数值天气预报中的差分方法
——非线性差分格式的误差估计

郭 本 瑜
（上 海 科 学 技 术 大 学）

在数值天气预报的差分方法中应考虑：一是根据物理定律构造合适的格式，二要估计初始条件观测误差，计算舍入误差或侧向边界条件计算误差对预报值的影响，三要克服非线性不稳定现象。一般把格式的守恒性当作克服不稳定性的一种重要手段，但只有定性的说明，可见[1]—[4]。1965年作者[5]—[7]提出了加权平均守恒法，也提供了严格估计误差的一种方法，本文以最简单的全球预报正压模式为例来说明它。

用R表示(x_1, x_2)平面中的有界开域，Γ是其边界。x_j方向的步长是h，网格点Q的坐标是$x_j(Q)=k_j(Q)h$，$j=1, 2$，$k_j(Q)$是整数。Q的四个邻点记为$Q^{\pm x_j}$，其坐标为$x_j(Q^{\pm x_i})=x_j(Q)\pm\delta_{i,j}h$。$R_h$表示网格区域的内点集合，$\Gamma_h$是其边界。$\Gamma_{jM}$是$\Gamma_h$上一部分点$Q$的集合，使得$Q^{-x_j}$在$R_h$内。$\Gamma_{jm}$是$\Gamma_h$上另一部分点$Q$的集合，它使得$Q^{+x_j}$在$R_h$内。详见图 1。

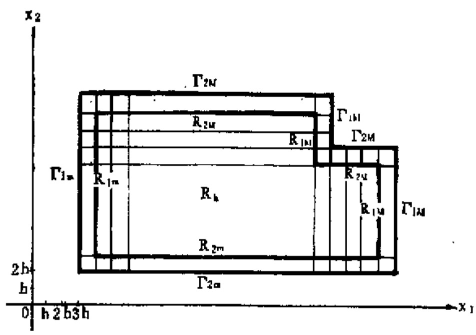

图 1

与Γ_{jM}（或Γ_{jm}）相距为h的全部内点集合，被记为R_{jM}（或R_{jm}）。又记$R_j=R_{jM}+R_{jm}$，$R_h^*=R_1+R_2$，$\Gamma_j=\Gamma_{jM}+\Gamma_{jm}$。

t方向的网格步长记为τ，$\lambda=\tau h^{-2}$，$w(Q, k)$表示网格函数w在Q点和$k\tau$时刻的值。对固定的k，全部$w(Q, k)$的值就是一组值，记为$w(k)$，有时简记为w。$w(k+1)$简记为$\bar{w}(k)$或$\bar{w}$。

$$w_{x_j}(Q, k)=\frac{1}{h}\left[w(Q^{+x_j}, k)-w(Q, k)\right],$$

$$w_{\bar{x}_j}(Q,k)=\frac{1}{h}\left[w(Q,k)-w(Q^{-x_j},k)\right],$$

$$w_{\hat{x}_j}(Q,k)=\frac{1}{2}\left[w_{x_j}(Q,k)+w_{\bar{x}_j}(Q,k)\right],$$

$$\Delta^{\nu}_{x_j}w(Q,k)=\frac{1}{2}\left[\nu(Q,k)w_{x_j}(Q,k)\right]_{\bar{x}_j}+\frac{1}{2}\left[\nu(Q,k)w_{\bar{x}_j}(Q,k)\right]_{x_j},$$

$$\Delta^{\nu}w(Q,k)=\sum_{j=1}^{2}\Delta^{\nu}_{x_j}w(Q,k)。$$

若 $\nu\equiv 1$，则把 $\Delta^{\nu}(Q,k)$ 记为 $\Delta w(Q,k)$。$w_t(Q,k)$，$w_{\bar{t}}(Q,k)$ 等的定义也相类似。

$w_n(Q,k)$ 表示 R^*_h 上的法向差商，若 $Q\in R_{jM}$，则 $w_n(Q,k)=w_{x_j}(Q,k)$，若 $Q\in R_{jm}$，则 $w_n(Q,k)=-w_{\bar{x}_j}(Q,k)$，$w_s(Q,k)$ 表示在 R^*_h 或 Γ_h 上的切向差商，也就是说

$$w_s(Q,k)=\begin{cases} w_{\hat{x}_2}(Q,k), & \text{当 } Q\in R_{1M} \text{ 或 } Q\in\Gamma_{1M},\\ -w_{\hat{x}_1}(Q,k), & \text{当 } Q\in R_{2M} \text{ 或 } Q\in\Gamma_{2M},\\ -w_{\hat{x}_2}(Q,k), & \text{当 } Q\in R_{1m} \text{ 或 } Q\in\Gamma_{1m},\\ w_{\hat{x}_1}(Q,k)。 & \text{当 } Q\in R_{2m} \text{ 或 } Q\in\Gamma_{2m}。\end{cases}$$

若 $Q\in R^*_h$，我们就把 Γ_h 上与 Q 相距为 h 的点记为 Q'，并把和式 $\sum\limits_{Q\in R^*_h}h\,(w\,(Q')\,v\,(Q)+w(Q)v(Q'))$，简记为 $\sum\limits_{R^*_h}h(w'v+wv')$，等等。又定义下列内积和范数:

$$(w,v)=\sum_{Q\in R_h}h^2w(Q)v(Q),$$

$$\|w\|=(w,w)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|w\|^2_{1\nu}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\|\sqrt{\nu}\,w_{x_j}\|^2+\|\sqrt{\nu}\,w_{\bar{x}_j}\|^2\right),$$

$$\|w\|^2_1=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\|w_{x_j}\|^2+\|w_{\bar{x}_j}\|^2\right),$$

$$\|w\|^2_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\|w_{x_j}\|^2_1+\|w_{\bar{x}_j}\|^2_1\right),$$

$$\|w\|^2_{\Gamma_h}=\sum_{Q\in\Gamma_h}hw^2(Q),$$

$$B_{R_j}(u,v,w)=\frac{h}{2}\sum_{R_j}(u'v+uv')w,$$

$$B_{R^*_h}(u,v,w)=\sum_{j=1}^{2}B_{R_j}(u,v,w)。$$

一、差分格式的守恒性

用 ξ 和 ψ 表示绝对涡度和旋转风的流函数，f 是柯氏系数，那末最简单的正压模式是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}\dfrac{\partial \xi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}\dfrac{\partial \xi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu \dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu \dfrac{\partial \xi}{\partial x_2}\right) = 0, \\ \nabla^2\psi - \xi + f = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\nu(x_1, x_2, t)$ 是粘性系数，$\nu_1 \geqslant \nu(x_1, x_2, t) \geqslant \nu_0 \geqslant 0$，今后还假定 $|\nu_t|$ 有界。

