第3卷 第2期　　大 气 科 学　　Vol. 3, No. 2
1979 年 6 月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　June, 1979

提高差分与微分逼近程度的一个新方案

伍荣生
(南京大学气象系)

提　　要

利用电子计算机进行数值天气预报或者进行一些物理量如散度、涡度等的计算时，通常采用差分方法即以差分来代替微分，由于差分与微分之间存有一定的误差，这就不同程度地影响到计算的精确性。本文利用最优逼近的方法，提供了一个改善差分与微分逼近程度的新方案，它较通常的三点中心差或四阶精度差分格式提高了精确度。这个方案可以用于日常的物理量的计算及数值预报中去。

目前，在进行涡、散度等物理量的计算或数值预报时，通常用差分来代替微分，由于离散化的影响，使得差分与微分之间存有一定的误差，而此误差又与该物理量的波长有关，对于气象上有些波动，它可以达到百分之十到百分之二十左右，因此设法改善差分与微分逼近程度对于提高计算结果的精确性是很重要的。

本文提供了一个改善差分与微分逼近程度的一个新方案，它类似于平滑算子的处理[1]，挑取最合适的系数，使得经过运算后的物理量的差分最逼近于微分，这样就使精确度得到提高。由于涡、散度及原始方程组中所出现的大都是一阶微分，所以本文着重讨论提高一阶微分与差分逼近程度的方法，高阶微分不难仿此求得合适的方案。

§1　一阶微分与差分

我们用$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i$来表示物理量$f$在$i$点的差分，用$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$来表示$f$在$i$点的微分，如果物理量$f$可写成波动形式，即

$$f = e^{ikx} \tag{1}$$

其中$K = \frac{2\pi}{L}$为波数，L为波长。如用中心差来代替微分，则有

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \tag{2}$$

其中h为格距，将(1)式代入(2)式，有

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i = i\frac{\sin Kh}{h} f_i \tag{3}$$

将(1)式对x微分，则有

1977 年3月15日修改稿。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = iKf_i \tag{4}$$

从(3)(4)两式可得

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i = Q\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i \tag{5}$$

$$Q = \frac{\sin Kh}{Kh} \tag{6}$$

Q 值的大小可以表示 i 点微分与差分之间逼近程度，Q 值越接近于 1 就表示差分值越接近于微分值．反之 $1-Q$ 可以表示差分与微分之间的误差，$1-Q$ 愈大，表示误差愈大．

气象上所关切的离散波谱是波长为二格距的波动到波长为无限的波动[2]．因此相应的 Kh 值的变化范围为 π 到 0，不同 Kh 及与其对应的 Q 整数格距的波长 L 及 Q 值，见表 1．

表1　不同波长差分与微分逼近程度 Q 的数值．RQ 表示经过处理后差分与微分逼近程度，h 为格距，L 表示波长．在(16)式中，N 取 4 时，$A=-2.19\times10^{-1}$，N 取 5 时，$A=-2.51\times10^{-1}$，最后一栏，$A=-1.67\times10^{-1}$，相当于四阶精度差分格式．

	Kh	0	$\pi/10$	$2\pi/10$	$3\pi/10$	$4\pi/10$	$5\pi/10$	$6\pi/10$	$7\pi/10$	$8\pi/10$	$9\pi/10$	π
	L	∞	$20h$	$10h$		$5h$	$4h$					$2h$
	Q	1.00	0.98	0.94	0.86	0.76	0.64	0.51	0.37	0.23	0.11	0.00
$A=-2.19\times10^{-1}$	RQ	1.00	1.00	1.01	1.01	0.99	0.92	0.79	0.62	0.42	0.20	0.00
$A=-2.51\times10^{-1}$	RQ	1.00	1.01	1.03	1.04	1.02	0.96	0.84	0.66	0.45	0.22	0.00
$A=-1.67\times10^{-1}$	$\bar{Q}$	1.00	1.00	1.00	0.98	0.93	0.85	0.72	0.57	0.38	0.18	0.00

从表中可以看到 Q 值随波长而异，波长愈长逼近程度愈好，但只有当波长趋于无限时 Q 值才趋于1，此时差分之值才精确地等于微分值，其余波动都有不同程度的误差，例如对于 5 格距波长的波动其误差可达 24%，对于 10 格距波长的波动其误差还有 6%．二格距波动是一种噪波，需要过滤[3]，所以不必讨论其误差．根据以上分析可见中心差对于场的计算或数值预报来说，特别是对于那些中、短波长的波动而言具有较大误差．因此提高差分与微分逼近程度的研究仍是有其必要性的．

