

一个大气扩散的梯度-传输理论 模式及其应用

赵 鸣

(南京大学气象系)

提 要

本文在 $u = u(z)$, $k_y = k_y(x, z)$, $k_z = k_z(x, z)$ 及考虑下垫面对浓度场有清除作用的前提下,求解了定常连续点源三维湍流扩散方程,得到浓度场的分析解。解中含有随稳定度而变的参数。应用 Project Prairie Grass 的地面源试验资料,经验地定出了从中等不稳定到中等稳定时适用于小尺度扩散的有关参数。将本模式用来计算上述试验中的浓度,除较少的例外情况外,个例的计算浓度与实验浓度的相对误差平均在 200% 以内,并对误差原因进行了讨论。最后对下垫面影响的不同大小计算了清除作用对地面源浓度场的影响。

一、问题的提出

在大气扩散的理论研究中,统计理论在实用上已取得一定的成果。对梯度-传输理论,目前虽已形成理论体系^{[1],[2]},但理论计算与实测结果究竟符合程度如何,还没有看到详细的报导,但由于理论本身假定上的局限性,结果与实际情况肯定有较大的差距。例如 Берлянд^[2]取如下假定

$$k_y = k_0 u, \quad u = u_1 z^n, \quad k_z = k_1 z^m,$$

在下垫面全反射条件下求解定常点源扩散方程,对地面源浓度分布可以得到

$$C(x, y, 0) = \frac{Q e^{-\frac{y^2}{2k_0 x}}}{2 \sqrt{\pi k_0 x} (2 + n - m)^{\frac{1}{2+n-m}} \Gamma\left(\frac{1+n}{2+n-m}\right) (k_1 x)^{\frac{1+n}{2+n-m}} u_1^{\frac{1-m}{2+n-m}}} \quad (1.1)$$

由此显然可以求出 y 方向浓度分布标准差的平方 σ_y^2

$$\sigma_y^2 = \frac{\int_0^\infty y^2 C dy}{\int_0^\infty C dy} = 2k_0 x$$

即 $\sigma_y \propto x^{\frac{1}{2}}$, 并得出 X 轴上峰值浓度 $C(x, 0, 0) \propto x^{-(\frac{1}{2} + \frac{1+n}{2+n-m})}$ 。但据扩散试验^[1], $\sigma_y \propto x^s$, s 是随稳定度不同而异的量,且峰值浓度亦不与理论结论完全相符,因而模式与实际肯定

有较大的差距。

根据方程分析解(见下)欲使 σ_y 与峰值浓度能正确反映实际, k_y 、 k_z 必须是 x 的函数。 k 是 x 的函数的理由尚无定论, 一些作者认为可理解为随着 x 增加, 对 k 贡献的湍流尺度范围愈来愈大^[4]。当然, 这仅是一种设想, 尚无充分的论证。尽管 k 随 x 变化的物理机制尚不清楚, 但这一事实必须考虑才能得出符合实验的结果。一些作者曾考虑过 k 是 x 的函数而求解过扩散方程, 如 Peters 和 Klinzing^[5], Yeh 和 Tsai^[4] 等。但他们考虑的因素都不全面, 且主要偏于理论研究, 没有将理论模式应用到实际中去。本文则对 u, k 作更为一般化的假定来求解扩散方程, 并据实测浓度资料经验地定出有关参数, 使模式即能从理论上说明扩散现象又能应用于实际。

二、基本方程及其解

设连续点源高为 H , 取源正下方地面为原点, 平均风下风方向为 X 轴, Y 轴水平横截风向, Z 轴铅直向上。忽略 X 方向的扩散, 则定常三维湍流扩散方程可写为

