

关于计算不规则网点、矩形、正方形 网点偏导数的一种统一格式

马吉溥

(南京大学数学系)

提 要

本文基于广义导数,推演了一种计算平面不规则网点和矩形、正方形网点偏导数的一种统一格式。使用前,我们可无需客观分析而直接从测站要素的测值计算其变化率(导数),以及诸如测站的涡、散度等量。

同时,为避免应用上述一般格式而过分削弱主要的气象波,我们在一种高度场客观分析方法的基础上,混合使用测风和高度值,循此方法讨论了一种计算上述诸网点高度场各偏导数的格式。

这样,不规则网点、矩形和正方形网点就有了一个统一的计算其上各要素变化率的格式。这对数值预告方法的探讨以及混合使用,三角形、正方形、矩形网格等方面,都可能是有益的。

§1 引 言

1.1) 一个核函数
$$M(a, x, y) = \begin{cases} a^{-6}(a^2 - x^2 - y^2)^3, & (x, y) \in C_a^0 \\ 0, & (x, y) \notin C_a^0 \end{cases}$$

其中, C_a^0 表示以原点为中心,半径为 a 的圆。

显然, $M(a, x, y)$ 在整个平面上具有直到二阶各级连续偏导数。

令
$$x = \iint_{(C_a^0)} M(a, x, y) dx dy = \frac{\pi}{4} a^2.$$

1.2) 一个光滑算子 设 Q' , Q 是平面上二个闭域, Q' 由以 Q 上任意点为中心,半径为 a 的所有圆组成的。 $f(x, y)$ 是 Q' 上的一个连续函数。我们引入如下的光滑算子:

$$Cf(x, y) = \frac{1}{n} \iint_{(Q)} M(a, X - x, Y - y) f(X, Y) dXdY \quad (1)$$

令 $f_a(x, y) = Cf(x, y)$, 参看[1], 不难证明以下的性质:

(i) $f_a(x, y)$ 在 Q 上具有直到二阶各级连续偏导数。

(ii) 在 Q 上一致地, $\lim_{a \rightarrow 0} f_a(x, y) = f(x, y)$ 。

(iii) $f(x, y)$ 存在直到二阶各级广义偏导数并且

$$\frac{\partial f_a}{\partial x}, \frac{\partial f_a}{\partial y}, \frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}$$

在 $L^2(Q)$ 数意义下, 当 $a \rightarrow 0$ 时收敛于 $\hat{f}(x, y)$ 的相应各广义偏导数。

关于以上性质严格证明, 可参看[2], 不在此赘述了。

§2 计算不规则网点偏导数的一个格式

2.1) 一点说明 设 M_1 如图 1 所示的, 是一个内网点。 $M_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 上具有已知的测值 f_i 。在每一三角形单元 $\Delta_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 内, 我们引入函数: 当 $(x, y) \in \Delta_k$,

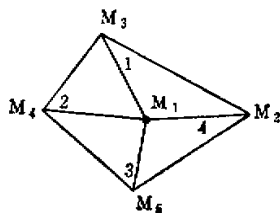


图 1

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \zeta_i^k(x, y) f_i^k \quad (2')$$

其中, ζ_i^k 是 (x, y) 在 Δ_k 内的面积坐标, f_i^k 为 Δ_k 的第 i 个顶点的测值。

按 §1 引入的光滑算子对 (2)' 作一次光滑:

$$\hat{f}_a(x, y) = \frac{1}{\pi} \iint_{(a)} M(a, X-x, Y-y) \hat{f}(X, Y) dXdY.$$

$$\text{当} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial x}(x_1, y_1) \text{ 和 } \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial y}(x_1, y_1) \quad (2)$$

存在(由 §1 中 1.2 的性质 iii, 可断定极限 (2) 在 Q 上几乎处处存在)时, 我们将计算 (2) 的格式称之为计算 f_i 在 M_1 点偏导数的一个格式。其中 (x_i, y_i) 表示 M_i 的直角坐标。

2.2) 测值的面积变化比 如对第一个三角形 Δ_1 , 令

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

我们称

$$\frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} 1 & f_1 & y_1 \\ 1 & f_2 & y_2 \\ 1 & f_3 & y_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_1, \quad \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f_1 \\ 1 & x_2 & f_2 \\ 1 & x_3 & f_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_1,$$

