

非静力平衡层结大气中的重力惯性波和惯性对流

中国科学院大气物理研究所模拟实验组

提 要

本文根据一些新的流体力学实验结果及某些天气事实, 建立了一个非静力平衡条件下旋转地球大气中重力惯性波和惯性对流的理论模型, 并分别求出它在稳定层结, 中性层结及不稳定层结三种情况下的点源扰动函数形式的解。

分析解的性质得知, 中性及弱不稳定大气中可以激发一种主要由地球旋转惯性决定的大幅度垂直速度振动, 其周期大于(至少等于)地球在该纬度的惯性周期 $\frac{2\pi}{f}$ 。这也许能说明文献[1]所发现的那种准周期性惯性对流的某些动力性质。在稳定层结流体中, 地球旋转参数对流体重力振荡的频率影响不大, 层结越稳定, 越类似于单纯的重力振荡, 只有在层结接近中性时, f 对重力振荡的频率修正作用才明显起来。

最后给出不同纬度处不稳定层结大气中所能产生的惯性对流的最大的临界尺度。

前 言

在青藏高原热源作用的模拟实验中^[1], 我们在加热高原上空的对流中心发现明显的温度和垂直运动脉冲(见图 1A)。这些对流脉冲在不同的转台周期 T_f 和不同的流体层结中有完全不同的频率。文献[1]定义对流周期指数

$$K = \text{对流周期} / \text{转台惯性周期}$$

其中转台惯性周期 $= T_f/2$ 。则一般说来, 稳定层结流体里出现的是高频小振幅脉冲, 其 K 值约为 10^{-1} 量级(见图 1B); 在不稳定层结流体里则出现低频大振幅脉冲, 其 K 值为 1—2, 值得注意的是它有巨大的振幅, 其振动强度比稳定层结里的高频脉冲要高一个量级, 文献[1]称之为惯性对流, 如图 1A 所示。这种振动一旦形成, 由于对流中层的温度振幅远较上层为大, 原来的不稳定层结转变为围绕中性层结振动的状态。

这类大振幅脉冲如何产生的呢? 为了考察转台旋转对对流的影响, 曾作过一个对比实验: 让转台停止转动。结果在下垫面同样的加热条件下(下垫面加热功率都是 12.8 瓦, 用以维持流体的不稳定层结), 大振幅脉冲完全消失。加热“高原”上空对流中心的温度趋势是单调上升的, 有时可有一些小振幅高频脉动(见图 1C), 对流中心的垂直运动变为连续上升的对流柱。在转台旋转时, 除温度有如图 1A 所示的惯性脉冲外, 垂直运动的激发

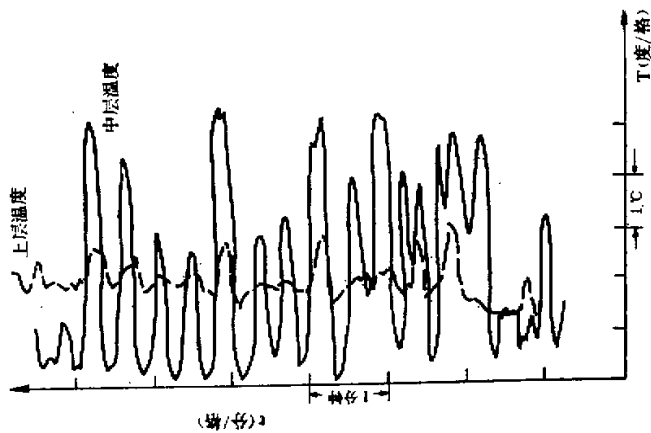


图 1(A) 转台周期 37 秒时对流中心的温度脉冲曲线, 温度层结围绕中性状态波动 (实线为对流中层温度, 虚线为对流上层温度)

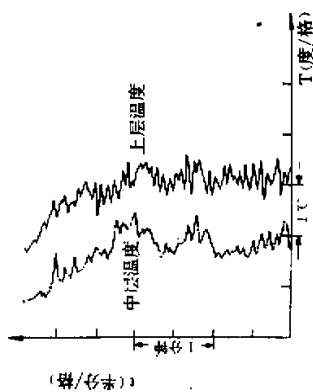


图 1(B) 转台周期为 79.58 秒时稳定层结里温度的高频波动 (实线为对流上层温度, 虚线为对流中层温度)

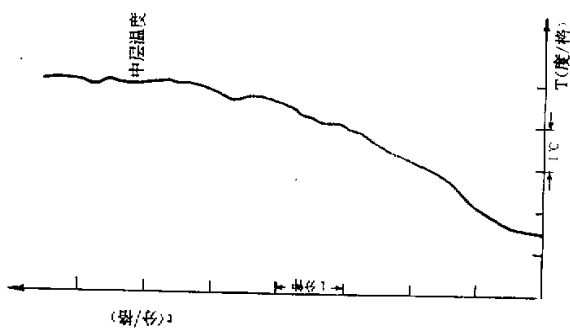


图 1(C) 转台不转时对流中心 (中层) 温度曲线

也有间歇性, 对流中心随着转台的旋转出现一股一股的上升运动的脉冲, 其周期与温度的脉冲周期一致。

以上对比实验告诉我们, 转台的转动和不稳定层结是产生低频对流脉冲的充分必要条件。我们将这种旋转不稳定层结流体中发生的, 具有准惯性周期的对流叫做惯性对流。它既具有非静力平衡的对流特征, 又绝不能忽略旋转系统里柯氏力的影响。本文将同时考虑对流和柯氏力作用, 以解释上述实验现象, 并进而提出一些可能的应用。