构造差分格式的基本原则是用合适的离散形式来表达物理定律。其实若 $\nu \equiv 0$，则

$$E_i(\xi, t) = \iint_R \xi^i(x_1, x_2, t)dx_1dx_2 = \iint_R \xi^i(x_1, x_2, 0)dx_1dx_2$$

$$+ \int_0^t \int_\Gamma \xi^i(x_1, x_2, \tau)\left(\frac{\partial \psi(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \psi(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_2}dx_2\right)d\tau \tag{1.2}$$

其中 $i = 1, 2$。这表示在区域 R 内，ξ 的平均值或平方平均值的增量仅与边界上的相应流量有关，并在下列两种条件下，$E_i(\xi, t)$ 守恒，

(A) 边界上的零流条件。

(B) 边界上的周期条件。即 ξ，ψ 等在 x_j 方向具有周期 L_j，R 是长方形：$0 \leqslant x_j \leqslant L_j$，但此时(1.1)的解 $\psi(x_1, x_2, t)$ 可相差一个常数。为了确定起见，假定在内点 Q^*，$\psi(Q^*, k) = \text{const}$。

由于步长非零，差分格式很难同时模拟 E_1, E_2 的守恒性。Lax 型格式是模拟了 E_1 的守恒性，加权平均守恒法则模拟了 E_2 的守恒性。由于(1.1)中的 Jacobin 算子可写成下列形式：

$$\alpha_1(t)\left[\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right] + \alpha_2(t)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\xi\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\xi\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)\right]$$

$$+ \alpha_3(t)\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\psi\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2}\psi\right)\right], \text{ 其中 } \alpha_l(t) \geqslant 0, \sum_{l=1}^{3}\alpha_l(t) \equiv 1, \tag{1.3}$$

因此构造下列差分算子：

$$J_{x_1,1}(v, w) = v_{\hat{x}_1}w_{\hat{x}_2}, \qquad J_{x_2,1}(v, w) = -v_{\hat{x}_2}w_{\hat{x}_1},$$

$$J_{x_1,2}(v, w) = (vw_{\hat{x}_2})_{\hat{x}_1}, \qquad J_{x_2,2}(v, w) = -(vw_{\hat{x}_1})_{\hat{x}_2},$$

$$J_{x_1,3}(v, w) = -(v_{\hat{x}_2}w)_{\hat{x}_1}, \qquad J_{x_2,3}(v, w) = (v_{\hat{x}_1}w)_{\hat{x}_2},$$

$$J_{x_j}(v, w) = \sum_{l=1}^{3}\alpha_l J_{x_j,l}(v, w), \quad J_l(v, w) = \sum_{j=1}^{2} J_{x_j,l}(v, w),$$

$$J(v, w) = \sum_{j=1}^{2} J_{x_j}(v, w) = \sum_{l=1}^{3}\alpha_l J_l(v, w)。$$

可以直接验证

$$J(v, w) = J_1(v, w) + \frac{\alpha_2 h^2}{2}(v_{x_1}w_{\hat{x}_2x_1})_{\bar{x}_1} - \frac{\alpha_2 h^2}{2}(v_{x_2}w_{\hat{x}_1x_2})_{\bar{x}_2}$$

$$+ \frac{\alpha_3 h^2}{2}(w_{x_2}v_{\hat{x}_1x_2})_{\bar{x}_2} - \frac{\alpha_3 h^2}{2}(w_{x_1}v_{\hat{x}_2x_1})_{\bar{x}_1}。 \tag{1.4}$$

关系式 I $(u, v_{\hat{x}_j}) + (v, u_{\hat{x}_j}) = \frac{h}{2}\sum_{R_{jM}}(u'v + uv') - \frac{h}{2}\sum_{R_{jm}}(u'v + uv')$。

证明 先考虑一排点 Q_i，$0 \leqslant i \leqslant l$，其坐标是 $x_{j'}(Q_i) = \text{const}$，$x_j(Q_i) = ih$，其中 $j \neq j'$，且 $Q_0 \in \Gamma_{jm}$，$Q_l \in \Gamma_{jM}$。又暂记 $u_i = u(Q_i)$，于是由 Abel 公式得

$$\sum_{i=1}^{l-1}[hu_i(v_{\bar{x}_j})_i + h(u_{x_j})_i v_i] = u_l v_{l-1} - u_1 v_0, \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{l-1}[hv_i(u_{\bar{x}_j})_i + h(v_{x_j})_i u_i] = v_l u_{l-1} - v_1 u_0, \tag{1.6}$$

用 h 乘以上两式，相加后再在 $x_{j'}$ 方向求和即得所证。

关系式 II $(u, J_{x_j,1}(v, w)) + (v, J_{x_j,2}(u, w)) = B_{R_j}(u w_3, v, 1)$。

证明 例如在关系式中，令 $j = 1$，并用 $uw_{\hat{x}_1}$，代替其中的 u，即得所证的第一式。

关系式 III $(u, J_3(v, w)) + (v, J_3(u, w)) = -B_{R_h^*}(u, wv_3, 1) - B_{R_h^*}(v, wu_3, 1)$，

证明 在关系式 I 中，先后令 $j = 1$（或 2），并用 $-v_{\hat{x}_2}w$（或 $v_{\hat{x}_1}w$）代替其中的 v，把两次结果相加，得

$$(u, J_3(v, w)) + (w, J_1(v, u)) = -B_{R_h^*}(u, v_3 w, 1),$$

类似地有

$$(v, J_3(u, w)) + (w, J_1(u, v)) = -B_{R_h^*}(v, u_3 w, 1),$$

把以上两式相加即得所证。

关系式 IV 若 $\alpha_1 = \alpha_2$，则

$$\begin{aligned}(u, J(v, w)) + (v, J(u, w)) = {} & \alpha_1 B_{R_h^*}(uw_3, v, 1) + \alpha_1 B_{R_h^*}(vw_3, u, 1) \\ & - \alpha_3 B_{R_h^*}(u, wv_3, 1) - \alpha_3 B_{R_h^*}(v, wu_3, 1)。\end{aligned}$$