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (2.1)$$

其中 u 为风速, k_y 、 k_z 分别为 Y 、 Z 方向的扩散系数, C 为浓度。作如下假定

$$u = u_1 z^n, \quad (2.2)$$

u_1 为 1 米高处风速。

$$k_y = k_0 u z^\alpha = k_0 u_1 z^{n+\alpha}, \quad (2.3)$$

其中 k_0 、 α 在一定稳定度级别(扩散级别)下取常数

$$k_z = k_1 z^\beta x^\gamma (1 + \gamma x), \quad (2.4)$$

k_1 为 1 米高处的铅直向扩散系数。 β 、 γ 亦在一定稳定度下取常数。

$k_z \propto u z^\alpha$ 的假定可以认为是当 u 大时, 则机械湍流强, 导致扩散强, 而稳定度的影响则主要表现于 k_0 及 α 中。(2.4)说明 k_z 随 x 的变化是幂次律, 而 k_y 、 k_z 对 x 的函数关系是为了使解的结果符合实际。因我们用来对比的实测资料是小尺度的, 因而上述假定亦只适合小尺度。当中性及中等稳定时 $\gamma = 0$, 不稳定时 $\gamma > 0$ 。上述假定还说明了湍流是非均匀的, 这比一般高斯模式假定湍流均匀要合理些。

这样, 方程的完整形式是

$$u_1 z^n \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k_0 u_1 z^{n+\alpha} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[k_1 z^\beta x^\gamma (1 + \gamma x) \frac{\partial C}{\partial z} \right], \quad (2.5)$$

定解条件取

$$C = 0, \quad \text{当 } x, y, z \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

$$C = \frac{Q \delta(y) \delta(z-H)}{u(H)}, \quad \text{当 } x = 0, \quad (2.7)$$

$$k_z \frac{\partial C}{\partial z} = \nu C, \quad \text{当 } z = 0, \quad (2.8)$$

ν 为某常数, 它相当于下垫面对浓度场的清除速度 v_d ^[1] (deposition velocity)。

u_1 可从气象观测得出, k_1, n 可由近地层梯度观测算出. 近地层在第一近似下可取共轭幂次律

$$m = 1 - n. \quad (2.9)$$

参数 $k_0, \alpha, \beta, \gamma$ 与气象条件有关, 现时我们只能根据方程的解由有关浓度资料经验地推求. 现在将其作为已知数来解方程.

$$\text{令: } C = X(x, z)P(x, y), \quad (2.10)$$

(2.10)代入(2.5)–(2.8), 可分出 P 和 X 的二个方程和二组定解条件

令 $\xi = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, P 方程及定解条件是:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= k_0 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \\ P &= 0, \quad \text{当 } \xi, y \rightarrow \infty, \\ P &= \delta(\xi), \quad \text{当 } \xi \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其解是:

$$P = \frac{e^{-\frac{y^2}{4k_0\xi}}}{2\sqrt{\pi k_0\xi}} = \frac{(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{4k_0 x^{\frac{\alpha+1}{2}}}}}{2\sqrt{\pi k_0 x^{\frac{\alpha+1}{2}}}}. \quad (2.11)$$

令:

$$\zeta = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + \gamma \frac{x^{\beta+2}}{\beta+2}, \quad (2.12)$$

则 X 方程及定解条件是:

$$u_1 z^v \frac{\partial X}{\partial \zeta} = k_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(z^m \frac{\partial X}{\partial z} \right), \quad (2.13)$$

$$X = 0, \quad \text{当 } \zeta, z \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

$$z = \frac{Q}{u(H)} \delta(z-H), \quad \text{当 } \zeta = 0, \quad (2.15)$$

$$k_s \frac{\partial X}{\partial z} = \nu X, \quad \text{当 } z = 0. \quad (2.16)$$

令 $\bar{X}$ 表示 X 对 ζ 的拉氏变换, 将(2.13)对 ζ 施行拉氏变换, 考虑到(2.14)–(2.16)得 $\bar{X}$ 方程

$$k_1 \frac{d}{dz} \left(z^m \frac{d\bar{X}}{dz} \right) - p u_1 z^v \bar{X} = -Q \delta(z-H), \quad (2.17)$$

边界条件是

$$\bar{X} = 0, \quad \text{当 } z \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

$$k_s \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} = \nu \bar{X}, \quad \text{当 } z = 0, \quad (2.19)$$