一、方程组及其基本解

将大气的位温、压力和密度分解为具有一定层结分布的基本场 $\bar{\theta}(z)$ 、 $\bar{p}(z)$ 、 $\bar{\rho}(z)$ 和扰动场 θ' 、 p' 、 ρ' 之和; 为了保留运动方程中的垂直加速度同时又滤去声波, 在连续方程中取了三维动量无辐散近似; 为了数学处理简单而又不失对流主要特征, 在浮力近似的基础上取 $\frac{\rho'}{\bar{\rho}(z)} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)}$; 于是在去掉“'”号后得到以下方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - fv = A_u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} + fu = A_v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \beta\theta = A_w \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha w = A_\theta \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 u, v, w 分别是 x, y, z 方向上单位体积空气的动量(速度分量 u_1, v_1, w_1 与 $\bar{\rho}(z)$ 之积), $\theta = \bar{\rho}(z)\theta'$, $\beta = \frac{g}{\bar{\theta}(z)}$ 和层结参数 $\alpha = \frac{\bar{\theta}}{T}(\gamma_d - \gamma)$ 暂取作常数;

$$A_{u, v, w} = -\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$A_\theta = -\left(u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \frac{\theta}{c_p \rho T} \varepsilon$$

这里的 ε 是单位体积空气的加热率。

垂直方向的下边界取质量无穿透形式, 即 $z=0$ 处 $w=0$ 。文献[7]从大气总能量守恒及解的存在唯一性出发, 要求全气柱总能量有限, 这里取作 $\int_0^\infty \frac{1}{\bar{\rho}(z)} w^2 dz < \infty$, 此形式满足 $z \rightarrow \infty$ 时 $w \rightarrow 0$ 的椭圆型方程在无穷远处的正则条件, 但比后者来得更强。

如果初值 w_0 和 $\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = w'_0$ 已知, 则满足以上边界条件的方程组(1)的柯西问题有

唯一的解。在(1)中消去其它变数后,得到关于垂直动量的单一变量方程:

$$\mathcal{L}(w) \equiv \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\beta \right) \Delta + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] w = F \quad (2)$$

$$\text{其中 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \Delta A_w + \beta \Delta A_\theta - \frac{\partial}{\partial z} \left(f A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \right)$$

$$A_\theta = \frac{\partial A_v}{\partial x} - \frac{\partial A_u}{\partial y}$$

$$A_D = \frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y}$$

我们首先求(2)的齐次问题的解。作拉普拉斯变换,令

$$W = \int_0^\infty w e^{-pt} dt$$

则由(2)得

$$\left[(p^2 + \alpha\beta) \Delta + (p^2 + f^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] W = \Delta_3 (p w_0 + w'_0) \quad (3)$$

其中

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

注意 $z=0$ 处 $w=0$ 这一边界条件,将初值 w_0 及 w'_0 向负半空间奇开拓后得到

$$W = -\frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty G_p \cdot \Delta_3 (p w_0 + w'_0) dz' dx' dy' \quad (4)$$

其中

$$G_p = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha\beta}} \left(\frac{1}{\gamma \sqrt{p^2 + c^2}} - \frac{1}{\hat{\gamma} \sqrt{p^2 + \hat{c}^2}} \right) \quad (5)$$

(5)及以后各式中的

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= R^2 + (z' - z)^2; \quad \hat{\gamma}^2 = R^2 + (z' + z)^2; \quad R^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2; \\ c^2 &= \frac{R^2 f^2 + \alpha\beta(z' - z)^2}{\gamma^2}; \quad \hat{c}^2 = \frac{R^2 f^2 + \alpha\beta(z' + z)^2}{\hat{\gamma}^2} \end{aligned} \quad (6)$$

问题归结为求 G_p 和 pG_p 的拉氏反演函数 G_1 和 G_0 。当 G_1 和 G_0 求出以后,方程(2)满足边界条件和初始条件的解为

$$\begin{aligned} w = -\frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty & \left[G_0 \Delta_3 w_0(x', y', z') + G_1 \Delta_3 w'_0(x', y', z') \right. \\ & \left. + \int_0^t G_1(t-t') F(x', y', z', t') dt' \right] dz' dx' dy' \end{aligned} \quad (7)$$

这里的 G_0 是初始垂直速度不均匀扰动 $\Delta_3 w_0$ 的点源扰动影响函数, G_1 是初始垂直加速度场不均匀 $\Delta_3 w'_0$ 的点源扰动影响函数。若初始 $\Delta_3 A_w = 0$, 则

$$\Delta_3 w'_0 = \Delta_3 \left(\beta\theta - \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