证明 在关系式 II 中，分别令 $j = 1, 2$，并把两次结果相加即得

$$(u, J_1(v, w)) + (v, J_2(u, w)) = B_{R_h^*}(uw_3, v, 1), \tag{1.7}$$

类似地有

$$(v, J_1(u, w)) + (u, J_2(v, w)) = B_{R_h^*}(vw_3, u, 1),$$

把上式的 α_1 倍，(1.7)的 α_1 倍和关系式 III 的 α_3 倍相加，即得所证。

特别若边界上满足条件(A)或(B)，(此时 R_h 取长方形 $0 \leqslant x_j \leqslant L_j - h$)，则关系式 IV 右端各项都等于零，并且

$$(u, J(v, w)) + (v, J(u, w)) = 0。 \tag{1.8}$$

今用 η, φ 和 $J(\eta, \varphi)$ 来逼近 ξ, ψ 和(1.3)，若 $\alpha_1 = \alpha_2$，则由关系式 IV 得到

$$(\eta, J(\eta, \varphi)) = \alpha_1 B_{R_h^*}(\eta\varphi_3, \eta, 1) - \alpha_3 B_{R_h^*}(\eta, \varphi\eta_3, 1), \tag{1.9}$$

它表示 R_h 内的涡度平方总传输量，仅由边界上的流量所决定。特别若在边界上满足条件(A)或(B)，则 $(\eta, J(\eta, \varphi)) = 0$。显然，$\alpha_1 = \alpha_2$ 是模拟 E_2 守恒性的最优参数。

根据上述讨论，即得计算(1.1)的一类格式

$$\begin{cases} L_1(\eta, \varphi) = \eta_t - J(\eta + \delta\tau\eta_t, \varphi) - \Delta\nu(\eta + \sigma\tau\eta_t) = 0, \\ L_2(\eta, \varphi) = \Delta\varphi - \eta + f = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

其中 $0 \leqslant \delta(k) \leqslant 1$，$0 \leqslant \sigma_0 \leqslant \sigma(k) \leqslant \sigma_1 \leqslant 1$。下面作两点说明：

(1) $\delta(k)$ 是根据作者在[5]中提出的非线性项局部隐式化方法而添入的。若 $\delta \equiv \sigma \equiv 0$，(1.10) 是显式格式。若 $\delta \neq 0$，则在 (1.10) 中出现 $\delta\eta(k+1)+(1-\delta)\eta(k)$ 的值。所以是隐式的。但由于未采用 $\varphi+\delta\tau\varphi_t$，故在计算 $\eta(k+1)$ 时避免了非线性迭代。

引入 δ 的物理意义是使(1.10)严格满足守恒律。事实上，假定 $\delta \equiv \nu \equiv 0, \alpha_1=\alpha_2$，且满足边界条件($A$)或($B$)，今用 2η 乘(1.10)的第1式并求内积，则得 $\|\eta(k+1)\|^2 = \|\eta(k)\|^2+\tau^2\|\eta_t(k)\|^2$，所以 $\alpha_1=\alpha_2$ 虽然克服了非线性项所引起的"能量爆发"，但每计算一步仍会有微小的虚假能量增长。若大气变化较剧烈，$\|\eta_t\|^2$ 颇大，则预报时间稍长就会引起严重失真。反之，若 $\delta=\frac{1}{2}$，则有 $\|\eta(k)\|^2=\|\eta(0)\|^2$。

(2) 粘性项可以抑制显式格式的虚假能量增长。事实上若 $\delta \equiv \sigma \equiv 0$，$\alpha_1=\alpha_2$，则有

$$\|\eta(k+1)\|^2=\|\eta(k)\|^2+\tau^2\|\eta_t(k)\|^2-2\tau\|\eta(k)\|_{1\nu}^2。$$

二、广义稳定性指标 S

考虑差分格式 $L_{h\tau}[\eta(k)]=f(k)$，其中 $f(k)$ 包括各种定解条件，$L_{h\tau}$ 是差分算子。f 的误差 $\tilde{f}$ 会引起 η 的计算误差 $\tilde{\eta}$。为了描述计算的稳定性，在[6][8]中提出了不同的定义。通常的稳定性是指：存在与 h,τ,η 无关的正常数 M，使得 $\|\tilde{\eta}\| \leqslant M\|\tilde{f}\|$。然而大多数非线性格式不具有此性质，因此 Roache[9] 等认为此种定义难适用于流体力学问题。

广义稳定性[6]是指：存在与 h,τ 无关的常数 S',N 和 M (其中 $M>0$，$N>0$，M可能与 η 有关)，使得当 $\|\tilde{f}\| \leqslant Nh^{S'}$，$k\tau \leqslant T_0$ ($T_0>0$，但一般与 $\|\tilde{f}\|$ 有关)时，$\|\tilde{\eta}\| \leqslant M\|\tilde{f}\|$。并把此类 S' 的下确界称为广义稳定性指标 S，下面作一些说明与比较：

(1) 通常稳定性要求解 η 对一切扰动 $\tilde{f}$ 都稳定，然而非线性力学系统往往仅当外力满足一定条件时才存在唯一的广义解，而且当扰动较小时才稳定，例如 Navier-Stokes 方程的三维问题[10]。广义稳定性则反映了这一性质，例如若 $L_{h\tau}0=0$，$S \leqslant 0$，则当定解条件 $\|f\| \leqslant N$ 时，$\|\eta\| \leqslant \text{const}\|f\|$，并且当 $\|\tilde{f}\| \leqslant N$ 时，η 是稳定的。

(2) 广义稳定性可以半定量地反映非线性格式的稳定性。事实上主要计算误差来自数字的舍入。例如计算机字的精度是 10^{-l}，计算格式是(1.10)，$h=10^{-m}$，计算每一个 η 值需要 N_1 次算术运算，那末舍入误差不超过 $N_1 10^{-l}$，从而 $|\tilde{f}| \leqslant \lambda^{-1}N_1 10^{2m-l}$，为了保证计算的稳定性，应使 $T_0 \leqslant \lambda N N_1^{-1} 10^{l-2m-Sm}$。至少对短期天气预报，这个限制是合理的。显然，$S$ 越小，对字长，步长和方程的要求就越宽，计算也越稳定。