为测值 f_i 关于 Δ_1 的面积变化比。

关于任意三角形 Δ_k , 仿此定义, 并以 $\left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k$, $\left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k$ 分别记之, 即

$$\left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k = \frac{1}{D_k} \begin{vmatrix} 1 & f_1 & y_1 \\ 1 & f_2 & y_2 \\ 1 & f_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k = \frac{1}{D_k} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f_1 \\ 1 & x_2 & f_2 \\ 1 & x_3 & f_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

其中顺序按排, M_1 固定在第一行, 其它二个节点按 Δ_k 反时针向顺序排之。 $f_i^{(k)}$, $x_i^{(k)}$, $y_i^{(k)}$ 分别表示 Δ_k 第 i 顶点的测值和坐标。

对任意三角形, 一般言之, 它具有下面的明显性质:

$$(i) \quad \left[\frac{D(af + bg)}{D\mathbf{x}} \right] = a \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right] + b \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]$$

其中 a, b 是常数。对 y 方向也成立。

$$(ii) \text{ 如 } f_1 = f_2 = f_3, \text{ 则 } \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right] = \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right] = 0$$

为了方便以下的推演, 我们先指出几个等式:

$$\begin{aligned} (x_3^{(k)} - x_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k + (y_3^{(k)} - y_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k &= (f_3^{(k)} - f_1) \\ (x_2^{(k)} - x_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k + (y_2^{(k)} - y_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k &= (f_2^{(k)} - f_1) \\ \sum_{k=1}^4 \left\{ \left[\frac{(y_3^{(k)} - y_1)(x_3^{(k)} - x_1)}{r_{13}^{(k)}} - \frac{(y_2^{(k)} - y_1)(x_2^{(k)} - x_1)}{r_{12}^{(k)}} \right] \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(y_3^{(k)} - y_1)^2}{r_{13}^{(k)^2}} - \frac{(y_2^{(k)} - y_1)^2}{r_{12}^{(k)^2}} \right] \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $r_{ij}^{(k)}$ 表 Δ_k 中 M_1 到第 i 个顶点线段的距离。

我们以 Δ_1 为例, 证明(4)的第一式:

$$\begin{aligned} \text{由(3)式, 将} \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_1 \text{第2、3列交换位置后, 有} (x_3 - x_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_1 + (y_3 - y_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_1 \\ = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} 1 & f_1 & y_1(x_3 - x_1) - x_1(y_3 - y_1) \\ 1 & f_2 & y_2(x_3 - x_1) - x_2(y_3 - y_1) \\ 1 & f_3 & y_3(x_3 - x_1) - x_3(y_3 - y_1) \end{vmatrix} = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} 1 & f_1 & y_1x_3 - x_1x_3 \\ 1 & f_2 & y_2x_3 - x_1x_2 - x_2(y_3 - y_1) \\ 1 & f_3 & y_1x_3 - x_1y_3 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} 1 & f_1 & y_1x_3 - x_1y_3 \\ 1 & f_2 & y_2(x_3 - x_1) - x_2(y_3 - y_1) \\ 0 & f_3 - f_1 & 0 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{D_1} (f_3 - f_1) [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = f_3 - f_1 \end{aligned}$$

同样地可证明第二式。

如以 H 表示第三式左端, 不难由前二式证明:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{(y_3^{(k)} - y_1)}{r_{13}^{(k)^2}} \left[(x_3^{(k)} - x_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k + (y_3^{(k)} - y_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(y_2^{(k)} - y_1)}{r_{12}^{(k)^2}} \left[(x_2^{(k)} - x_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k + (y_2^{(k)} - y_1) \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k \right] \right\} \right. \\ &= \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{(f_3^{(k)} - f_1)(y_3^{(k)} - y_1)}{r_{13}^{(k)^2}} - \frac{(f_2^{(k)} - f_1)(y_2^{(k)} - y_1)}{r_{12}^{(k)^2}} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^4 \left\{ f_1 \left(\frac{y_2^{(k)} - y_1}{r_{12}^{(k)^2}} - \frac{y_3^{(k)} - y_1}{r_{13}^{(k)^2}} \right) - f_2 \frac{y_2^{(k)} - y_1}{r_{12}^{(k)^2}} + f_3 \frac{y_3^{(k)} - y_1}{r_{13}^{(k)^2}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

于是证明(4)。

显然,对一般共 N 个三角形的内节点 M_1 , (4)式亦成立。

2.3) 计算任意内网点偏导数的一个格式 设内网点 M_1 共 N 个三角形(参看图 2), 我们给出如下计算 M_1 点测值 f_1 的偏导数的格式:

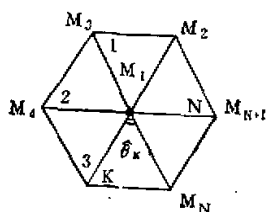


图 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $\hat{\theta}_k$ 表示 Δ_k 的顶点 M_1 到第 2 个和第 3 个顶点连线与 x 轴夹角 $\theta_2^{(k)}, \theta_3^{(k)}$ 之差(如图 2 所示)。

按本节 2.1 说明的概念,我们给出(5)的推演:

从(1)式中 $M(a, x, y)$ 的性质和 f 的连续性,允许积

分号下求导数,因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial x}(x, y) &= \frac{24}{\pi} a^{-3} \iint_{(D)} (X-x)[a^2 - (X-x)^2 - (Y-y)^2] f(X, Y) dX dY \\ &= \frac{24}{\pi} a^{-3} \iint_{(C_0^3)} X_1(a^2 - X_1^2 - Y_1^2) f(X_1 + x, Y_1 + y) dX_1 dY_1 \end{aligned}$$

又当 $(X_1 + x, Y_1 + y) \in \Delta_k$, 由(2)'式有:

$$\begin{aligned} f(X_1 + x, Y_1 + y) &= \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)}(X_1 + x, Y_1 + y) f_i^{(k)} = \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)}(x, y) f_i^{(k)} \\ &\quad + \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k X_1 + \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k Y_1, \end{aligned}$$

将(3)' $f(X_1 + x, Y_1 + y)$ 代入上面 f_s 的导数式中,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial x}(x_1, y_1) &= \frac{24}{\pi} a^{-3} \sum_{k=1}^N \iint_{(C_0^3 \cap \Delta_k)} X_1(a^2 - X_1^2 - Y_1^2) \left\{ \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)}(x_1, y_1) f_i^{(k)} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k X_1 + \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k Y_1 \right\} dX_1 dY_1 \\ &= \frac{24}{\pi} a^{-3} \sum_{k=1}^N \left\{ f_1 \int_0^a r^2 (a^2 - r^2)^2 dr \int_{\theta_2^{(k)}}^{\theta_3^{(k)}} \cos \varphi d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k \int_0^a r^3 (a^2 - r^2)^2 dr \int_{\theta_2^{(k)}}^{\theta_3^{(k)}} \cos^2 \varphi d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_k \int_0^a r^3 (a^2 - r^2)^2 dr \int_{\theta_2^{(k)}}^{\theta_3^{(k)}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right\} \\ &= \frac{192}{\pi} a^{-4} \sum_{k=1}^N (\sin \theta_3^{(k)} - \sin \theta_2^{(k)}) f_1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_k \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (\sin \theta_3^{(k)} \cos \theta_3^{(k)} - \sin \theta_1^{(k)} \cos \theta_1^{(k)}) + \left[\frac{Df}{Dy} \right]_k \\
 & \cdot (\sin^2 \theta_3^{(k)} - \sin^2 \theta_1^{(k)}) \Big\} + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{Df}{Dx} \right]_k \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} \\
 & = \sum_{k=1}^N \left[\frac{Df}{Dx} \right]_k \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\frac{Df}{Dx} \right]_k \left(\frac{(y_3^{(k)} - y_1)(x_3^{(k)} - x_1)}{r_{13}^{(k)2}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(y_3^{(k)} - y_1)(x_3^{(k)} - x_1)}{r_{12}^{(k)2}} \right) + \left[\frac{Df}{Dy} \right]_k \left(\frac{(y_3^{(k)} - y_1)^2}{r_{13}^{(k)2}} - \frac{(y_3^{(k)} - y_1)^2}{r_{12}^{(k)2}} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

由(4)式,以及同样地对 y 的偏导数进行讨论,我们获得

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial f_a}{\partial x}(x_1, y_1) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{Df}{Dx} \right]_k \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi}; \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial f_a}{\partial y}(x_1, y_1) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{Df}{Dy} \right]_k \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi},$$

于是证明(5)。

(5) 式的含义是很直观的,其分析意义由以上推演阐明。

2.4) 计算涡、散度的格式 利用格式(5),不难导出处于内节点地位那些测站的涡、散度的计算公式

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{V} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\frac{D\mathbf{u}}{Dx} \right]_k + \left[\frac{D\mathbf{v}}{Dy} \right]_k \right\} \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} \\
 \operatorname{Cul} \mathbf{V} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\frac{D\mathbf{v}}{Dx} \right]_k - \left[\frac{D\mathbf{u}}{Dy} \right]_k \right\} \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi}
 \end{aligned} \quad (6)$$