它相当于一个初始温度场扰动。分析 G_0 和 G_1 的性质可知,初始的动力扰动和热力扰动

将以不同的规律激发垂直运动, 非线性项和热源则按 G_1 对时间的积分效应对 ω 起着不断激发的作用。

G_0 和 G_1 的性质依赖于层结参数 α 。在稳定大气里, 它们表现为衰减的高频重力惯性波动, 在中性大气里, 表现为缓慢衰减的大幅度惯性振动, 在不稳定大气里, 主要表现为不稳定增长。

以下分 $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ 和 $\alpha > 0$ 三种情况分别求出解(7)中的点源扰动函数 G_0 和 G_1 。具体数值计算结果见图 3, 图 4 和图 6。

二、 $\alpha=0$ 中性大气的解

在 $\alpha = 0$ 的中性大气里, 没有重力波, 只有形式最简单的、主要受地球旋转惯性影响的运动。这是一种由稳定层结过渡到不稳定层结的临界运动形式。这时的点源扰动影响函数形式最简单:

$$\begin{cases} G_0 = \frac{J_0(ct)}{\gamma} - \frac{J_0(\ell t)}{\hat{\gamma}} \\ G_1 = \int_0^t G_0(\tau) d\tau = \int_0^t \left(\frac{J_0(c\tau)}{\gamma} - \frac{J_0(\ell\tau)}{\hat{\gamma}} \right) d\tau \end{cases} \quad (8)$$

其中 J_0 是零阶贝塞尔函数。 G_0 和 G_1 不是宗量为 $(\gamma - ct)$ 型的波型不变的简单行波, 而是波型、波长随时间变化的更复杂一些的波动。空间定点的振动频率 c 、 ℓ 的表达式是

$$c = \frac{R}{\gamma} f = f \sin \delta \leq f$$

$$\ell = \frac{R}{\hat{\gamma}} f \leq f$$

δ 是 p 点相对于“源点” o 的方位角 (见图 2)。

c 和 ℓ 均小于 (至多等于) f , 因此中性大气里的这种垂直运动的振动除在“扰源”同一平面上具有惯性周期 $\frac{2\pi}{f}$ 外, 在其它方位均比惯性振动慢。以下给出

地球各个纬度上固有的惯性周期 $\frac{2\pi}{f}$, 也就是该纬度上所允许发生的惯性振动的最短周期。

表 1 不同纬度的惯性周期

纬度	90	60	45	30	20	15	10	5	0
$\frac{2\pi}{f}$ (小时)	12	14	17	24	38	46	69	138	∞

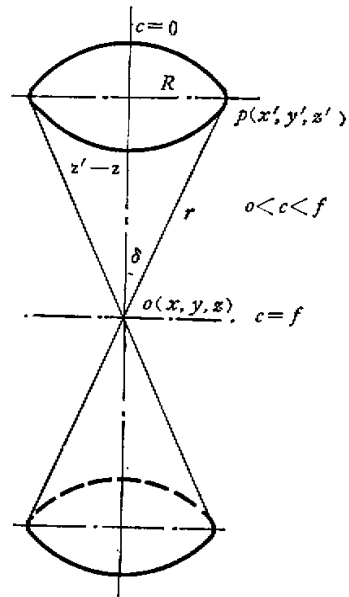


图 2 中性层结大气中惯性振动频率 $c = f \sin \delta$

图 3 给出中性大气里 G_1 随时间变化的曲线。这里所取的参数为: $\delta = 45^\circ$, $z = 0.5$ KM, $z' = 3.5$ KM, $R = 3$ KM, $f = 10^{-4} \text{S}^{-1}$, 所得 p 点前四次振动的平均周期约 24 小时, 最大振幅为 1300 秒/公里。

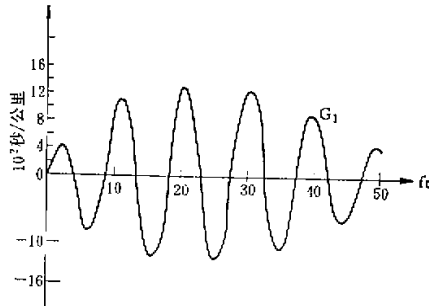


图 3 中性大气的大振幅惯性振动(平均周期约 24 小时, 最大振幅达 1300S/KM, $R = 3$ KM, $z = 0.5$ KM, $z' = 3.5$ KM, $\delta = 45^\circ$, $f = 10^{-4} \text{S}^{-1}$)

最后, 讨论 $t \rightarrow \infty$ 时 G_0 和 G_1 的渐近性质。在 $f \approx 0$ 的地方, 利用贝塞尔函数性质

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x) = 0 \text{ 和 } \int_0^\infty J_0(x) dx = 1$$

并注意到 $\gamma c = \hat{\gamma} \hat{c} = Rf$, 很容易证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} G_1 = 0$$

这说明了波动的频散性。

三、 $\alpha > 0$ 稳定大气里的高频重力惯性波

在 $\alpha > 0$ 的稳定层结大气中, 令 $\alpha\beta = a^2$, 则得到如下形式的点源扰动影响函数:

$$\begin{cases} G_0 = \left(\frac{J_0(c\hat{t})}{\hat{\gamma}} - \frac{J_0(\hat{c}\hat{t})}{\hat{\gamma}} \right) - a \int_0^t \left(\frac{J_0(c\tau)}{\hat{\gamma}} - \frac{J_0(\hat{c}\tau)}{\hat{\gamma}} \right) J_1(a(t-\tau)) d\tau \\ G_1 = \int_0^t \left(\frac{J_0(c\tau)}{\hat{\gamma}} - \frac{J_0(\hat{c}\tau)}{\hat{\gamma}} \right) J_0(a(t-\tau)) d\tau \end{cases} \quad (9)$$