我们是根据以下的考虑来提高差分精确度的．

由于我们所关切的是函数 $f(x)$ 的导数即 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$，而不是函数值本身，因此可以设法构造出一个与 f 有关的函数 $\bar{f}$，$\bar{f}$ 与 f 的函数值可以不同，但要求 $\bar{f}$ 的差分充分地接近于 f 的微分，即，$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right] \simeq \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$，这样以 $\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right)$ 来代替 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ 就可以提高其精确度．我们还可以从另一角度来分析这个问题，这将在第五节中予以说明．

如果 $\bar{f}$ 与 f 之间具有这样的关系，即

$$\bar{f}_i = R(K)f_i \tag{7}$$

则有

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]_i = R(K)Q(K)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i \tag{8}$$

现在的问题是设法挑取合适的 $R(K)$，在有关的K的范围内，使 RQ 充分地接近于1，这样，就达到了

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]_i \simeq \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$$

这时，两者误差最小。

现在取

$$\bar{f}_i = A(f_{i+1} + f_{i-1}) + Bf_i \tag{9}$$

其中 A, B 为待定系数。将(1)式代入(9)式，有

$$R(K) = 2A\cos Kh + B \tag{10}$$

(9)(10)两式，在形式上与平滑算子是相似的[1][3]，但其中 A, B 两个系数是根据不同的要求而决定的，在过滤二格距噪波的问题中，要求在 $Kh=\pi$ 时 $R(K)=0$，而在我们的问题中则不同，而是要求在K的一定范围内，使 RQ 值充分接近于1.

利用(6)(10)两式，可得

$$R(K)Q(K) = \frac{2\sin 2Kh}{2Kh}A + \frac{\sin Kh}{Kh}B \tag{11}$$

根据上面分析，A, B是这样决定的，首先要求当 $Kh\to 0$ 时，即 $L\to\infty$ 时，$R(Q)$ 与Q的性质相同，即 $RQ\to 1$，因此有

$$B = (1-2A) \tag{12}$$

其次，要求 Kh 从0到某一数值的 $Kh=(Kh)_N$ 之间，RQ 充分接近于1，这可利用最小二乘法来决定出最合适的A来。由于二格距波长的波动是一种噪波，需设法过滤，所以$(Kh)_N$ 之值应该要小于π。

我们将$(0, \pi)$区间分为十等分，每格距为 $\pi/10$，如此上述物理要求相当于以下的问题，即令

$$J = \sum_{n=0}^{n=N\frac{\pi}{10}} (RQ-1)^2 \tag{13}$$

将(11)(12)式代入，即

$$J = \sum_{n=0}^{n=N\frac{\pi}{10}} \left[2A\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{\frac{n\pi}{5}} - \frac{\sin\frac{n\pi}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\right) + \frac{\sin\frac{n\pi}{10}}{\frac{n\pi}{10}} - 1\right]^2 \tag{14}$$

取A使满足

$$\frac{\partial J}{\partial A} = 0 \tag{15}$$

如此可求得A为

$$A = \sum_{n=0}^{n=N\frac{\pi}{10}} \left(1 - \frac{\sin\frac{n\pi}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\right)\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{\frac{n\pi}{5}} - \frac{\sin\frac{n\pi}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\right)$$

$$\Bigg/ \sum_{n=0}^{n=N\frac{\pi}{10}} 2\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{\frac{n\pi}{5}}-\frac{\sin\frac{n\pi}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\right)^2 \tag{16}$$

取不同的N值，算得不同的A及与它相对应的 RQ值，我们发现当N取 4 或 5 时，RQ 最为理想，此时对于某些波动$\left[\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\right]_i$与$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$的误差其增大的最大值不超过5%（即 RQ 最大值不超过 1.05），这样就不会引起虚假的增大．为了节省篇幅起见，在表 1 中，只给出N为 4、5 二种情况下的A的数值及 RQ 的大小．N取 4 或 5 表示从无限长的波长到 5 格距或 4 格距波长的波动范围内 RQ 值最接近于 1，这些波长范围也是气象上所最关切的范围．

从表 1 中可以看到 RQ 值均较Q值要接近于 1，这就说明经过以上的处理之后使差分的精确度有了提高．例如当A取-2.19×10^{-1}时，5 格距的波动的误差（即$1-Q$ 值）由原来中心差的-24%减为-1%，10 格距波动原来中心差的误差为-6%，现在减小为1%．

