迫守恒 (MC) 方法下“余弦钟”绕过极点旋转 12 天后的数值解 (等值线, 从 0.1 到 0.9, 间隔 0.1) 及其数值解与解析解的差值 (阴影)

Fig. 7 Numerical solution (contour) and the difference between the numerical and analytical solutions (shaded area) for the “Cosine bell” after one poleward revolution on the Yin-Yang grid with a resolution of $1.125^\circ \times 1.125^\circ$ with scheme MC. The contours are plotted from 0.1 to 0.9 with an interval of 0.1

相对于前面的刚体平流试验, 这个试验更为严格, 其考虑在一个平直的气流上加上变形的涡度流以测试其随时间演变情况。

表 1 边界网格均匀分布强迫守恒 (MC) 方法下不同分辨率的各种归一化误差 (CFL 数=0.5, $\alpha = 90^\circ$, day=12 d)
Table 1 Normalized errors for different resolutions with scheme MC (CFL number=0.5, $\alpha = 90^\circ$, day=12 d)

分辨率	L_1	L_2	L_{inf}
$16 \times 48 \times 2$	0.4882	0.306374	0.295176
$32 \times 96 \times 2$	0.150597	0.0978895	0.117544
$64 \times 192 \times 2$	0.0487097	0.0289484	0.0447983

在旋转坐标系 (λ', φ') 下将极点放在 $(\pi + 0.025, \pi/2.2)$, 稳定的涡度风场: 切线方向速度为

$$V_t \equiv \cos \varphi' \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \tan h(r') \operatorname{sech}^2(r'), \quad (9)$$

径向速度 $V_r \equiv d\varphi'/dt$ 为零, 其中 $r' = r_0 \cos \varphi'$ 是距涡旋中心的距离, $r_0 = 3$ 。角速度定义为

$$\varpi'(\varphi') = \begin{cases} V_t / r', & r' \neq 0 \\ 0, & r' = 0 \end{cases} \quad (10)$$

锋生的解析表达式为

$$q(\lambda', \varphi', t) = 1 - \tanh \left[\frac{r'}{d} \sin(\lambda' - \varpi't) \right], \quad (11)$$

其中 $d=5$ 是平滑参数, 初始值为 $q(\lambda', \varphi', 0)$ 。关于旋转坐标系 (λ', φ') 与球面坐标系 (λ, φ) 之间的具体转换详见 Nair et al. (1999)。

本试验中, 阴阳网格计算网格数为 $80 \times 240 \times 2$, 相当于分辨率是 $1.125^\circ \times 1.125^\circ$, 积分时间为 $t=3$ 。初始场和积分 3 个时间单位后的数值解及其解析解如图 8 所示, 可以看出无论强迫守恒与否, 所有计算结果均较好的给出了变形流的演变过程, 且计算误差相差不大, 较好地给出了涡旋的结构、位置和演变过程, 这一点和刚体平流试验的结果相似。图 9 给出非守恒条件与三种守恒方案下变形流试验全球总质量及其误差随时间演变情况, 除了非守恒条件不能保证全球总质量守恒外, 三种守恒方案均能保证总质量守恒, 而且它们的计算误差均相差不大。类似刚体平流试验, 在短期积分中这种守恒性与非守恒性的差异表现不明显, 但在长期数值预报与模拟中质量的不守恒则会导致计算的不稳定甚至中断, 因此强迫守恒方法对我们而言具有实际应用价值。在三种守恒方案中, MV 方案采用了武断地余额平均分配法处理, 虽然保证了全球质量守恒, 但无法保证局地质量守恒; MC 方案则是根据流体的数学物理特性来强迫的, 同时保证了全球和局地质量守恒, 而且计算量较小, 适合于实际应用; ML 方法更好地考虑了网格内质量的次网格变化, 可以获得更好的计算精度, 同时保证了全球和局地质量守恒, 但是由于网格内质量的次网格分布与时间相关, 这种强迫所需的计算量大大超过 MC 方法, 所以需要在权衡计算能力和计算效果的