其中 J_1 是一阶贝塞尔函数, $c^2, \hat{c}^2$ 表达式同(6)。这里 G_0, G_1 所代表的仍然不是波型不变的以 $(\gamma - ct)$ 为宗量的简单行波, 而是形态更复杂的重力惯性波。当 $\alpha \rightarrow 0$ 即 $a \rightarrow 0$ 时, 由重力因子 g 和地球旋转惯性因子 f 共同决定的重力惯性频率 c 及 $\hat{c}$ 蜕化为简单的惯性频率, (9) 式所代表的重力惯性波蜕化为(8)所代表的低频惯性振荡。

(9) 式的波动解包括相互作用的两个部分。一部分是纯重力波, 它的频率单一地由 a 决定亦即由层结参数 α 及重力因子 g 决定, 如出现在积分界下的 $J_0(a(t-\tau))$ 和 $J_1(a(t-\tau))$ 。另一部分是以 ct 和 $\hat{c}t$ 为宗量的零阶贝塞尔函数, c 和 $\hat{c}$ 由重力-层结因子及地球旋转因子 f 共同决定, 这两个因子的相对重要性按方位角 δ 变化, 在 $\delta = 0$ 处, 亦即“扰源”正上下方, 激发的是纯重力振动, 在 $\delta = \frac{\pi}{2}$ 即“扰源”同一平面上, $c = f$, 激发的是纯惯性振动。

由层结稳定度决定的纯重力波频率 α 有很宽的变化范围,但在常见的层结稳定度下,它一般是高频的.若 $\alpha > 1$ 度/公里,则其周期一般小于 20 分钟.若取 $\beta = g/\bar{\theta} = \frac{10\text{m/S}^2}{300^\circ\text{K}}$,通常,以 α 表征的重力波频率可比惯性频率高几十倍到上百倍.表 2 给出不同稳定度下的重力波频率及相应的周期.这里,零阶贝塞尔函数的周期 T 将近似地以 $2\pi/\alpha$ 代替.

表 2 不同层结参数下的重力波周期

α (度/100 米)	1	0.6	0.5	0.3	0.1	0.01	3×10^{-3}	3×10^{-7}
α (秒 ⁻¹)	1.8×10^{-2}	1.41×10^{-2}	1.3×10^{-2}	10^{-2}	5.9×10^{-3}	1.8×10^{-3}	10^{-4}	10^{-7}
T	5.8(分)	7.4(分)	8.1(分)	10.4(分)	17.7(分)	58(分)	17.3(小时)	173(小时)

比较表 1 和表 2 可知,稳定大气里主要是周期小于 20 分钟的高频波,而中性大气里的惯性波动都是周期大于 12 小时的低频波动.有了这两个数量,可以很容易地由 (10) 决定“扰源”附近各固定点上重力惯性振动频率的分布特征.当取 $f = 10^{-5}\text{s}^{-1}$, $\alpha = 10^{-5}\text{s}^{-1}$ 时,由

$$c^2 = f^2 \sin^2 \delta + \alpha^2 \cos^2 \delta = f^2 \sin^2 \delta \left(1 + \frac{\alpha^2}{f^2} \cot^2 \delta \right) \quad (10)$$

得知,在 $\frac{R}{z' - z} = \tan \delta \gg \frac{\alpha}{f} \sim 10^3$ 的区域,以缓慢的惯性振动为主,在 $\frac{R}{z' - z} \ll 10^3$ 的区域,以快速重力振动为主.在 $z' - z = 0$ 的平面上 $c = f$; 在 $R = 0$ 的“扰源”正上、下方, $c = \sqrt{\alpha\beta} = \alpha$.

δ 的分布具有和 c 相似的特征.

总的说来,在“扰源”上、下方及相当大的一个方位角内主要激发重力快波,而在“扰源”的准水平方向则引起缓慢的惯性振动.

稳定大气 G_1 的数值积分曲线见图 4,在 $\alpha = 0.6$ 度/100 米这样稳定的大气中,平均波动周期只有大约 11 分钟,而相应的中性大气波动周期却长达 24 小时.

对比图 4 和图 3,一个明显的差别是中性大气里 G_1 所表征的惯性振动的振幅比非常稳定的大气里的重力惯性快波的振幅要大 160 倍,同时周期也长 140 多倍.当然在较弱的稳定度下,二者的差别将会小一些.这种对比说明,在层结接近中性时产生的惯性振动的强度足以激发强大的对流.它应该比一般稳定大气里的重力惯性快波具有更直接的天气意义.