§3 关于矩形、正方形网点的讨论

3.1) 矩形网点 设 M_1 是图3所算矩形网点 (i, j) , h_x, h_y 分别表示 x, y 的步长。令

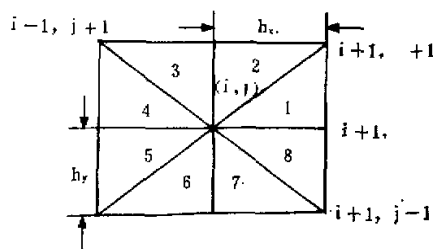


图 3

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{h_y}{h_x} \right) \text{ (取第一限主值)}$$

$$\text{此时当 } k=1, 4, 5, 8 \text{ 有 } \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\text{当 } k=2, 3, 6, 7 \text{ 有 } \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2\pi}$$

由(3)式,不难算出

$$\left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_1 = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h_x}, \quad \left[\frac{Df}{D\mathbf{x}} \right]_2 = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1}}{h_x}$$

$$\left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_1 = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{h_y}, \quad \left[\frac{Df}{D\mathbf{y}} \right]_2 = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{h_y}$$

代入(5)式,有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(i, j) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\pi} \right) \phi_x f_{i,j} + \frac{\lambda}{\pi} (\phi_x f_{i,j+1} + \phi_x f_{i,j-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(i, j) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\pi} \right) \phi_y f_{i,j} + \frac{\lambda}{\pi} (\phi_y f_{i+1,j} + \phi_y f_{i-1,j}) \quad (7)$$

其中

$$\phi_x f_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})/2h_x; \quad \phi_y f_{i,j} = (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})/2h_y$$

3.2) 正方形网点 我们取图4所示的情况。此时 $\frac{\partial \lambda}{2\pi} = \frac{1}{4}$

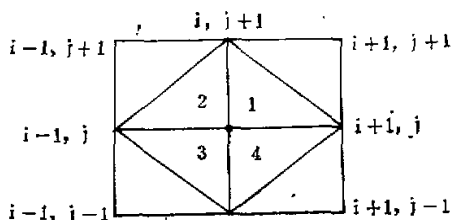


图 4

由此和(3)、(5)不难获得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(i, j) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(i, j) = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h} \quad (8)$$

如我们取图3所示正方形 ($h_x = h_y = h$) 情况, 不难由(7)推出

$$\frac{\partial f}{\partial x}(i, j) = \frac{1}{2} \phi_x f_{i,j} + \frac{1}{4} (\phi_x f_{i,j+1} + \phi_x f_{i,j-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(i, j) = \frac{1}{2} \phi_y f_{i,j} + \frac{1}{4} (\phi_y f_{i+1,j} + \phi_y f_{i-1,j}) \quad (9)$$

综合(5)、(7)、(8)、(9), 我们可以看出, 格式(5)是一般常用的中心差, 六点差分格式(参看[2])等的一个较自然的推广。(5)式, 在我们混合使用三角形、矩形、正方形网格, 设计差分格式时, 提供了一个统一的方案。

§4 计算高度场变化率的一种混合格式

在计算高度场的梯度和涡、散度时, 使用(5)和(6), 只有相应的要素变化较小时, 才有较好的近似。否则, 将造成一些主要气象波的削弱(特别在测站稀少的洋面上)。

我们引用[3]中介绍的一种高度和测风的解析式, 混合使用风场和高度场之值, 从(5)出发, 讨论了一种计算高度变化率的格式, 力求减少上述现象。

设 M_i 为如图2所示的一个内网点, $\phi_i^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$, 表示三角形 Δ_k 三个

顶点上的高度值 ($\phi_i^{(k)} = \phi_i$, 其它二个顶点编号 2, 3 沿反时针向增加)。

当 $(x, y) \in \Delta_k$, 按 [3] 的一个公式, 令

$$\hat{\phi}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \zeta_i^{(k)} \left\{ \phi_i^{(k)} + \frac{\tilde{\kappa} f_i^{(k)}}{M_i^{(k)}} [(v_i^{(k)} + v)(x - x_i^{(k)}) - (u_i^{(k)} + u)(y - y_i^{(k)})] \right\} \quad (4)'$$

其中

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x, y) = \sum_{i=1}^3 \zeta_i^{(k)} \begin{pmatrix} u_i^{(k)} \\ v_i^{(k)} \end{pmatrix}$$