其中 p 为变换参数. 经过一定的分析运算可以求得(2.17)的齐次方程在条件(2.18)、(2.19)下的格林函数

$$G(z, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{W} \left[\left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} \varphi^{\frac{2+n-m}{2}} \right)^\mu I_\mu \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} \varphi^{\frac{2+n-m}{2}} \right) \right. \\ \quad \left. + B \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} \varphi^{\frac{2+n-m}{2}} \right)^\mu I_{-\mu} \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} \varphi^{\frac{2+n-m}{2}} \right) \right] \\ \quad \times \left[\left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}} \right)^\mu K_\mu \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}} \right) \right], \\ \quad \text{当 } \varphi < z; \\ \frac{1}{W} \left[\left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}} \right)^\mu I_\mu \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}} \right) \right. \\ \quad \left. + B \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}} \right)^\mu I_{-\mu} \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}} \right) \right] \\ \quad \times \left[\left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} \varphi^{\frac{2+n-m}{2}} \right)^\mu K_\mu \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} \varphi^{\frac{2+n-m}{2}} \right) \right], \\ \quad \text{当 } \varphi > z. \end{cases} \quad (2.20)$$

其中 $I_{\pm\mu}$ 是第一类修正贝塞尔函数, K_μ 是 MacDonald 函数, 而

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{2}{2+n-m} \right)^{\frac{n+m}{2+n-m}} \left(\frac{pu_1}{k_1} \right)^{\frac{1-m}{2+n-m}} k_1 (1+B), \\ B &= \frac{k_1(1-m)}{\nu} \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\mu)} \left(\frac{1}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} \right)^{2\mu}, \\ \mu &= \frac{1-m}{2+n-m}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

由(2.20)立刻求得当 $z < H$ 时(2.17)满足(2.18)、(2.19)的解

$$\chi = \frac{2Q(zH)^{\frac{1-m}{2}}}{k_1(2+n-m)(1+B)} [I_\mu(\eta) + B I_{-\mu}(\eta)] K_\mu(\phi), \quad (2.22)$$

其中:

$$\eta = \frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}}, \quad \phi = \frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{pu_1}{k_1}} H^{\frac{2+n-m}{2}}.$$

χ 可由拉氏变换的反演公式求得, 因 χ 对变数 p 而言无极点, 于是反演公式可变成^[2]

$$\chi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Im } \chi(\sqrt{p} = -i\omega, z) e^{-\omega^2 t} \omega d\omega, \quad (2.23)$$

(2.22)代入(2.23), 经过繁杂的运算后得

$$\chi = \frac{2Q(zH)^{\frac{1-m}{2}}}{k_1(2+n-m)} \int_0^\infty \frac{[J_\mu(\theta) + a J_{-\mu}(\theta)] [J_\mu(\lambda) + a J_{-\mu}(\lambda)]}{1 + a^2 + 2a \cos \pi \mu} e^{-\omega^2 t} \omega d\omega, \quad (2.24)$$

其中

$$a = \frac{k_1(1-m)}{\nu} \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\mu)} \left(\frac{\omega}{2+n-m} \sqrt{\frac{u_1}{k_1}} \right)^{2\mu}.$$

$$\theta = \frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{u_1}{k_1}} \omega H^{\frac{2+n-m}{2}},$$

$$\lambda = \frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{u_1}{k_1}} \omega z^{\frac{2+n-m}{2}},$$

而 $J_{\pm\mu}$ 是第一类贝塞尔函数。对于小尺度问题, 第一近似可取 $\nu = 0$, 即不计下垫面清除。取 $\nu = 0$, 则(2.24)成

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{2Q(zH)^{\frac{1-m}{2}}}{k_1(2+n-m)\zeta} \int_0^\infty J_{-\mu}(\theta) J_{-\mu}(\lambda) \omega e^{-\omega^2 \zeta} d\omega \\ &= \frac{Q(zH)^{\frac{1-m}{2}}}{k_1(2+n-m)\zeta} \exp \left[-\frac{u_1(z^{2+n-m} + H^{2+n-m})}{k_1(2+n-m)^2 \zeta} \right] I_{-\mu} \left[\frac{2u_1}{(2+n-m)^2 k_1 \zeta} (zH)^{\frac{2+n-m}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