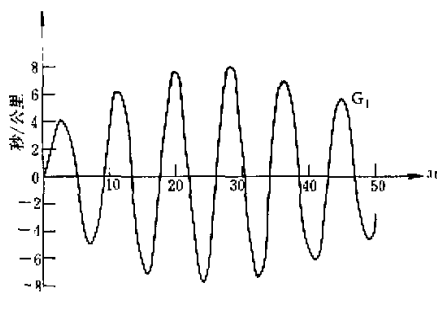


图 4 稳定大气中的高频小振动(平均周期约 11 分钟,最大振幅 8S/KM, $\alpha = 0.6$ 度/100 米,其他参数同图 3)

四、 $\alpha < 0$ 不稳定大气里的解

$\alpha < 0$ 的层结不稳定大气可为对流提供不稳定增长的能量.令 $\alpha^2 = -\alpha\beta$, 则

$$c^2 = \frac{R^2 f^2 - a^2(z' - z)^2}{\gamma^2}; \quad \varepsilon^2 = \frac{R^2 f^2 - a^2(z' + z)^2}{\hat{\gamma}^2}; \quad (11)$$

c 和 ε 均小于 f 。

如图 5 所示,通过“扰源”点 o ,用两个立体锥面将空间分成三部分 I、II 和 III,扰动在各个区域具有不同的发展形式:

1. 在 $c^2, \varepsilon^2 > 0$ 的区域 I, 即 $R = \frac{a}{f}(z' + z)$ 圆锥面以外,有:

$$\begin{cases} G_0 = \left(\frac{J_0(ct)}{\gamma} - \frac{J_0(\varepsilon t)}{\hat{\gamma}} \right) + a \int_0^t \left(\frac{J_0(c\tau)}{\gamma} - \frac{J_0(\varepsilon\tau)}{\hat{\gamma}} \right) I_1(a(t-\tau)) d\tau \\ G_1 = \int_0^t \left(\frac{J_0(c\tau)}{\gamma} - \frac{J_0(\varepsilon\tau)}{\hat{\gamma}} \right) I_0(a(t-\tau)) d\tau \end{cases} \quad (12)$$

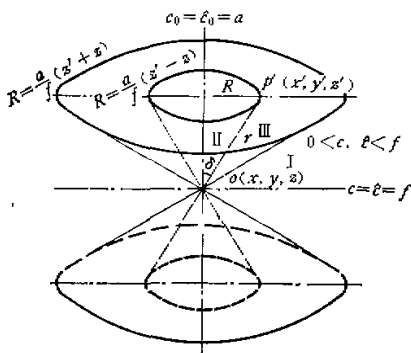


图 5 不稳定层结大气中惯性振动频率 c, ε 及不稳定增长率 c_0, ε_0 的空间分布

式中 I_0, I_1 分别是零阶和一阶的虚宗量贝塞尔函数,它们随时间单向增长并很快淹没 $J_0(ct)$ 和 $J_0(\varepsilon t)$ 代表的慢振动。图六表明当 $ft = 10$ 时, G_1 的值比 $ft = 1$ 时增长了两个量级。

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, (12) 式的增长型扰动蜕化为 (8) 式所代表的衰减的惯性波动。值得注意的是层结参数的作用。稳定层结时的纯重力波动部分 $J_0(a(t-\tau))$ 在不稳定大气里表现为使

$\left(\frac{J_0(ct)}{\gamma} - \frac{J_0(\varepsilon t)}{\hat{\gamma}} \right)$ 增长的增幅因子 $I_0(a(t-\tau))$ 增长

的增幅因子 $I_0(a(t-\tau))$ 增长,这表明不稳定大气的基本场能量通过重力惯性波的增幅转变成增长的扰动能量。由于这里假定基本场层结参数 α 不变,扰动不断从基本场取得能源而无限增长。如果考虑增长着的扰动对基本场的反馈,考虑扰动向上输送热能而使层结重新稳定化的过程,则一旦重新达到 $\alpha = 0$ 或 $\alpha > 0$, 扰动的性质将变为按 (8) 式或 (9) 式衰减的波动。

2. 在 $c^2, \varepsilon^2 < 0$ 的区域 II, 即在 $R = \frac{a}{f}(z' - z)$ 的圆锥面以内, 得到单向增长的扰

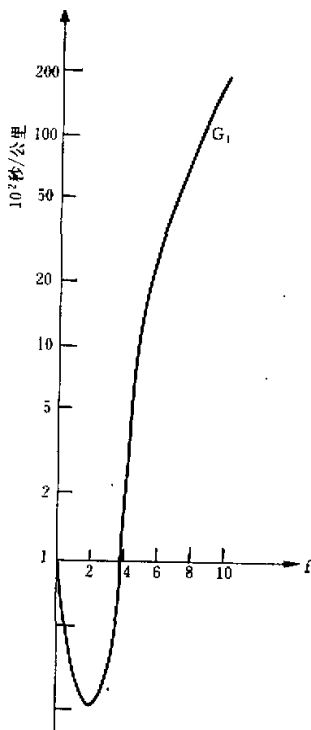


图 6 不稳定大气在 I 区中的 G_1 曲线
(取 $a^2 = f^2/2$, 位置参数同图 3)

动.