式中带有上标 (k) 诸量, 意义如 $\phi_i^{(k)}$ 同。

同 §2 讨论, 有

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(X+x, Y+y) &= \sum_{i=1}^3 \zeta_i^{(k)}(X+x, Y+y) \left\{ \phi_i^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\kappa} f_i^{(k)}}{M_i^{(k)}} \cdot \right. \\ &\quad \cdot [(v_i^{(k)} + v(X+x, Y+y))(X+x - x_i^{(k)}) \\ &\quad \left. - (u_i^{(k)} + u(X+x, Y+y))(Y+y - y_i^{(k)})] \right\} \end{aligned}$$

我们以 $\hat{\phi}_1(X+x, Y+y)$ 记上式 $\{ \}$ 中第二部分之和, 从 (3)' 以及面积坐标的性质: $\zeta_i^{(k)}(x_i^{(k)}, y_i^{(k)}) = 1, i \neq j$ 时, $\zeta_i^{(k)}(x_j^{(k)}, y_j^{(k)}) = 0$, §2 中 2.2 所述面积变化比的性质, 有:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(X+x_1, Y+y_1) &= \tilde{\kappa} \frac{f_1}{M_1} v_1 X + \frac{\tilde{\kappa}}{2} \left\{ \left[\frac{D \frac{f}{M} (u_1 + u)(y_1 - y)}{D\mathbf{x}} \right]_k X \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{D \frac{f}{M} (v_1 + v)(x_1 - x)}{D\mathbf{y}} \right]_k Y \right\} + R_1(X, Y) \end{aligned} \quad (4)_1$$

和 $\hat{\phi}(X+x, Y+y)$ 中 $\{ \}$ 的第三部分之和为

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2(X+x_1, Y+y_1) &= -\tilde{\kappa} \frac{f_1}{M_1} u_1 Y + \frac{\tilde{\kappa}}{2} \left\{ \left[\frac{D \frac{f}{M} (u_1 + u)(y_1 - y)}{D\mathbf{x}} \right]_k X \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{D \frac{f}{M} (u_1 + u)(y_1 - y)}{D\mathbf{y}} \right]_k Y \right\} + R_2(X, Y) \end{aligned} \quad (4)_2$$

以及

$$\sum_{i=1}^3 \zeta_i^{(k)}(X+x_1, Y+y_1) \phi_i^{(k)} = \phi_1 + \left[\frac{D\phi}{D\mathbf{x}} \right]_k X + \left[\frac{D\phi}{D\mathbf{y}} \right]_k Y \quad (4)_3$$

其中 $R_1(X, Y), R_2(X, Y)$ 是关于 X, Y 二次幂以上诸项。

将 (4)₁, (4)₂, (4)₃ 代入 $\hat{\phi}(X+x_1, Y+y_1)$ 中, 则得

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(X+x_1, Y+y_1) &= \phi_1 + \tilde{\kappa} \frac{f_1}{M_1} (v_1 X - u_1 Y) + \left[\frac{D\phi}{D\mathbf{x}} \right]_k X \\ &\quad + \left[\frac{D\phi}{D\mathbf{y}} \right]_k Y + \left[\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}} \right]_k X + \left[\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{y}} \right]_k Y + R(X, Y) \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, 并且在 Δ_k 上,

$$F_i = \frac{\tilde{\kappa}}{2} \frac{f_i^{(k)}}{M_i^{(k)}} [(v_i^{(k)} + v_i)(x_1 - x_i^{(k)}) - (u_i^{(k)} + u_i)(y_1 - y_i^{(k)})]$$

$i = 1, 2, 3$; $R(X, Y)$ 是 X, Y 的二次幂以上诸项。

由于从

$$\begin{aligned} |R_C| &= \left| \frac{24}{\pi} a^{-8} \iint_{(C_0^0 \cap \Delta_k)} X(a^2 - X^2 - Y^2)^2 X^p dX dY \right. \\ &\leq \frac{24}{\pi} a^{-8} \int_0^a r^{p+2} (a^2 - r^2)^2 dr \int_{\theta_2^{(k)}}^{\theta_3^{(k)}} |\cos^p \varphi| d\varphi \end{aligned}$$

有

$$|R_C| \leq \frac{24}{\pi} a^{-8} \cdot a^{p+7} \cdot 2\pi \left(\frac{1}{p+3} - \frac{2}{p+5} + \frac{1}{p+7} \right)$$