(3) 广义稳定性与收敛性有关。设所要计算的相应微分方程的解是 ξ，$\eta=\xi+\tilde{\eta}$，$L_{h\tau}$ 的形式逼近误差是 $\tilde{f}$，则 $L_{h\tau}(\xi+\tilde{\eta})=f$，$L_{h\tau}\xi=f+\tilde{f}$，因此若 $\|\tilde{f}\|=O(h^{Sa})$，$S<Sa$，$Sa>0$，则当 $h\to 0$ 时，$\|\tilde{\eta}\| \leqslant M\|\tilde{f}\| \to 0$。即格式是收敛的。进一步，若 $\xi \in c^k$，$S \leqslant Sa$，$Sa>k$，$\|\tilde{\eta}\|_k$ 表示 $\tilde{\eta}$ 的 k 阶差商范数，则当 $h\to 0$ 时，尚有 $\|\tilde{\eta}\|_k \to 0$，

并由此 $\|\eta\|_K$ 一致有界。

(4) 广义稳定性是对通常稳定性的拓广。通常稳定格式的 S' 可以是任意值,或者说 $S\to-\infty$。反过来假设 $L_{h\tau}$ 是线性的,且 $S\leqslant S'$, 那末误差满足方程 $L_{h\tau}(\bar\eta)=\bar f$。今记 $\bar{\bar\eta}=h^{S'}\bar\eta\|\bar f\|^{-1}$, $\bar{\bar f}=h^{S'}\bar f\|\bar f\|^{-1}$, 则 $L_{h\tau}(\bar{\bar\eta})=\bar{\bar f}$, 且 $\|\bar f\|=O(h^{S'})$, 从而 $\|\bar{\bar\eta}\|\leqslant M\|\bar{\bar f}\|$, 且$M$是绝对常数。因此 $\|\bar\eta\|\leqslant M\|\bar f\|$。即 $L_{h\tau}$ 是通常稳定的。

(5) S 值提供了改进格式的一个方向。近年来 Weinberger[11], Miccaelli[12]和 Birkhoff[11]等提出了格式优化的概念,都致力于尽量增大线性格式的 Sa, 同时也要求 ξ 具有更好的光滑性,然而非线性微分方程解 ξ 往往具有弱间断性, Sa 不可能很大, 因此应该致力于下降S值。这样既增加了计算的稳定性,也保证了某种弱间断解的计算收敛性。

(6) S 值是一种 fuzzing 数学的概念。事实上带有 n 个参数的差分格式全体组成一个 n 维空间 X_n, 广义稳定格式全体是 X_n 中的一个 fuzzing 集 $\underset{\sim}{A}$, $K=(1+e^S)^{-1}$ 是 $L_{h\tau}$ 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度。对于通常稳定格式, $S\to-\infty$, $K=1$。对于非广义稳定格式, 不存在有限的 S' 值,即 $S\to+\infty$, $K=0$。对于其它格式则 $0<k<1$。

三、能量方法中的一些基本公式

引理1. $2(w,w_t)=(\|w\|^2)_t-\tau\|w_t\|^2$, $2(w,w_{\bar t})=(\|w\|^2)_{\bar t}+\tau\|w_{\bar t}\|^2$,

$2(w,w_{t\bar t})=\|w\|^2_{t\bar t}-\|w_t\|^2-\|w_{\bar t}\|^2$。

引理2. $(w,\Delta^\nu w)+\|w\|^2_{1\nu}-B_{R_h^*}(\nu,w,w_n)=0$。

证明 先用 νv_{x_j} 代替(1.5)中的 v, 再用 $\nu v_{\bar x_j}$ 代替(1.6)中的 v, 把两次结果相加,乘以 h 后再在 $x_{j'}(j\neq j')$ 方向求和,即得到

$$2(u,\Delta^\nu_{x_j}v)+(\nu u_{x_j},v_{x_j})+(\nu u_{\bar x_j},v_{\bar x_j})=\sum_{R_j}h(u'\nu+u\nu')v_n。$$

在上式中令 $j=1,2$, 并把两次结果相加即得

$$2(u,\Delta^\nu v)+\sum_{j=1}^{2}[(\nu u_{x_j},v_{x_j})+(\nu u_{\bar x_j},v_{\bar x_j})]-2B_{R_h^*}(\nu,u,v_n)=0。\qquad(3.1)$$

令 $u=v=w$, 即得所证。

引理3.
$$2(w_t,\Delta^\nu w)+(\|w\|^2_{1\nu})_t-\tau\|w_t\|^2_{1\nu}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\nu_t,\bar w^2_{x_j}+\bar w^2_{\bar x_j})-2B_{R_h^*}(\nu,w_t,w_n)=0,$$

$$2(w,\Delta^\nu w_t)+(\|w\|^2_{1\nu})_t-\tau\|w_t\|^2_{1\nu}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\nu_t,\bar w^2_{x_j}+\bar w^2_{\bar x_j})-2B_{R_h^*}(\nu,w,w_{tn})=0。$$

证明 在(3.1)中令 $u=w_t$, $v=w$, 即得到

$$2(w_t,\Delta^\nu w)+\sum_{j=1}^{2}[(\nu w_{tx_j},w_{x_j})+(\nu w_{t\bar x_j},w_{\bar x_j})]-2B_{R_h^*}(\nu,w_t,w_n)=0,\qquad(3.2)$$

可直接验证 $(\nu u^2)_t=\nu_t\bar u^2+2\nu uu_t+\tau\nu(u_t)^2$,

因此 $2(\nu w_{tx_j},w_{x_j})=(\|\sqrt{\nu}\,w_{x_j}\|^2)_t-\tau\|\sqrt{\nu}\,w_{tx_j}\|^2-(\nu_t,\bar w^2_{x_j})$,

$2(\nu w_{t\bar x_j},w_{\bar x_j})=(\|\sqrt{\nu}\,w_{\bar x_j}\|^2)_t-\tau\|\sqrt{\nu}\,w_{t\bar x_j}\|^2-(\nu_t,\bar w^2_{\bar x_j})$。

把上面两式代入(3.2)，即得所证的第一式。

引理 4.　如果在 T_h 上，$w=0$，或者存在 $Q^*\in R_h$，$w(Q^*)=0$，且当 $h\to 0$ 时，R_h 中任一点都可用有限长的平行于 x_j 的折线与 Q^* 相连，那末存在仅与 R 的直径有关的常数 m_0，使得 $\|w\|^2\leqslant m_0\|w\|_{10}^2$。