令 $c_0^2 = -c^2$, $\ell_0^2 = -\ell^2$, 则有

$$\begin{cases} G_0 = \left(\frac{I_0(c_0 t)}{\gamma} - \frac{I_0(\ell_0 t)}{\hat{\gamma}} \right) + a \int_0^t \left(\frac{I_0(c_0 \tau)}{\gamma} - \frac{I_0(\ell_0 \tau)}{\hat{\gamma}} \right) I_1(a(t-\tau)) d\tau \\ G_1 = \int_0^t \left(\frac{I_0(c_0 \tau)}{\gamma} - \frac{I_0(\ell_0 \tau)}{\hat{\gamma}} \right) I_0(a(t-\tau)) d\tau \end{cases} \quad (13)$$

3. 在 $\frac{a}{f}(z' - z) < R < \frac{a}{f}(z' + z)$ 的区域 III 内有 $c^2 > 0$, $\ell^2 = -\ell_0^2 < 0$, 于是

$$\begin{cases} G_0 = \left(\frac{J_0(ct)}{\gamma} - \frac{I_0(\ell t)}{\hat{\gamma}} \right) + a \int_0^t \left(\frac{J_0(c\tau)}{\gamma} - \frac{I_0(\ell \tau)}{\hat{\gamma}} \right) I_1(a(t-\tau)) d\tau \\ G_1 = \int_0^t \left(\frac{J_0(c\tau)}{\gamma} - \frac{I_0(\ell \tau)}{\hat{\gamma}} \right) I_0(a(t-\tau)) d\tau \end{cases} \quad (14)$$

(14)式中的 $\frac{I_0(\ell t)}{\hat{\gamma}}$ 是比 $\frac{J_0(ct)}{\gamma}$ 更重要的发展部分.

五、 $f=0$ 赤道区域的蜕化解

前面的讨论和文献[1]的实验结果一致表明,旋转系统流体和不旋转系统流体的对流在动力学上有本质的不同. 由于系统的旋转,对流带有明显的惯性特征,这在中性大气中尤为突出. 本文同时给出相应于 $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ 和 $\alpha < 0$ 三种层结状态下 $f=0$ 的蜕化解,其解形所表明的运动与转盘不转时的实验结果一致.

1. $\alpha = 0$ 的中性大气:

在(8)式中令 $f = 0$ 得

$$\begin{cases} G_0 = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\hat{\gamma}} \\ G_1 = \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\hat{\gamma}} \right) t \end{cases} \quad (15)$$

G_0 和 G_1 的形态说明在赤道区域的中性大气里,既无重力波,也无惯性波. 但 $\lim_{t \rightarrow \infty} G_1 \rightarrow \infty$ 是发散的,即温度场的不均匀扰动可以激发不稳定单向增长.

2. $\alpha > 0$ 的稳定大气:

在(6)式中令 $f = 0$, $\alpha\beta = a^2$, 则 $c = a \cos \delta$, $\ell = \frac{z' + z}{\hat{\gamma}} a$; G_0 和 G_1 的表达式与

(9)式相同,但扰动频率单纯由重力——层结因子及方位角 δ 决定,即赤道区域的稳定大气中,若不计 β 效应,则除大型涡旋运动外只有纯重力波.

3. $\alpha < 0$ 的不稳定大气:

令 $\alpha\beta = -a^2$, 则 $c_0 = a \cos \delta$, $\ell_0 = \frac{z' + z}{\hat{\gamma}} a$. 和非赤道区域不同的是,这里永远不

出现 $c^2, \ell^2 > 0$ 的情况,故 G_0 和 G_1 同(13)式,扰动单向增长.

总之,由于 $f = 0$,运动性质发生了根本的变化. 除稳定大气里还容许纯重力快波外,中性和不稳定大气中均消去了惯性振动,而表现为扰动单向增长. 这和实验中发现的现

象是完全一致的: 转台旋转时中性到不稳定层结中出现大振幅惯性对流脉冲, 一旦转台停转, 除高频小波外, 温度和垂直速度的大振幅脉冲全部消失, 代之以温度的单向增长和连续的对流运动. 这就从实验上和理论上同时证明了大振幅对流脉冲的惯性特征. 至于重力波, 在高、中、低纬的稳定大气中都是存在的, 只不过在非赤道区域, 重力波频率还受到地转参数的部分修正.

六、不稳定惯性对流的激发条件

我们用一个简单的线性模式讨论激发不同尺度不稳定惯性对流所需的层结条件, 作为稳定性讨论, 线性假设是允许的, 在动力学上, 我们也把这种考虑地球旋转效应的对流叫惯性对流.

在(1)式中加入三维同性的湍流粘性:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - f v - k \Delta_3 u = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} + f u - k \Delta_3 v = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \beta \theta - k \Delta_3 w = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha w - k \Delta_3 \theta = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

其中 k 是动量和位温的湍流扩散系数, 这里权取作常数. 消去其它变数后得到

$$\mathcal{L}(w) \equiv \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - k \Delta_3 \right)^2 \Delta_3 + \alpha \beta \Delta_3 + f^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] w = 0 \quad (17)$$

设对流深度为 h , 则可以有如下形态的基本解:

$$w \sim A e^{\sigma t} \sin \frac{\pi x}{h} \sin m \frac{\pi x}{h} \sin n \frac{\pi y}{h} \quad (18)$$