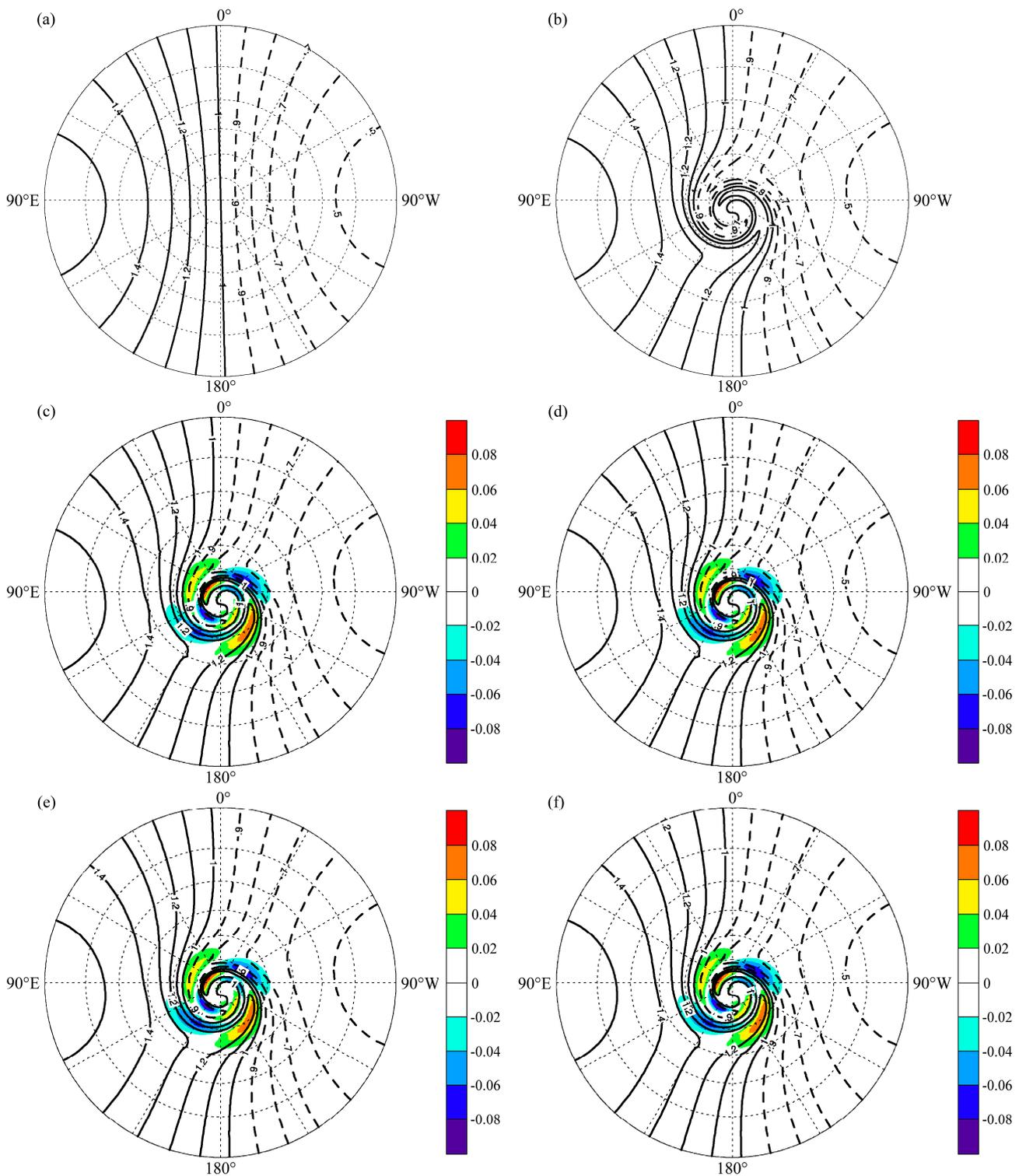


图 8 变形流试验结果: (a) $t=0$ 时刻初始场; (b) $t=3$ 时刻解析解; $t=3$ 时刻 NC 条件 (c), MV 方法 (d), MC 方法 (e), ML 方法 (f) 下的数值解 (等值线) 及其与解析解的差值 (阴影)

Fig. 8 Results of the deformational flow test: (a) The initial condition; (b) the analytical solution at $t=3$; the numerical solutions (contour) and the differences (shaded area) between the numerical and analytical solutions with schemes (c) NC, (d) MV, (e) MC, and (f) ML at $t=3$. $80 \times 240 \times 2$ computational grids are used in the simulation