当 z 或 H 很小时可将函数 I 用级数展开后取第一项, 再用(2.10)–(2.12), (2.21), (2.9), 即得浓度分布

$C =$

$$\begin{aligned} &(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} Q \exp \left[-\frac{(\alpha+1)y^2}{4k_0 x^{\alpha+1}} - \frac{u_1(z^{2+n-m} + H^{2+n-m})}{k_1(2+n-m)^2 \left(\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + \gamma \frac{x^{\beta+2}}{\beta+2} \right)} \right] \\ &2 \sqrt{\pi k_0 x^{\frac{\alpha+1}{2}} (2+n-m)^{\frac{1}{2+n-m}}} \Gamma \left(\frac{1+n}{2+n-m} \right) \left[k_1 \left(\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + \gamma \frac{x^{\beta+2}}{\beta+2} \right) \right]^{\frac{1+n}{2+n-m} \frac{u_1}{2+n-m}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.26)对地面源能很好适合。对高架源要看具体情况, 如果 k_1, ζ, H, z 等量使(2.25)中函数 I 宗量较大, 即不能只取第一项计算。

如果 $\nu \neq 0$, 则 χ 取(2.25)式, 而

$$C = \frac{Q(zH)^{\frac{1-m}{2}} (\alpha+1)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2(\alpha+1)}{4k_0 x^{\alpha+1}}}}{\sqrt{\pi k_0 k_1 (2+n-m) x^{\frac{\alpha+1}{2}}}} \int_0^\infty \frac{[J_\mu(\theta) + a J_{-\mu}(\theta)][J_\mu(\lambda) + a J_{-\mu}(\lambda)]}{1 + a^2 + 2a \cos \pi \mu} e^{-\omega^2 \zeta} \omega d\omega. \quad (2.27)$$

三、扩散特性的讨论和参数的确定

从(2.26)来讨论 Y 方向扩散特性。首先 Y 方向浓度分布是高斯分布, 这符合一般规律^[1], 且易求出

$$\sigma_y^2 = \frac{2k_0 x^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad (3.1)$$

由(3.1)可见 $\sigma_y \propto x^{\frac{\alpha+1}{2}}$, 从实测知 $\sigma_y \propto x^s$, s 与稳定度有关。于是若令

$$\alpha = 2s - 1, \quad (3.2)$$

则假定(2.3)就能说明 Y 方向的扩散特性。且得出 α 在不稳定时大, 稳定时小, 即不稳定时 k_1 随 x 增加更快。

由(2.26)可求出地面源 X 轴峰值浓度是:

$$C_p \propto x^{-\frac{\alpha+1}{2}} \left[\left(\frac{1}{\beta+1} + \frac{\gamma x}{\beta+2} \right) x^{\beta+1} \right]^{-\frac{1+\alpha}{2+\alpha-m}}. \quad (3.3)$$

实测资料表明^[5], 从中等稳定到近中性 $C_p \propto x^{-b}$, b 为随稳定度而变的常数, 中性时比稳定时大。不稳定时, b 更大且随 x 增加而增加, 很稳定时 b 很小且随 x 增加而减少。若我们假定 β 随不稳定增加而增加, 且 γ 不稳定时大于 0, 很稳定时小于零, 即能解释观测到的事实。

根据轴线浓度及 Y 方向的扩散特性可间接推断 Z 方向扩散特性。或更直接地由(2.26)求得

$$\sigma_z^2 = \frac{\int_0^\infty C x^2 dz}{\int_0^\infty C dz} = \frac{\int_0^\infty x^2 \exp \left[-\frac{u_1 x^{2+n-m}}{k_1 (2+n-m)^2 \zeta} \right] dz}{\int_0^\infty \exp \left[-\frac{u_1 x^{2+n-m}}{k_1 (2+n-m)^2 \zeta} \right] dz} = \left[\frac{u_1}{k_1 (2+n-m)^2 \zeta} \right]^{-\frac{2}{2+n-m}} \frac{\Gamma \left(\frac{3}{2+n-m} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2+n-m} \right)},$$

即

$$\sigma_z^2 \propto \zeta^{-\frac{2}{2+n-m}} = \left(\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + \gamma \frac{x^{\beta+1}}{\beta+2} \right)^{-\frac{2}{2+n-m}}. \quad (3.4)$$

若 $\gamma = 0$, 则有

$$\sigma_z \propto \left(\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \right)^{\frac{1}{2+n-m}}. \quad (3.5)$$