当N为 4 时，A取-2.19×10^{-1}，因此依(12)式可得B为 1.438，(7)式近似地可写成

$$\bar{f}_i = -0.219(f_{i+1}+f_{i-1})+1.438f_i \tag{17}$$

利用此式求出$\bar{f}$，再求出$\left[\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\right]$，以此来代替$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$，则误差最小．

§2 二阶微分与差分

相似于上节处理，有

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] = (f_{i+1}+f_{i-1}-2f_i)/h^2 \tag{18}$$

将(1)式代入，则有

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_i = \frac{2}{h^2}(\cos kh-1)f_i \tag{19}$$

对(1)式求二次微分，有

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = -K^2 f_i \tag{20}$$

因此，有

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_i = Q\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i \tag{21}$$

$$Q = -\frac{2}{(Kh)^2}(\cos Kh-1) \tag{22}$$

不同波长的Q值见表 2．

利用(7)(8)(9)(12)式，可得

$$\left[\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial x^2}\right] = RQ\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x}\right)_i \tag{23}$$

表 2　二阶差分与微分逼近程度的 Q 值表，说明同表 1，
$N=4$ 时，$A=-9.97\times10^{-2}$，$N=5$ 时，$A=-1.09\times10^{-1}$

	Kh	0	$\pi/10$	$2\pi/10$	$3\pi/10$	$4\pi/10$	$5\pi/10$	$6\pi/10$	$7\pi/10$	$8\pi/10$	$9\pi/10$	π
	L	∞	$20h$	$10h$		$5h$	$4h$					$2h$
	Q	1.00	0.99	0.97	0.93	0.86	0.81	0.74	0.66	0.57	0.49	0.41
$A=-9.97\times10^{-2}$	RQ	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.93	0.87	0.80	0.68	0.57
$A=-1.09\times10^{-1}$	RQ	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01	0.99	0.95	0.88	0.80	0.70	0.58

$$RQ=-\frac{4}{(Kh)^2}(\cos^2 Kh-1)^2A-\frac{2}{(Kh)^2}(\cos Kh-1) \tag{24}$$

相似于上节处理，将(24)式代入(13)(15)式可求得 A 为

$$A=-\sum_{n=0}^{n=N\frac{\pi}{10}}\left[1+\frac{2}{\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{10}-1\right)\right]\left(\cos\frac{n\pi}{10}-1\right)^2$$
$$\cdot\frac{4}{\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2}\Bigg/\sum_{n=0}^{n=N\frac{\pi}{10}}\left(\frac{4}{\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{10}-1\right)^2 \tag{25}$$

当 $N=4$ 时，$A=-9.97\times10^{-2}$；$N=5$ 时，$A=-1.09\times10^{-1}$，与此相对应的 RQ 值见表2. 从表可见，通过上述运算之后，RQ 值均较 Q 值接近于1，这就达到了提高差分精确度的目的.

当 A 取 -9.97×10^{-2} 时，$B\simeq1.1994$，此时，有

$$\bar{f}_i=-0.0997(f_{i+1}+f_{i-1})+1.1994f_i \tag{26}$$

§3　二 维 问 题

上述方法很容易推广到二维问题中去，例如(7)式的运算可以对 x，y 二个方向进行，即

$$\bar{f}^{x,y}_{i,j}=\frac{1}{2}(\bar{f}^{x}_{i,j}+\bar{f}^{y}_{i,j}) \tag{27}$$

其中$(\overline{\ \ })^{x}_{i,j}$示沿 x 方向运算，$(\overline{\ \ })^{y}_{i,j}$示沿 y 方向运算，因此相应于(17)式可写成

$$\bar{f}^{x,y}_{i,j}=1.438f_{i,j}-0.110(f_{i,j+1}+f_{i,j-1}+f_{i+1,j}+f_{i-1,j}) \tag{28}$$

相应于(26)式可写成

$$\bar{f}^{x,y}_{i,j}=1.1994f_{i,j}-0.0499(f_{i,j+1}+f_{i,j-1}+f_{i+1,j}+f_{i-1,j}) \tag{29}$$

利用此二式分别求一阶与二阶偏差分来表示偏导数，原其结果就要较中心差要精确得多.