当 $p \geq 2$ 时, $\lim_{a \rightarrow 0} R_C = 0$ 。因此, 完全同 §2 一样, 我们获得计算不规则网点(内节点)高度变化率的格式

$$\begin{aligned} \phi_x &= \tilde{\kappa} \frac{f_1}{M_1} v_1 + \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\frac{D\phi}{D\mathbf{x}} \right]_k + \left[\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}} \right]_k \right\} \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} \\ \phi_y &= -\tilde{\kappa} \frac{f_1}{M_1} u_1 + \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\frac{D\phi}{D\mathbf{y}} \right]_k + \left[\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{y}} \right]_k \right\} \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} \end{aligned} \quad (11)$$

(11)与(5)相比较,(11)中多了有明显气象意义的项:

$$\tilde{\kappa} \frac{f_1}{M_1} + \sum_{k=1}^N \left[\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}} \right]_k \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi} \text{ 和 } -\tilde{\kappa} \frac{f_1}{M_1} + \sum_{k=1}^N \left[\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{y}} \right]_k \frac{\hat{\theta}_k}{2\pi}.$$

利用(11),完全同 §3 一样地讨论,可获相应的矩形、正方形网点的计算格式:

$$\begin{aligned} \phi_x &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\pi} \right) (\phi_x \phi_{i,j} + \Delta_x P_{i,j}) + \frac{\lambda}{\pi} (\phi_x \phi_{i+1,j} + \Delta_x P_{i+1,j} + \phi_x \phi_{i-1,j} + \Delta_x P_{i-1,j}) \\ \phi_y &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\pi} \right) (\phi_y \phi_{i,j} + \Delta_y P_{i,j}) + \frac{\lambda}{\pi} (\phi_y \phi_{i,j+1} \\ &\quad + \Delta_y P_{i,j+1} + \phi_y \phi_{i,j-1} + \Delta_y P_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (12)$$

以及

$$\begin{aligned} \phi_x &= \phi_x \phi_{i,j} + \Delta_x P_{i,j} \\ \phi_y &= \phi_y \phi_{i,j} + \Delta_y P_{i,j} \end{aligned} \quad (13)$$

和

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{1}{2} (\phi_x \phi_{i,j} + \Delta_x P_{i,j}) + \frac{1}{4} (\phi_x \phi_{i+1,j} + \Delta_x P_{i+1,j} + \phi_x \phi_{i-1,j} + \Delta_x P_{i-1,j}) \\ \phi_y &= \frac{1}{2} (\phi_y \phi_{i,j} + \Delta_y P_{i,j}) + \frac{1}{4} (\phi_y \phi_{i,j+1} + \Delta_y P_{i,j+1} \\ &\quad + \phi_y \phi_{i,j-1} + \Delta_y P_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_x P_{i,j} &= \tilde{K} \frac{f_{i,j}}{M_{i,j}} v_{i,j} - \frac{\tilde{K}}{4} \left(\frac{f_{i+1,j}}{M_{i+1,j}} v_{i,j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{i-1,j}}{M_{i-1,j}} v_{i,j} + \frac{f_{i+1,j}}{M_{i+1,j}} v_{i+1,j} + \frac{f_{i-1,j}}{M_{i-1,j}} v_{i-1,j} \right) \\ \Delta_y P_{i,j} &= -\tilde{K} \frac{f_{i,j}}{M_{i,j}} u_{i,j} + \frac{\tilde{K}}{4} \left(\frac{f_{i,j+1}}{M_{i,j+1}} u_{i,j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{i,j-1}}{M_{i,j-1}} u_{i,j} + \frac{f_{i,j+1}}{M_{i,j+1}} u_{i,j+1} + \frac{f_{i,j-1}}{M_{i,j-1}} u_{i,j-1} \right)\end{aligned}$$

以上介绍的格式(5),(6),(7),(8),(9)和(11)–(14),可能是有用途的。但我们还没有对格式的精确度以及不同情况下对预报方程,不同步长和时间步长对计算稳定性影响等进行讨论。将在以后的工作中探索。

参 考 资 料

- [1] С. Л. Соболев, 泛函分析在数理方程中的应用, 王柔怀, 童勤谟等译, 科学出版社, 1959。
- [2] 马吉涛, 一种 ε -Spline 函数、一类光滑算子和计算偏导数的一种格式(尚未发表)。
- [3] 马吉涛, 一个含有台风高度场的客观分析方法, 南京大学学报(自然科学版), 1975(2), pp.93–103。