引理 5.　$\|wv\|^2\leqslant h^{-2}\|w\|^2\|v\|^2$。

引理 6　$\|w\|_{1v}^2\leqslant 8h^{-2}\max|v|\,\|w\|^2$。

引理 7　设 $w(k)$，$v(k)$ 是非负网格函数，M_0，ρ，c_0，τ，$p\geqslant 0$，τ 适当小。$H_w(k)=w(k)[p+c_0w(k)h^{-n_1}]+f^*[w(k)]v(k)$，且当 $z\leqslant M_0h^{n_2}$ 时，$f^*(z)\leqslant 0$。那末，如果满足下列条件，则当 $k\tau\leqslant T\leqslant T_0$ 时，$w(k)\leqslant \rho e^{p(c_0+1)T}$。

(1) $w(0)\leqslant\rho$，且当 $k\geqslant 1$ 时，$w(k)\leqslant \rho+\tau\sum\limits_{j=0}^{k-1}H_w(j)$，

(2) T_0，ρ，M_0^{-1} 适当小，以致 $\rho e^{(1+c_0)pT_0}\leqslant d=\min(ph^{n_1},M_0h^{n_2})$。

证明　作辅助函数 $u(k)$，使得 $u(0)=\rho$，并且当 $k\geqslant 1$ 时，$u(k)=\rho+\tau\sum\limits_{j=0}^{k-1}p(1+c_0)u(j)$。显然有

$$u(k)=\rho(1+\tau p(1+c_0))^k\leqslant \rho e^{pT_0(1+c_0)}\leqslant d。$$

不难知道 $w(0)\leqslant u(0)$，今假定当 $0\leqslant j\leqslant k-1$ 时，$w(j)\leqslant u(j)\leqslant d$，那末有 $f^*(w(j))\leqslant 0$，$w(j)h^{-n_1}\leqslant p$，因此

$$w(k)\leqslant \rho+\tau\sum_{j=0}^{k-1}p(1+c_0)w(j)\leqslant\rho+\tau\sum_{j=0}^{k-1}p(1+c_0)u(j)=u(k)\leqslant d。$$

注记　若 $f^*[w(k)]=0$，$c_0=0$，则对一切 ρ 和 $k\tau\leqslant T$，$w(k)\leqslant\rho e^{pT}$。

四、S 值上界的严格估计

用 $\tilde\eta,\tilde\varphi,\tilde f_i$ 分别表示 η,φ 和(1.10)中第 i 式的计算误差，则

$$L_i(\eta+\tilde\eta,\varphi+\tilde\varphi)=f_i+\tilde f_i, \tag{4.1}$$

其中 $f_1=0$，$f_2=-f$。把(4.1)与(1.10)相减，即得

$$\begin{cases}\tilde\eta_t=J(\tilde\eta+\delta\tau\tilde\eta_t,\varphi+\tilde\varphi)+J(\eta+\delta\tau\eta_t,\tilde\varphi)+\Delta^\nu(\tilde\eta+\sigma\tau\tilde\eta_t)+\tilde f_1,\\ \Delta\tilde\varphi=\tilde\eta+\tilde f_2。\end{cases} \tag{4.2}$$

设 m 是待定正数，用 $2\tilde\eta+m\tau\tilde\eta_t$ 乘(4.2)的第一式，则由引理 1—3 得到

$$(\|\tilde\eta\|^2)_t+(m-1)\tau\|\tilde\eta_t\|^2+2\|\tilde\eta\|_{1\nu}^2+\tau\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)(\|\tilde\eta\|_{1\nu}^2)_t+\tau^2\left(\sigma m-\frac{m}{2}-\sigma\right)$$

$$\|\tilde\eta_t\|_{1\nu}^2+S_{R_h^*}^\nu(\tilde\eta)=\sum_{i=0}^{5}\tilde E_i, \tag{4.3}$$

其中
$$\begin{aligned}S_{R_h^*}^\nu(\tilde\eta)=&-2B_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta,\tilde\eta_n)-2\sigma\tau B_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta,\tilde\eta_{tn})\\&-\tau mB_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta_t,\tilde\eta_n)-\sigma m\tau^2B_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta_t,\tilde\eta_{tn}),\end{aligned}$$

$$\tilde E_0=-\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{m}{4}\right)\tau\sum_{j=1}^{2}(\nu_t,\tilde\eta_{x_j}^2+\tilde\eta_{\bar x_j}^2),\quad \tilde E_1=(2\tilde\eta+m\tau\tilde\eta_t,\ J(\eta+\delta\tau\eta_t,\tilde\varphi)+\tilde f_1),$$

$\widetilde{E}_2=(2\tilde{\eta},J(\tilde{\eta}+\delta\tau\tilde{\eta}_t,\tilde{\varphi}))$，$\widetilde{E}_3=(2\tilde{\eta},J(\tilde{\eta}+\delta\tau\tilde{\eta}_t,\varphi))$，

$\widetilde{E}_4=m\tau(\tilde{\eta}_t,J(\tilde{\eta}+\delta\tau\tilde{\eta}_t,\tilde{\varphi}))$，$\widetilde{E}_5=m\tau(\tilde{\eta}_t,J(\tilde{\eta}+\delta\tau\tilde{\eta}_t,\varphi))$。

又用 $\tilde{\varphi}$ 乘(4.2)的第二式并求内积，由引理2

$$\|\tilde{\varphi}\|_1^2-B_{R_h^*}(1,\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_n)=-(\tilde{\eta}+\tilde{f}_2,\tilde{\varphi})\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\|\tilde{\eta}\|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|\tilde{f}_2\|^2+\varepsilon\|\tilde{\varphi}\|^2。\tag{4.4}$$

若满足引理4的条件，则可令 $\varepsilon=\frac{1}{2m_0}$，因此

$$\|\tilde{\varphi}\|_1^2\leqslant 2m_0(\|\tilde{\eta}\|^2+\|\tilde{f}_2\|^2)。\tag{4.5}$$

今后用 L,M,N,S,M_i 表示有关正数，a 是任意正数，ε 是适当小的正数，$m^*=\max\left(\frac{2\sigma}{2\sigma-1},a+1\right)$，

$$m^{**}=(1+8\lambda\nu_1\sigma+a)(1+8\lambda\nu_1\sigma-4\lambda\nu_1)^{-1}。$$

又记
$$\rho(\tilde{\eta},\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,k)=\|\tilde{\eta}(0)\|^2+\tau\sum_{j=0}^{k-1}(\|\tilde{f}_1(j)\|^2+\|\tilde{f}_2(j)\|^2),$$

$$\|\tilde{\eta}(k)\|_{0\oplus\nu}^2=\|\tilde{\eta}(k)\|^2+\tau\sum_{j=0}^{k-1}\|\tilde{\eta}(j)\|_{1\nu}^2。$$