§4　数 值 例 子

现在给出一个理想函数 $f(x)$，我们可以求出每个格点上的函数值及它的一阶与二阶导数. 用中心差及本方案求出与其对应的差分值，然后比较其结果，便可以检验本方案的

表 3　一阶微分与差分数值表．最后一栏 $2h\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^4$ 示四阶精度的差分值．

格　点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f	3.0000	4.5000	3.6962	3.0000	3.6961	4.5000	3.0000	−1.5000	−6.6961	−9.0000	−6.6962	−1.5001
$\tilde{f}$		5.0045	3.6726	2.6951	3.6726	5.0045	3.6570	−1.3475	−7.3295	−10.0091	−7.3292	
$2h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$	6.2832	0.0000	−2.2998	−0.0000	2.2998	0.0000	−6.2831	−10.8828	−8.5830	−0.0001	8.5229	10.8828
$2h\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$		0.6962	−1.5000	−0.0000	1.5000	−0.6961	−6.0000	−9.6961	−7.5000	−0.0001	7.5000	
$2h\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right]$			−2.3095	−0.0000	2.3095	−0.0125	−6.3520	−10.9865	−8.6616	−0.0001		
$2h\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^4$			−2.1160	−0.0000	2.1160	−0.1781	−6.2680	−10.6781	−8.3840	−0.0001		

表 4　二阶微分与差分数值表．

格　点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f	3.0000	4.5000	3.6962	3.0000	3.6961	4.5000	3.0000	−1.5000	−6.6961	−9.0000	−6.6962	−1.5001
$\tilde{f}$		4.7297	3.6854	2.8612	3.6854	4.7297	3.2991	−1.4306	−6.9845	−9.4594	−6.9846	
$h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$	−3.2899	−2.4674	0.2204	1.6449	0.2204	−2.4674	−3.2899	−0.8225	3.0695	4.9348	3.0695	−0.8224
$h^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]$		−2.3038	0.1077	1.3923	0.1077	−2.3038	−3.0000	−0.6962	2.8923	4.6077	2.8923	
$h^2\left[\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^4}\right]$			0.2200	1.6485	0.2201	−2.4749	−3.2991	−0.8242	3.0790	4.9497		

效果.

给出的函数为

$$f(x)=3\cos\left(\frac{\pi}{3h}x\right)+6\sin\left(\frac{\pi}{6h}x\right)$$

$$x=jh,\ j=0,1,\cdots 11 \tag{30}$$

(30)式相当于 6 格距及 12 格距的波动之后. 从(30)式可求得

$$2hf'(x)=-2\pi\left(\sin\left(\frac{\pi}{3h}x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6h}x\right)\right) \tag{31}$$

$$h^2f''(x)=-\pi^2\left(\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3h}x\right)+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6h}x\right)\right) \tag{32}$$

利用(30)—(32)式可求得各个格点上的 f 及 $2hf'$, h^2f'' 的数值.

用(17)式及(26)式分别求出 $\bar{f}_1$ 及 $\bar{f}_2$, 再依此求出一阶与二阶差分, 将一阶导数及差分的计算结果列于表 3 中,二阶导数及差分的计算结果列于表 4 中.

从表 3 中可以看到,利用本方法所得的结果都是很接近于微分值, 例如在第 3 点上, 微分值为 -2.2988, 依本方法所求得的差分值为 -2.3095. 误差为 -0.0097, 而依中心差所求得的差分值为 -1.5000,误差为 0.7998, 其余各点亦有相似结果.

从表 4 亦可以看到,本方法所求得的差分值是非常接近于微分值, 例如在第 3 点上, 微分值为 0.2204, 本方法所求得的差分值为 0.2200, 而通常的中心差的差分值为 0.1077, 其余各点亦有相似的结果.

从以上数值例子的结果来看,利用本方法进行的计算, 特别是对于中短波动而言,较中心差具有较高的精确度. 关于在数值预告上的应用问题,将在 §6 中予以讨论.

§5　与四阶精度差分格式的关系

利用(17)式,我们可以求得

$$\left[\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\right]_i=1.438\left(\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}\right)-0.438\left(\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}\right) \tag{33}$$

此式与四阶精度的差分公式在形式上是相似的,但系数不同. 四阶差分公式为

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i=\frac{4}{3}\left(\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}\right) \tag{34}$$

现在我们分析一下两者的关系问题.

四阶精度差分公式的基础是以四次多项式来逼近函数,即

$$f(x)=a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5 \tag{35}$$

其中 $a_1\cdots a_5$ 是利用$[-2h, 2h]$区间内 $x=-2h,\ -h,\ 0,\ h,\ 2h$ 五点上已知函数 f_{i-2}, $\cdots f_{i+2}$ 来确定. 从(35)式,我们有

$$f'(0)=a_4 \tag{36}$$

将求得的 a_4 代入上式,就为(34)式.