基础上来决定是否应用 ML 方法。考虑到计算省时性, 我们建议采用边界网格质量均匀分布强迫守恒

(MC) 方法, 这种方法能够完全保证阴阳网格上局地 and 全球质量守恒, 而且计算负担比较小, 适合

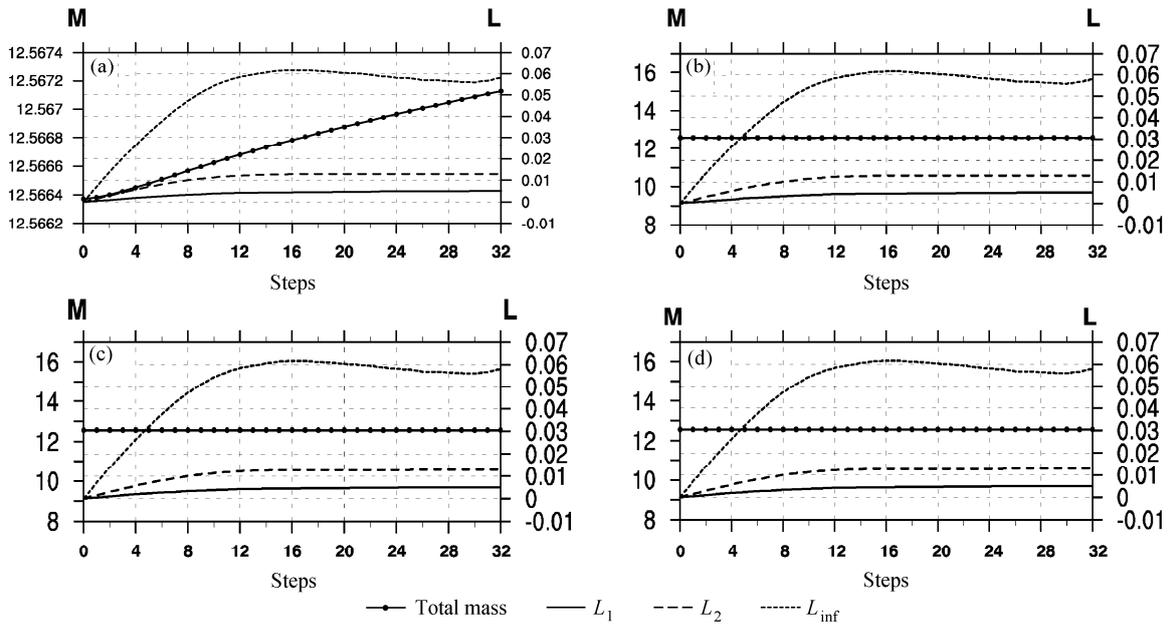


图9 变形流试验误差：NC 条件 (a)，MV 方法 (b)，MC 方法 (c)，ML 方法 (d) 下的全球积分总质量 (左纵坐标) 及其误差 (右纵坐标) 随积分步数的演变

Fig. 9 Results of the deformational flow test: The temporal evolution of the total mass (left ordinate), and error (right ordinate) with schemes (a) NC, (b) MV, (c) MC, and (d) ML. $80 \times 240 \times 2$ computational grids are used in the simulation

长期气候模拟以及高分辨率数值模拟。

4.3 正弦波试验

前面通过各种平流理想试验评估了各种计算方案的计算性能，下面不再考虑非守恒条件计算方案，我们验证三种守恒算法的收敛性，采用相对刚体平流更为平缓的正弦波平流 (Li et al., 2008)，归一化误差依然选择 L_1 , L_2 和 L_{inf} ，试验中选择 CFL=0.5。

初始高度场定义为

$$h(\lambda, \varphi) = h_0 \cos^2 \varphi \sin(k\lambda) \quad (12)$$

其中，参数 $h_0=1$ ，波数 $k=4$ 。注意到这种高度场中波峰为正值，波谷为负值，所以本试验不再考虑正定性。风场与试验一风场相同，试验选择三种不同分辨率，正弦波平流 12 天后的误差分别如表 2、表 3 和表 4 所示，三种强迫守恒方案下各种误差收敛

表 2 MV 方案下各种归一化误差及其收敛阶数 (CFL 数=0.5, $\alpha=0^\circ$)