根据实测资料可粗略地推断出 $\sigma_z \propto x^{q(1)}$, q 随不稳定增加而增加, 由(3.5),

$$q = \frac{\beta+1}{2+n-m}.$$

因 β 随不稳定增加而增加, 因而可解释观测事实。由(3.4)再由 γ 性质可得出 σ_z 随 x 变化的指数当不稳定时随 x 增加而增加, 很稳定则随 x 增加而减少, 这符合 σ_z 的已知特性(如 Pasquill 的 σ_z 曲线图)。

适当定出本模式中各参数, 就能使模式符合实验结果。现在据 Project Prairie Grass 试验中二氧化硫浓度及梯度气象观测资料^[6]来确定参数 $\alpha, \beta, \gamma, k_1$ 。该试验在平坦草地上进行, 粗糙度 $z_0 < 1$ 厘米。当然这样求出的参数只适用于类似下垫面上的扩散情况。试验在下风 50、100、200、400、800 米弧线上布点。气象资料有风和温度梯度资料及风向脉动标准差 σ_A , 采样时间 10 分钟。

Cramer^[5]以 σ_A 为稳定度指标求出该资料各次试验按 σ_A 分类时各距离的平均 σ_y 值及不同距离处的 s, b 值。我们亦以 σ_A 为稳定度指标来分类求各参数。Cramer 给出的不同 σ_A 下的 s 值由(3.2)求 α , 然后由(3.1)据各距离的 σ_y 求 k_0 。不同距离处 k_0 很相近, 故即取各距离处 k_0 平均作为该 σ_A 下的 k_0 。

由于在强不稳定及强稳定时的资料很少, 加之此时我们的模式可能还太粗糙, 故我们仅计算从中等不稳(白天 $\sigma_A = 12^\circ$)到中等稳定(夜间 $\sigma_A = 5^\circ$)的各参数。我们取 5 个

* PPG 实验中不同 σ_A 相当的稳定度级别与 Pasquill-Gifford 的不同, 据 σ_y 值, 此处 $\sigma_A = 12^\circ$ 相当于 P-G 的 $\sigma_A = 20^\circ$, 此处 $\sigma_A = 5^\circ$ 相当于 P-G 的 $\sigma_A = 3-4^\circ$ 。

σ_A 级别 $\sigma_A = 6^\circ$ (白天) 和 $\sigma_A = 8^\circ$ (夜晚) 作为中性, $\sigma_A = 12^\circ$ (白天) 为中等不稳定, $\sigma_A = 5^\circ$ (夜间) 为中等稳定, $\sigma_A = 9^\circ$ (白天) 和 $\sigma_A = 6^\circ$ (夜晚) 分别介于其间。各参数求出如表 1。

表 1 不同稳定度下各参数值

σ_A	5° (夜)	6° (夜)	6° (白天)及 8° (夜)	9° (白天)	12° (白天)
k_0 (米 $\rightarrow$)	0.06	0.06	0.06	0.095	0.1
α	0.2	0.4	0.6	0.6	0.7
β	0.05	0.06	0.09	0.05	0.1
γ	0	0	0	0.0035	0.008
n	0.3	0.22	0.17	0.15	0.13
m	0.7	0.78	0.83	0.85	0.87

一个有趣的事实是 k_0 在中性到中等稳定条件下近于常数 0.06, 不稳定时跃变到 0.1。这可能是由于中性到中等稳定条件下热力湍流受抑, k_0 的增加仅由于机械湍流作用, 不稳定时, 热力湍流活跃, 使 k_0 比以与 x 成正比的速率更快地增长。

表中 β 、 γ 如下确定: 对中性及中等稳定条件, 在(3.3)中令 $\gamma = 0$,

$$C_p \propto x^{-\frac{1+\alpha}{2+\alpha-m}(\beta+1)-\frac{\alpha+1}{2}} = x^{-\beta}, \quad (3.6)$$