本方案所得的结果虽然与它相似,但其出发点是不同的,这在 §1 中已经加以说明,但

它还可以从多项式逼近的角度来加以讨论.

我们假定在$[-2h, 2h]$区间,函数 $f(x)$是以二次多项式来逼近,即

$$f(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3 \tag{37}$$

如此有

$$f'(0) = a_2 \tag{38}$$

但此时的 $a_1, \cdots a_3$ 用不同格距的格点上函数值来确定，如利用$-h$，0，h 三点上函数值来确定 $a_1, \cdots a_3$，则有

$$f_1'(0) = a_2 = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} \tag{39}$$

如利用$-2h$，0，$2h$ 三点上的函数值来确定系数 $a_1, \cdots a_3$，则有

$$f_2'(0) = \tilde{a}_2 = \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h} \tag{40}$$

$f_1'(0)$，$f_2'(0)$分别表示利用格距 h 及 $2h$ 求得的差分值,此二值一般是不等的,现用此二值分别乘以加权函数来求和,选取最合适的加权系数使其与真正的微分值的误差是最小,如此有

$$\tilde{f}'(0) = 2A\tilde{a}_2 + Ba_2$$

其中 $2A$, B 为待定系数,取 $2A$ 是为了使结果与第一节的公式相对应,利用本文的符号来表示,则可写成

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right]_j = \left(2A\,\frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h} + B\,\frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}\right) \tag{41}$$

将(1)式代人,再比较(11)式,有

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right]_j = \bar{Q}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j \tag{42}$$

$$\bar{Q} = \frac{2\sin 2Kh}{2Kh}A + \frac{\sin Kh}{Kh}B = RQ \tag{43}$$

以下便完全按第一节中所述的方法来确定 A, B 二个系数,即要求当 $L\to\infty$ 时，$\bar{Q}\to 1$，在K的一定范围内使 $\bar{Q}$ 充分地接近于 1.

从以上的分析可以知道本方案的基础是用二次多项式来逼近函数，但采用不同格距来确定其系数,取与其对应的差分值的加权平均(因为 $2A+B=1$,实际上 $\tilde{f}'(0)$即为加权平均)来代替微分值,用最小二乘法来挑取最优的加权系数,使精度达到最高.

在(41)式中,如取 $A=-1/6$，则 $B=4/3$,此就是(34)式,从此可见四阶精度差分格式实际上是本方案中的某一特殊格式,在第一节中已经指出,取这样的A并不是最理想的,为了比较起见,在表 1 中给出了 $\bar{Q}$ 值,我们可以看到正如上面所指的那样，$\bar{Q}$ 值并不如 RQ 值那么接近于 1，特别是在较短波长范围内,更为明显。例如在 5 格距波动处，$\bar{Q}$ 为 0.93,而 RQ 值为 0.99,在四格距处 $\bar{Q}$ 为 0.85,而 RQ 值为 0.92。

在表 3 中,给出利用(34)式求出的差分值，从此也证实了上述结果，除了在第七点处以外,本方案的误差均较四阶精度差分公式为小。

二阶微分的关系亦仿此讨论,不再重复了.

下面再用误差的角度来加以一些分析;利用(11)及(12)式,可推得

$$RQ = \frac{\sin Kh}{Kh} - 4A\frac{\sin Kh}{Kh}\sin^2\frac{Kh}{2} \tag{44}$$

当 Kh 较小时,利用级数展开,可得近似关系式

$$RQ = 1 - \left(\frac{1}{6} + A\right)(Kh)^2 + \frac{1}{4}\left(A - \frac{1}{30}\right)(Kh)^4 + \cdots \tag{45}$$

如取 $A = -1/6$, 则上式为

$$RQ = 1 + \frac{1}{4}\left(A - \frac{1}{30}\right)(Kh)^4 + \cdots \tag{46}$$

其误差首项与 Kh 的四次方成正比。但在本方案中 A 不等于 $-1/6$,故误差首项与 Kh 的二次方成比例,但是由于我们采用了最小二乘法原理,使 $RQ-1$ 的绝对值,即总的误差的绝对值达到最小。因此,所得的结果较为理想,这从表 1 及表 3 的数值结果来看,也说明了这一点.