Table 2 Normalized errors and convergence rates with scheme MV (CFL number=0.5, $\alpha=0^\circ$)

分辨率	L_1	L_1 阶数	L_2	L_2 阶数	L_{inf}	L_{inf} 阶数
$16 \times 48 \times 2$	0.0939668	—	0.0944042	—	0.120565	—
$32 \times 96 \times 2$	0.031119	1.59	0.0322394	1.55	0.0602997	1.0
$64 \times 192 \times 2$	0.0115692	1.43	0.0123972	1.28	0.0303725	0.99

性比较相近， L_1 和 L_2 误差的收敛阶数相近，大概是 1.5 左右，而 L_{inf} 误差收敛阶数相对较小只有 1 阶精度。

表 3 MC 方案下各种归一化误差及其收敛阶数 (CFL 数=0.5, $\alpha=0^\circ$)

Table 3 Normalized errors and convergence rates with scheme MC (CFL number=0.5, $\alpha=0^\circ$)

分辨率	L_1	L_1 阶数	L_2	L_2 阶数	L_{inf}	L_{inf} 阶数
$16 \times 48 \times 2$	0.0966441	—	0.0963329	—	0.1402	—
$32 \times 96 \times 2$	0.0314581	1.62	0.0325889	1.56	0.0710858	0.98
$64 \times 192 \times 2$	0.0114069	1.46	0.0124328	1.40	0.0343862	1.05

表 4 ML 方案下各种归一化误差及其收敛阶数 (CFL 数=0.5, $\alpha=0^\circ$)

Table 4 Normalized errors and convergence rates with scheme ML (CFL number=0.5, $\alpha=0^\circ$)

分辨率	L_1	L_1 阶数	L_2	L_2 阶数	L_{inf}	L_{inf} 阶数
$16 \times 48 \times 2$	0.0959031	—	0.095015	—	0.134308	—
$32 \times 96 \times 2$	0.0314294	1.61	0.0324926	1.55	0.0666011	1.01
$64 \times 192 \times 2$	0.0113987	1.46	0.0123975	1.39	0.031906	1.06

5 结论

本文针对通量形式平流方程，在球面坐标上采用浅水方程通过平流理想数值试验对阴阳网格上的三种强迫质量守恒方案进行了数值检验，并与非守恒方案进行了对比，结果表明，阴阳网格上的三

种强迫质量守恒方案都可以完美保证全球积分的质量守恒,从而可以应用于大气环流模式的数值积分中。三种守恒强迫方案中质量余额人为分配法(MV)由于缺乏局地守恒限制,长期积分时应该慎重;边界网格质量均匀分布强迫守恒(MC)方案和质量线性分布(ML)方案都是在保证网格质量的局地守恒基础上来构造全球守恒强迫的,计算精度相对较高,在中短期积分过程中对误差累积影响较小;ML方案在采用次网格质量线性分布的假设下,获得了计算精度的改善,但计算量明显增加,在长期积分时需要根据计算资源和计算效果综合考虑后做出选择;MC方案同时保证了质量的局地和全球守恒,而且边界网格质量通量的计算仅与网格重合关系有关,不随时间变化,占用计算资源少,适合于长期积分时使用。

通过比较三种守恒计算方案的数值试验结果,我们发现:(1)阴阳网格的边界质量流失并不特别严重,可以在没有守恒强迫的情况下应用于短期预报和模拟;(2)网格内质量均匀分布(MC)和线性分布(ML)守恒强迫方案都具有明确的数学物理基础,相对MV方法具有较好的效果,而综合考虑长期积分时误差积累、计算稳定性、计算精度和计算成本,MC方案更具有实际应用价值。

参考文献(References)