定理 假定用格式(1.10)计算周期解问题，并且或者 $\sigma_0\geqslant\frac{1}{2}$，或者 $\lambda<[4\nu_1(1-2\sigma_0)]^{-1}$，那末

(1) 当 $\|\tilde{f}_2\|^2\leqslant Nh^{2S}$，$\rho(\tilde{\eta},\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,k)\leqslant Nh^{2S}$，$k\tau\leqslant T\leqslant T_0(\rho)$ 时，$\|\tilde{\eta}(k)\|_{0\oplus\nu}^2\leqslant Me^{LT}\rho$。其中当 $\alpha_1=\alpha_2$ 或 $\nu_0>0$ 时，$S\leqslant 1$。若 $\alpha_1=\alpha_2$ 且 $\nu_0>0$，则 $S\leqslant 0$。又 $T_0(\rho)$ 是 ρ 的不增函数，若当 $h\to 0$ 时，$\rho=o(h^{2S})$，则 T_0 任意。

(2) 若 $\alpha_1=\alpha_2$，并且当 $\sigma_0>\frac{1}{2}$ 时，$2\delta\geqslant m^*$，当 $\sigma_0\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$2\sigma\geqslant m^{**}$，那末对一切 ρ，ν 和 T，都有 $\|\tilde{\eta}(k)\|_{0\oplus\nu}^2\leqslant Me^{LT}\rho$。

证明 (4.3)成立，且由周期性，$S_{R_h^*}^{\varphi}(\tilde{\eta})=0$。

若 $\sigma_0>\frac{1}{2}$，我们就取 $m\geqslant m^*$，从而 $m-1\geqslant a$，$\sigma m-\frac{m}{2}-\sigma\geqslant 0$，用 τ 乘(4.3)式的两边，并对时刻 $t=0,\tau,2\tau,\cdots,(k-1)\tau$，求和，即得到

$$\|\tilde{\eta}(k)\|_{0\oplus\nu}^2+\tau\sum_{j=0}^{k-1}\|\tilde{\eta}(j)\|_{1\nu}^2+\tau\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)\|\tilde{\eta}(k)\|_{1\nu}^2+a\tau\sum_{j=0}^{k-1}\|\tilde{\eta}_t(j)\|^2$$
$$\leqslant\tau\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{5}|\widetilde{E}_i(j)|+\|\tilde{\eta}(0)\|^2+\tau\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)\|\tilde{\eta}(0)\|_{1\nu}^2。\tag{4.6}$$

若 $\sigma=\frac{1}{2}$，λ 任意，或者 $\sigma_0<\frac{1}{2}$，$\lambda<[4\nu_1(1-2\sigma_0)]^{-1}$，我们就取 $m\geqslant m^{**}$，但由引理6，$\tau\|\tilde{\eta}_t(j)\|_{1\nu}^2\leqslant 8\lambda\nu_1\|\tilde{\eta}_t(j)\|^2$，因此

$$(m-1)\tau\|\tilde{\eta}_t\|^2+\tau^2\left(\sigma m-\frac{m}{2}-\sigma\right)\|\tilde{\eta}_t\|_{1\nu}^2\geqslant(m-1+8m\sigma\lambda\nu_1$$
$$-4m\lambda\nu_1-8\sigma\lambda\nu_1)\tau\|\tilde{\eta}_t\|^2\geqslant a\|\tilde{\eta}_t\|^2,$$

故仍然可以得到(4.6)式。

下面来估计(4.6)的右端。由于$|\nu_t|$是有界的，

$$|\tilde{E}_0| \leqslant M_1\lambda\|\tilde{\eta}\|^2 \tag{4.7}$$

由(4.5)，

$$|(\tilde{\eta}, J_1(\eta + \delta\tau\eta_t, \tilde{\varphi}))| \leqslant M_2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{\varphi}\|_1^2) \leqslant (2m_0+1)M_2\|\tilde{\eta}\|^2 + 2m_0M_2\|\tilde{f}_2\|^2。$$

可以类似地估计(1.4)右端中其余四项与 $\tilde{\eta}$ 的内积，并且

$$|(\tilde{\eta}, J(\eta + \delta\tau\eta_t, \tilde{\varphi}))| \leqslant M_3(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2),$$

从而

$$|\tilde{E}_1| \leqslant M_4(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_1\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)。 \tag{4.8}$$

下面来估计$|\tilde{E}_2|$，$|\tilde{E}_4|$的估计是类似的。显然有 $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_{21} + \tilde{E}_{22}$，其中 $\tilde{E}_{21} = 2(\tilde{\eta}, J(\tilde{\eta}, \tilde{\varphi}))$，$\tilde{E}_{22} = 2\delta\tau(\tilde{\eta}, J(\tilde{\eta}_t, \tilde{\varphi}))$。若 $\alpha_1 = \alpha_2$，由(1.9)及周期性条件知 $\tilde{E}_{21} = 0$。又由(1.8)式知道，$\tilde{E}_2 = \tilde{E}_{22} = -2\delta\tau(\tilde{\eta}_t, J(\tilde{\eta}, \tilde{\varphi}))$。由引理 5

$$|\tau(\tilde{\eta}_t, \tilde{\eta}_{\hat{x}_1}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_2})| \leqslant \frac{a\tau}{16}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \frac{4\tau}{a}\|\tilde{\eta}_{\hat{x}_1}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_2}\|^2 \leqslant \frac{a\tau}{16}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \frac{4\lambda}{a}\|\tilde{\eta}_{\hat{x}_1}\|^2\|\tilde{\varphi}_{\hat{x}_2}\|^2,$$

类似地可估计 $|\tau(\tilde{\eta}_t, \tilde{\eta}_{\hat{x}_2}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_1})|$，并得到

$$|\tau(\tilde{\eta}_t, J_1(\tilde{\eta}, \tilde{\varphi}))| \leqslant \frac{a\tau}{8}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + M_5\|\tilde{\eta}\|_1^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2),$$

类似地可估计(1.4)式右端其余四项与 $\tilde{\eta}_t$ 的内积，且

$$|\tilde{E}_2| \leqslant \frac{a\tau}{4}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + M_6\|\tilde{\eta}\|_1^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{a\tau}{4}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \dfrac{M_6}{\nu_0}\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)，\text{当 } \nu_0 > 0, \\ \dfrac{a\tau}{4}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \dfrac{M_7}{h^2}\|\tilde{\eta}\|^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)，\text{当 } \nu_0 = 0。\end{cases} \tag{4.9}$$