§6 在数值预告中应用的一些问题

我们利用一个简单的线性平流方程来讨论利用本方案的一些问题。

设方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{47}$$

其中 C 为常数,用 $\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]$ 来代替 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$,但 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 仍采用中心差,则上式可写成

$$f_j^{n+1} - f_j^{n-1} = -C\frac{\Delta t}{h}(\bar{f}_{j+1}^n - \bar{f}_{j-1}^n) = RC\frac{\Delta t}{h}(f_{j+1} - f_{j-1}) \tag{48}$$

如 f_j^n 可写成

$$f_j^n = e^{i\omega n\Delta t}\cdot e^{iKjh} \tag{49}$$

则有

$$\sin\omega\Delta t = -CR\frac{\Delta t}{h}\sin Kh \tag{50}$$

利用(6)式,上式可写成

$$\sin\omega\Delta t = -CRQ\cdot Kh\frac{\Delta t}{h} \tag{51}$$

因此,只有当

$$\left|C\cdot RQKh\cdot\frac{\Delta t}{h}\right| \leqslant 1 \tag{52}$$

时,ω 才为实值,故(52)式即为稳定的条件. 利用表 1 中给出的 Kh 及与其对应的 RQ 值,可求得近似关系

$$C\frac{\Delta t}{h} \leqslant \frac{1}{\mathrm{Max}(RQ\cdot Kh)} \approx \frac{1}{1.5} \tag{53}$$

从此可见，时间步长要较通常中差分要短些，通常中差分的稳定条件为

$$C\frac{\Delta t}{h}\leqslant\frac{1}{\mathrm{Max}(Kh\cdot Q)}=1$$

另一方面，我们可以看到，时间步长虽缩短一些，但精确度提高了．在稳定条件下，(51)式可以近似地写成

$$\omega\Delta t=\sin^{-1}\left(-\frac{C\Delta t}{h}RQ\cdot Kh\right)\approx-C\frac{\Delta t}{h}\cdot RQ\cdot Kh \tag{54}$$

或者，还可以写成

$$C_{ph}=\frac{\omega}{K}\simeq-C\cdot RQ \tag{55}$$

其中 C_{ph} 为相速，而在通常中差分情况下，有

$$C_{ph}=\frac{\omega}{K}\approx-C\cdot Q \tag{56}$$

比较(55)与(56)式，可以看到，由于 RQ 值较 Q 值更接近于 1，所以利用本方案的预报相速较中差分格式更接近于理论值 $-C$．

Thompson[4] 曾指出四阶精度差分格式*的优点，在要求与中差分格式有相同的精度(例如 0.90)条件下，四阶差分格式的水平格距可以较中心差大 1.73 倍．在我们的方案中，由于 A 的数值不同，水平格距还可以大一些，例如，利用表 1 中的数据可以近似地估计为 2.5 倍左右．因此，在要求与中差分有相似的精确度的条件下，扩大水平格距足以弥补时步缩短而有余．

最后提出一些想法，为了更加精确地刻划与预报中小尺度系统的特点，目前有这样一种趋势，即将水平格距缩小，或者采用大小网格的方法，这当然是一个提高精确度的途径，但是根据以上分析，也许改善差分格式，或者采用不同差分格式犹如大小网格的方法一样，尽管不缩小水平格距或者少缩小格距，也能提高特别是对于中小系统的预告精确率。这种想法尚有待于实际数值预告的试验来讨论是否合适．

参　考　资　料

[1] G. J. Haltiner, Numerical Weather Prediction, John Wiley & Sons, Inc., 1971.

[2] A. J. Robert, F. G. Shuman and G. P. Gerrity, On partial difference equations in mathematical physics, *Mon. Wea. Rev.*, 1970, 98, 1—6.

[3] R. Shapiro, Smoothing, Filtering and Boundary Effects, Rev. Geophys. & Space Phys. 8, 1970, 359—387.

[4] Ph. D. Thompson, Numerical weather analysis and prediction, McMillan Co., N. Y., 1961.

* Thompson 称二阶近似．

A NEW FINITE DIFFERENCE SCHEME REDUCING TRUNCATION ERROR TO MINIMUM

Wu Rong-sheng

(Nanjing University)

Usually we make use of the finite difference method to compute divergence, vorticity and other quantities which are necessary for numerical weather prediction or other investigations. The accuracy of computing is influenced by the error between the differential and the finite difference. In this paper, we propose a new scheme of finite difference which can reduce the truncation error to minimum. Both theory and practice indicate that this scheme is better than the three-point and five-point finite difference schemes and can be used in routine numerical weather prediction.