其中 m^{-1} 、 n^{-1} 是以 h 为单位的无因次半波长, 即 $m^{-1} = L_x/h$, $n^{-1} = L_y/h$, (L_x , L_y 分别是 x , y 方向的半波长), 将(18)代入(17)得

$$\sigma = \sqrt{-\frac{\alpha \beta (m^2 + n^2) + f^2}{1 + m^2 + n^2} - k(1 + m^2 + n^2) \frac{\pi^2}{h^2}} \quad (19)$$

为了得到不稳定对流, 必须满足 $\sigma > 0$, 这时要求层结参数 $\alpha < \alpha_f$, 若 α_f 是某纬度上产生不稳定对流所需的临界稳定度, α_0 是 α_f 在 $f = 0$ 处之值, 则

$$\begin{cases} \alpha_f = -\frac{k^2(1 + m^2 + n^2)^3 \pi^4 + h^4 f^2}{\beta(m^2 + n^2) h^4} \\ \alpha_0 = -\frac{k^2(1 + m^2 + n^2)^3 \pi^4}{\beta(m^2 + n^2) h^4} \end{cases} \quad (20)$$

(20)式明显表示出地球旋转对对流的抑制作用. 因为 $|\alpha_0| < |\alpha_f|$, 故在低纬, 临界不稳定

条件减弱,在 $f = 0$ 处,只要克服粘性,便可产生不稳定对流,特别在无粘理想大气中有

$$\begin{cases} \alpha_l = -\frac{f^2}{\beta(m^2 + n^2)} \\ \alpha_0 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

(21)式更明显地表明了地球旋转对对流的抑制作用,纬度越高,抑制得越厉害。在同样层结条件下,赤道地区比中高纬度更易发生不稳定对流。

不稳定惯性对流的尺度不仅依赖于层结状态,也受到所处纬度的制约。

定义无因次水平尺度 $l = \frac{R}{h} = (m^2 + n^2)^{-\frac{1}{2}}$, 当 $n = 0$ 时, $R = L_x$, 当 $m = 0$ 时 $R = L_y$, 由(21)式得理想大气的临界对流尺度

$$l_0 = (m^2 + n^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-\alpha_l \beta}}{f} \quad (22)$$

只有无因次尺度小于 l_0 的对流才能得到发展。表 3 给出各个纬度带上不同层结条件下的无因次临界对流尺度 l_0 。

表 3 不稳定对流的临界尺度 l_0

l_0 \ 纬度 α (度/公里)	5	10	15	20	30	45	60	90
-3×10^{-4}	8.15	4	2.75	2.06	1.41	1	0.82	0.71
-3×10^{-2}	81.5	40	27.5	20.6	14.1	10	8.2	7.1
-0.1	148	72.5	49.5	37.6	30.4	18.2	14.8	12.9

表 3 表明,纬度越低,层结越不稳定,则不稳定惯性对流的相对尺度越大;纬度越高,不稳定性越弱,则所能允许发生的不稳定惯性对流尺度越小。在固定纬度上,对流尺度越大,所要求的不稳定度越强。在云图上可见到中、高纬度常出现大片细胞状积云,积云单体尺度较小,而低纬度则易出现大范围积状云团,尺度从几十公里到几百公里不等。维持时间和生命史也有很大差异。高、中、低纬对流活动性质如此不同,除层结热力条件和环流条件不同外,很可能就是不同纬度地球自转的动力效应所引起的。

如果考虑湍流粘性对较小尺度对流的耗散作用,则由(19)式还可得到最佳对流尺度。对于长条轴状对流,在 $-\alpha\beta = 10^{-6}(\text{S}^{-2})$ $f = 10^{-4}(\text{S}^{-1})$, $k = 10^3 \text{M}^2/\text{S}$, $h = 10$ 公里时,最佳对流尺度约为 20 公里。

结 语

本文的讨论主要是为了揭示旋转系统流体力学实验中所发现的惯性对流的物理性质。

所得结果的物理方面也许在天气学分析和数值预报模式设计上可作为参考。

1. 与实验事实的比较。文献[1]所作的青藏高原对流活动的模拟实验表明,在旋转系

统的层结不稳定流体中,会激发具有 1—2 倍于转台惯性周期的强对流——惯性对流。这种对流伴有相应的下层气旋性辐合和上层反气旋性辐散。本文则从动力学上证明了在中性到弱不稳定层结的旋转流体中,必然产生一种周期大于或等于地球惯性周期的垂直运动振动,它的幅度远比稳定层结流体中的高频重力惯性波大。它可能就是实验所发现的惯性对流。这里,实验和理论分析同时考查了两个共同的基本因素:一个是地球(或转盘)的自转,二是流体层结稳定度的作用。二者所得的结果是相当一致的。它们共同证明了 $f \neq 0$ 和 $\alpha \leq 0$ 是产生惯性对流的充分必要条件。