- Baba Y, Takahashi K, Sugimura T, et al. 2010. Dynamical core of an atmospheric general circulation model on a Yin-Yang grid [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 138 (10): 3988–4005.
- 陈嘉滨, 高学杰. 2000. 质量守恒律在国家气候中心气候谱模式中的应用 [J]. *大气科学*, 24 (5): 608–614. Chen Jiabin, Gao Xuejie. 2000. An application of the mass conservation law to the spectral climate model of National Climate Center [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 24 (5): 608–614.
- Doswell C A III. 1984. A kinematic analysis of frontogenesis associated with a nondivergent vortex [J]. *J. Atmos. Sci.*, 41 (7): 1242–1248.
- 纪立人, 陈嘉滨, 张道民, 等. 2005. 数值预报模式动力框架发展的若干问题综述 [J]. *大气科学*, 29 (1): 120–130. Ji Liren, Chen Jiabin, Zhang Daomin, et al. 2005. Review of some numerical aspects of the dynamic framework of NWP model [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 29 (1): 120–130.
- Kageyama A, Sato T. 2004. The “Yin-Yang grid”: An overset grid in spherical geometry [J]. *Geochemistry Geophysics Geosystems*, 5 (9): Q09005.
- Kurihara Y. 1965. Numerical integration of the primitive equations on a spherical grid [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 93 (7): 399–415.
- Li X L, Chen D H, Peng X D, et al. 2006. Implementation of the semi-Lagrangian advection scheme on a quasi-uniform overset grid on a sphere [J]. *Advances in Atmospheric Sciences*, 23 (5): 792–801.
- Li X L, Chen D H, Peng X D, et al. 2008. A multimoment finite-volume shallow-water model on the Yin-Yang overset spherical grid [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 136 (8): 3066–3086.
- 穆穆, 季仲贞, 王斌, 等. 2003. 地球流体力学的研究与进展 [J]. *大气科学*, 27 (4): 689–711. Mu Mu, Ji Zhongzhen, Wang Bin, et al. 2003. Achievements in geophysical fluid dynamics [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 27 (4): 689–711.
- Nair R D, Machenhauer B. 2002. The mass-conservative cell-integrated semi-Lagrangian advection scheme on the sphere [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 130: 649–667.
- Nair R D, Côté J, Staniforth A. 1999. Cascade interpolation for semi-Lagrangian advection over the sphere [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125 (556): 1445–1468.
- Nair R D, Scroggs J S, Semazzi F H M. 2002. Efficient conservative global transport schemes for climate and atmospheric chemistry models [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 130 (8): 2059–2073.
- Nair R D, Thomas S J, Loft R D. 2005. A discontinuous galerkin global shallow water model [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 133 (4): 876–888.
- Peng X D, Xiao F, Takahashi K. 2006. Conservative constraint for a quasi-uniform overset grid on the sphere [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 132 (616): 979–996.
- Peng X D, Xiao F, Ohfuchi W, et al. 2005. Conservative semi-Lagrangian transport on a sphere and the impact on vapor advection in an atmospheric general circulation model [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 133 (3): 504–520.
- Qaddouri A. 2011. Nonlinear shallow-water equations on the Yin-Yang grid [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 137 (656): 810–818.
- Qaddouri A, Lee V. 2011. The Canadian global environmental multiscale model on the Yin-Yang grid system [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 137 (660): 1913–1926.
- Sadourny R. 1972. Conservative finite-difference approximations of the primitive equations on quasi-uniform spherical grids [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 100 (2): 136–144.
- Sadourny R, Arakawa A, Mintz Y. 1968. Integration of the non-divergent barotropic vorticity equation with an icosahedral-hexagonal grid for the sphere [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 96 (6): 351–356.
- Staniforth A, Thuburn J. 2012. Horizontal grids for global weather and climate prediction models: A review [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 138 (662): 1–26.
- Washington W M, Buja L, Craig A. 2009. The computational future for climate and earth system models: On the path to petaflop and beyond [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367: 833–846.
- Williamson D L. 1968. Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid [J]. *Tellus*, 20 (4): 642–653.
- Williamson D L. 2007. The evolution of dynamical cores for global atmospheric models [J]. *J. Meteor. Soc. Japan*, 85B: 241–269.
- Williamson D L, Drake J B, Hack J J, et al. 1992. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry [J]. *J. Comput. Phys.*, 102 (1): 211–224.
- Xiao F, Yabe T, Peng X D, et al. 2002. Conservative and oscillation-less atmospheric transport schemes based on rational functions [J]. *J. Geophys. Res.*, 107 (D22): 4609.
- Zerroukat M, Allen T. 2012. On the solution of elliptic problems on overset/Yin-Yang grids [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 140: 2756–2767, doi: 10.1175/MWR-D-11-00272.1.