若 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，但 $\nu_0 > 0$，则由引理 5 和(4.5)得

$$|(\tilde{\eta}, J_1(\tilde{\eta}, \tilde{\varphi}))| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 + \frac{2}{\varepsilon\nu_0}(\|\tilde{\eta}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_1}\|^2 + \|\tilde{\eta}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_2}\|^2)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{8}\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 + \frac{2}{\varepsilon h^2\nu_0}\|\tilde{\eta}\|^2\|\tilde{\varphi}\|_1^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{8}\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 + \frac{4m_0}{\varepsilon h^2\nu_0}\|\tilde{\eta}\|^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)。$$

并且

$$|\tilde{E}_{21}| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 + \frac{M_8}{\nu_0h^2}\|\tilde{\eta}\|^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)。 \tag{4.10}$$

又根据引理 5 和(4.5)式

$$\tau|(\tilde{\eta}, J_1(\tilde{\eta}_t, \tilde{\varphi}))| \leqslant \frac{a\tau}{8}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \frac{16\lambda}{ah^2}\|\tilde{\eta}\|^2\|\tilde{\varphi}\|_1^2 \leqslant \frac{a\tau}{8}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \frac{32m_0\lambda}{ah^2}\|\tilde{\eta}\|^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2),$$

并且

$$|\tilde{E}_{22}| \leqslant \frac{a\tau}{4}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \frac{M_9}{h^2}\|\tilde{\eta}\|^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)。 \tag{4.11}$$

把(4.9)—(4.11)综合起来，即得到

$$|\tilde{E}_2| \leqslant \frac{a\tau}{4}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \frac{M_{10}}{h^2}[(1 - \mathrm{sign}\nu_0 + \mathrm{sign}|\alpha_1 - \alpha_2|)\|\tilde{\eta}\|^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)]$$

$$+ M_{11}\varepsilon\,\mathrm{sign}|\alpha_1 - \alpha_2|\,\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 + \frac{M_{12}}{\nu_0}(1 - \mathrm{sign}|\alpha_1 - \alpha_2|)\mathrm{sign}\nu_0\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 \cdot (\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2)。 \tag{4.12}$$

下面来估计 $|\tilde{E}_3|$，$|\tilde{E}_5|$ 的估计相类似。显然 $\tilde{E}_3=\tilde{E}_{31}+\tilde{E}_{32}$，其中 $\tilde{E}_{31}=2(\tilde{\eta},J(\tilde{\eta},\varphi))$，$\tilde{E}_{32}=2\delta\tau(\tilde{\eta},J(\tilde{\eta}_t,\varphi))$。

若 $\alpha_1=\alpha_2$，由(1.9)及周期性知 $\tilde{E}_{31}=0$，若 $\alpha_1\neq\alpha_2$，但 $\nu_0>0$，则由 Cauchy 不等式及(1.4)式

$$2|(\tilde{\eta},J(\tilde{\eta},\varphi))|\leqslant\varepsilon\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2+\frac{M_{13}}{\varepsilon\nu_0}\|\tilde{\eta}\|^2。\tag{4.13}$$

又由引理 6

$$2|\delta\tau(\tilde{\eta},J(\tilde{\eta}_t,\varphi))|\leqslant\frac{a\tau^2}{64\lambda}\|\tilde{\eta}_t\|_1^2+\lambda M_{14}\|\tilde{\eta}\|^2\leqslant\frac{a\tau}{8}\|\tilde{\eta}_t\|^2+\lambda M_{15}\|\tilde{\eta}\|^2,\tag{4.14}$$

把(4.13)—(4.14)综合起来，即得到

$$|\tilde{E}_3|\leqslant\frac{a\tau}{4}\|\tilde{\eta}_t\|^2+M_{16}[\|\tilde{\eta}\|^2+\varepsilon\,\mathrm{sign}|\alpha_1-\alpha_2|\,\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2]。\tag{4.15}$$

最后把(4.7)，(4.8)，(4.12)，(4.15)代入(4.6)，得到

$$(1-\tau M_{17})\|\tilde{\eta}(k)\|_{0\oplus\nu}^2\leqslant M_{18}\rho(\tilde{\eta},\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,k)+M_{19}\tau\sum_{j=0}^{k-1}\{1+H[\tilde{\eta}(j)]+f^*[\tilde{\eta}(j)]\|\tilde{\eta}(j)\|_{1\nu}^2\},$$

其中

$$H[\tilde{\eta}]=\|\tilde{\eta}\|^2[(1+h^{-2}(1-\mathrm{sign}\nu_0)+\mathrm{sign}|\alpha_1-\alpha_2|)(\|\tilde{\eta}\|^2+\|\tilde{\gamma}_2\|^2)],$$

$$f^*[\tilde{\eta}]=-1+M_{20}\tau+M_{21}\varepsilon\,\mathrm{sign}|\alpha_1-\alpha_2|+\frac{M_{22}}{\nu_0}\mathrm{sign}\nu_0(1-\mathrm{sign}|\alpha_1-\alpha_2|)\cdot(\|\tilde{\eta}\|^2+\|\tilde{\gamma}_2\|^2)。$$

到此只要在引理 7 中令 $w(k)=\|\tilde{\eta}(k)\|_{0\oplus\nu}^2$，$H_w(k)=H[\tilde{\eta}(k)]$，$v(k)=\|\tilde{\eta}(k)\|_{1\nu}^2$，$f^*[w(k)]=f^*[\tilde{\eta}(k)]$，$n_2=0$。当 $\alpha_1=\alpha_2$ 且 $\nu_0>0$ 时，取 $n_1=0$，否则取 $n_1=2$，于是直接得到了定理的结论(1)。

对于(2)，可取 $2\delta=m$，由(1.9)及周期性，

$$\sum_{i=2}^{5}\tilde{E}_i=2(\tilde{\eta}+\delta\tau\tilde{\eta}_t,\ J(\tilde{\eta}+\delta\tau\tilde{\eta}_t,\ \varphi+\tilde{\varphi}))=0,$$

因此由(4.7)，(4.8)得

$$\|\tilde{\eta}(k)\|_{0\oplus\nu}^2\leqslant M_{23}\tau\sum_{j=0}^{k-1}\|\tilde{\eta}(j)\|^2+\rho(\tilde{\eta},\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,k),$$