2. 与天气事实的比较。实际大气的各种对流系统在高、中、低纬有许多不同的动力学特征。中高纬的对流强度较小,空间尺度较小,寿命也较短。低纬发生的对流则强度大,对流云团尺度大,维持时间也较长。造成这些不同特征的原因,除低纬洋面高温高湿,常能维持条件不稳定的有利热力学条件外,还与各个纬度上地球旋转的动力性质有关。地球旋转对对流起抑制作用。高中纬 f 大,对对流抑制作用强,惯性周期短;低纬 f 小,对对流抑制作用弱,惯性周期也较长。近年我国的天气学分析发现^{[5]1)},在夏季,青藏高原作为大气热源,大气经常处于层结位势不稳定状态,盛行对流活动,除细胞状对流云和地形性对流云之外,还经常出现空间尺度 100—500 公里、由积云团组成的对流性低涡。这些低涡的生命史有 90% 在 1—2 天之间。注意到青藏高原所在纬度 (30°N) 的惯性周期恰好是一天,按文献[1]定义的周期指数 $K = \frac{\text{对流周期}}{\text{惯性周期}}$,青藏高原上这种大型对流性低涡活

动的周期指数 K 也在 1—2 之间,与实验结果很相近。夏季高原上的这种对流很可能就是旋转层结不稳定流体中的惯性对流。此外,在低纬洋面,特别在赤道辐合带这种有利的大尺度流场内,常可隔几天形成一个或一个以上带有涡旋结构的对流群体——台风。注意 10°N 到 5°N 处地球的惯性周期正好是 3—6 天,可否认为台风的形成除受热力学条件和大尺度环流影响外,还受到台风形成纬度处地球惯性周期的影响,即大型对流的发生即使在层结条件满足的情况下也具有一定的间歇性,不可能在短于该纬度处惯性周期的时间内在同一区域再度发生。

以上提到的夏季高原和热带洋面上的大气都具有持续的位势不稳定层结条件,有利于对流重复出现。至于中尺度对流、持续性暴雨等过程是否也具有惯性对流特征(特别是在能维持持续性位势不稳定和低空辐合的大尺度环流背景下),还需要进行大量的天气学分析。

3. 关于数值预报模式的设计。在一般大尺度静力平衡数值预报模式中,通常用参数化办法考虑对流的统计效果,并在出现层结不稳定时及时调整到稳定状态,这些作法有一定成效。但是,正如本文的分析和实验所表明的那样,静力平衡假定将漏掉强大的惯性对流(其时间尺度可达一天以上),漏掉这种最强的非地转扰动,而只能描写幅度相对微弱的稳定层结大气里的重力惯性波。可以证明它还同时造成虚假的高频振动。由于不同温湿特性气流的平流过程,预报过程中完全可能出现 $\alpha < 0$ 的区域,这时运动型式将立即改变,如果不进行人为的调整,那就必须使模式具有非静力平衡对流调整能力,通过对流向上迅

1) 关于高原低涡的统计研究,青藏高原低值系统会议报告(未发表),1975 年。

速输送热量和水汽, 释放不稳定位势能量, 使基本场重新稳定化。因此, 对于带有强对流天气过程的预报, 或对经常处于位势不稳定状态的大气区域, 建议设计更完全的非静力平衡和层结自动调整的模式, 才能更实际地逼近大气过程。

参 考 资 料

- [1] 大气物理研究所模拟实验组, 青藏高原上空夏季温度场及大型对流系统的模拟实验, 中国科学, 1977 年第五期。
- [2] 巢纪平、周晓平, 积云动力学, 科学出版社, 1964 年。
- [3] H. Flohn, Contributions to meteorology of tibetan highlands, Atm. Sci. Papers, No. 130, Colorado State University.
- [4] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Vol. 34, No. 4.
- [5] 叶笃正、李吉顺、高登义, 夏季青藏高原对流活动对平均环流维持的作用, 青藏高原气象论文选编, 1974。
- [6] 陈秋士, 惯性波的对流不稳定和台风形成初期阶段的物理分析, 气象学报, 1964 年。
- [7] 曾庆存, 斜压大气中的小扰动和地转适应过程(未发表), 1964。

更 正

本刊 1975 年 174 页“初始方程数值模式的一个计算格式在有限区域预报的试验”一文的更正。

误

图 4a 1972 年 6 月 20 日高度图

图 4b 1972 年 6 月 20 日气压图

图 5a 1972 年 6 月 21 日高度图

图 5b 1972 年 6 月 21 日气压图

正

图 5a 1972 年 6 月 21 日高度图

图 5b 1972 年 6 月 21 日气压图

图 4a 1972 年 6 月 20 日高度图

图 4b 1972 年 6 月 20 日气压图

本刊 1977 年 265 页“《711》雷达测雨能力的分析”一文的更正

误

267 页 17 行 $Z-R$ 关系^[1]

$$19 \text{ 行 } c = \frac{1024(\ln Z) \cdots}{\pi^2 P_i G^2 h \theta^2}$$

附注 2) 高空科编的

$$268 \text{ 页倒数第 4 行 } R_{\text{总}}(r) = 10 - \frac{\lg\left(-\frac{\ln P(r)}{a}\right)}{b} + R_0$$

正

$Z-R$ 关系^[4]

$$c = \frac{1024(\ln 2) \cdots}{\pi^2 P_i G^2 h \theta^2}$$

高空科的

$$R_{\text{总}}(r) = 10 - \frac{\lg\left(-\frac{\ln P(r)}{a}\right)}{b} + R_0$$