到此只要应用引理 7 的注记即得结论(2)。

五、结　论

(1) $\alpha_1=\alpha_2$ 不仅使差分格式很好地模拟了守恒律，而且使非线性误差的主要部分 $(\tilde{\eta},J(\tilde{\eta},\varphi+\tilde{\varphi}))=0$，从而使显式格式的 S 数上界估计下降1。这样即使不进行空间滤波(即 $\nu\equiv0$)，显式格式仍有 $S\leqslant1$。因此当计算舍入误差不超过 Nh^2 时，计算就稳定。又若 ξ,ψ 适当光滑，(1.10)的形式逼近误差是 $O(h^2)$，则格式收敛。

(2) 若进行全场滤波，即 $\nu_0>0$，则即使显式格式中 $\alpha_1\neq\alpha_2$，仍有 $S\leqslant1$，计算也

是收敛的。若 $\alpha_1=\alpha_2$，则 $S\leqslant 0$，因此只要 $\rho(\tilde{\eta},\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,k)\leqslant N$，计算就可以长期地稳定地进行下去。

(3) 假设大气变化相当剧烈，$\frac{\partial\xi}{\partial t}$ 等项可能在某有限长曲线 L 上发生弱间断。如果 $\sqrt{h}\cdot\left|\frac{\partial\xi}{\partial t}(x_1+h,x_2,t)-\frac{\partial\xi}{\partial t}(x_1,x_2,t)\right|\to 0$，等等，则其形式逼近误差为 $0(1)$，即 $Sa\geqslant 0$。因此，若采用全场滤波的 Arakawa 格式，则当 $h\to 0$ 时，$\eta\to\xi$。亦即此类格式可应用于变化较剧烈的大气过程的数值预报。

(4) 合适地选择 δ，不仅使格式严格满足守恒律，尚可完全消去非线性误差，从而使格式具有通常的绝对稳定性，且对 T_0 无限制。因此可计算方程的整体解，这也再次证明了格式的守恒性和稳定性的一致性。

(5) 选择合适的 σ，可放宽对 τ 的限制。

(6) 当 $k\tau\leqslant T_0(\rho)$ 时，预报误差是可控的，且当 $h\to 0$ 时，$\eta\to\xi$。T_0 就是[14]中所述的可预期的下限，显然它与 α_i,ν,h,λ，计算机字长和所预报的大气过程变化剧烈程度都有关。

此外，尚可把(1.10)中的 η_t 改为 $\eta_t+\theta_0\tau_{t\bar{t}}$，它近似于把其中的 $\eta(k)$ 过滤为 $\eta^*(k)=\eta(k)-\theta_0\tau^2\eta_{t\bar{t}}(k)$。若谐波函数 $\eta(k)=Ae^{ipk\tau}$，则 $\eta^*(k)=\left(1+4\theta_0\sin^2\frac{p\tau}{2}\right)\eta(k)$，显然当 $-\frac{1}{2}\leqslant\theta_0\leqslant 0$ 时，$\|\eta^*(k)\|\leqslant\|\eta(k)\|$，所以抑制了能量的虚假增长。并且已证明：若在这样修改后的 (1.10) 中，$\delta=\sigma=0$，$0\geqslant\theta_0>-\frac{1}{2}$，$\lambda<\frac{1+2\theta_0}{4\nu_1}$，则当 $\|\tilde{\eta}(1)\|^2+\rho(\tilde{\eta},\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,k)\leqslant Nh^{2S}$时，$\|\eta(k+1)\|^2+\|\eta(k)\|^2\leqslant Me^{LT}\rho$，其中 S 同定理 1。

如果是局部地区预报，在 Γ_h 上 $\eta=g$，g 的计算误差是 $\tilde{g}$，在 Γ_h 附近 $\nu\geqslant\nu_*>0$，则当 $\|\tilde{g}\|^2_{\Gamma_h}\leqslant Nh^{2S+1}$ 时，定理 1 和上述类似结果也成立，因此 $\alpha_1=\alpha_2$ 仍然是物理意义和误差控制上的最优参数，但边值误差影响较显著。当 $\tilde{g}\equiv 0$ 时，则只要求 $\rho\leqslant Nh^{2s}$，显然它改进了[5]中的结果。又若 R_h 是长方形，则结合本文方法和[7]中的方法可证明，当 $\nu_0>0$ 时，显式的(1-10)具有 $s\leqslant 0$，当 $\alpha_1=\alpha_2$时，$s\leqslant 0.5$，当 $\alpha_1=\alpha_2$ 且 $\nu_0=0$ 时，$s\leqslant -0.5$。甚至一般边界时的三维涡度方程，只要 $\alpha_1=\alpha_2$，则[6]中的显式格式也具有 $s\leqslant 0.5$，从而改进了[6]的结果。

本文是在大气物理所王宗皓先生的建议和帮助下整理的，特此致谢。

参　考　资　料

[1] A. A. Arakawa, *J. Comp. Phys.*, 1966, 1, pp. 119—143.
[2] D. K. Lilly, *Mon. Wea. Rev.*, 1965, 93, pp 11—26.
[3] K. W. Morton, SIAM-AMS, Proc. II, 1970, pp. 1—10.
[4] G. J. Haltiner, Numerical Weather prediction, John Wiley, 1971.
[5] 郭本瑜，数学学报，1974, 17, pp. 242—258。
[6] 郭本瑜，科学通报，1976, 21, pp. 127—131。
[7] Kuo Pen-yu (郭本瑜), *Scientia sinica*, 1977, pp. 287—304.

[8] R. D. Richetmyer, and K. W. Morton, Difference method for initial value problems, 2'nd, ed, Interscience, 1967.
[9] P. J. Roache, Computational fluid dynamics, Hermosa publishers, 1972.
[10] O. A. Ладженская, Математичекие вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, м. физматгиз, 1961.
[11] H. F. Weinberger, SIAM. *J. Numer Anal*, 1972, 9, pp. 182—198.
[12] C. A. Miccaelli, W. E. Miranker, SIAM.*J. Numer. Anal*, 1973, 10, pp. 983—1009.
[13] G. Birkhoff and S. Gulati, SIAM. *J. Numer. Anal*, 1974, 11, pp. 700—728.
[14] E. N. Lorenz, Trans. N. Y. Acad. Sci. Ser II, 1963, 25, pp. 409—432.