据实测的 b 及某类 σ_A 时据梯度资料求出的平均 n , m 及 α 值由(3.6)求 β

$$\beta = \left(b - \frac{\alpha+1}{2}\right) \frac{2+\alpha-m}{1+n} - 1.$$

不稳定时, 由(3.3)式, 当 x 小时有:

$$C_p \propto x^{-\frac{\alpha+1}{2}-(\beta+1)\frac{1+\alpha}{2+\alpha-m}},$$

由小 x (如 50 米以内) 时 b 值可定 β , 50 米以内 b 值可据 50 米以外的 b 值大致外推得到。

据(3.3), 200 米与 100 米处峰值浓度之比是

$$\frac{100^{\frac{\alpha+1}{2}} \left(\frac{100^{\beta+1}}{\beta+1} + \gamma \frac{100^{\beta+2}}{\beta+2} \right)}{200^{\frac{\alpha+1}{2}} \left(\frac{200^{\beta+1}}{\beta+1} + \gamma \frac{200^{\beta+2}}{\beta+2} \right)} = 2^{-\gamma}, \quad (3.7)$$

从(3.7), 由实测 γ 即可求 γ , 对 200—400 米, 400—800 米亦可求相应的 γ 值。三个 γ 平均作为适用于全距离的 γ 值。

四、对浓度估计的应用及误差讨论

将上面求出的各参数代入本文第二部分的各公式即可求出任意点的浓度。由于本模式的 $\sigma_y(x)$ 在函数形式及数值上均与实验值相同 (因 k_0 、 α 系由实际数据求出), 因而它比其他梯度-传输理论模式更切合实际, 至于峰值浓度, 虽然 PPG 实验中有实验得到的在

风场均匀假定下得出的 $\frac{uC}{Q}$ 曲线,但因本模式未作风场均匀假定,故无法与之比较以得出峰值浓度的平均精确度,而只能从个例直接计算峰值浓度与实际比较,但由于本模式峰值浓度随 x 变化的幂次与实验值相同,故这就比其他梯度-传输理论为优,因而浓度场应能较好地符合实际。

我们即将本模式应用于 PPG 地面源试验,先计算轴线浓度,然后计算 Y 方向浓度。

我们只验证已确定参数值的那些稳定度级别的浓度,对每次观测分别计算误差,然后再求平均。

在用(2.26)式计算地面源浓度时, n, m 由该次实测梯度资料计算,计算 k_1 时我们用 Будыко 公式: [7]

$$k_1 = \frac{0.14 \Delta u}{\ln \frac{z_2}{z_1}} \left(1 + \frac{\Delta T}{(\Delta u)^2} \ln \frac{z_2}{z_1} \right), \quad (4.1)$$

Δu 是 z_2, z_1 间风速差, ΔT 是 z_1, z_2 间温度差, z_2, z_1 分别取 2 米和 0.5 米。

我们举某次试验为例(由此例可见一般情况)将本模式计算得的峰值浓度与实测值及 Берлянд 模式(1.1)计算值加以比较。见图 1。该次试验属于 $\sigma_A = 6^\circ$ (夜) 类, $k_1 = 0.15$ 米²/秒, $u_1 = 6.39$ 米/秒。从图可见计算值与实测值还比较接近,比 Берлянд 模式要好得多。

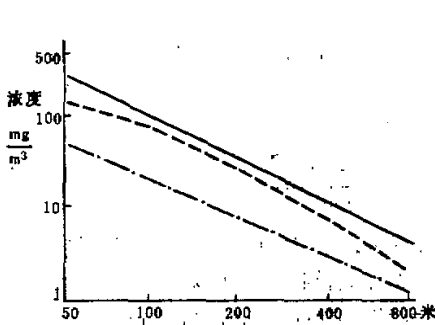


图 1 峰值浓度理论与实测值的比较。

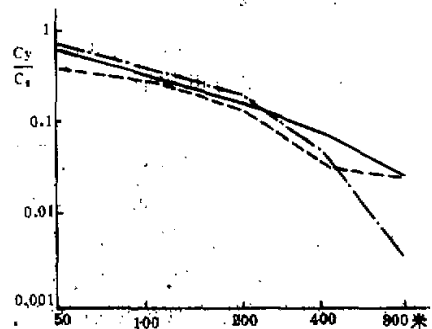


图 2 $\frac{C_y}{C_0}$ 值理论与实测的比较。

—— 计算值

----- 实测值

----- Берлянд 模式值

—— 计算值

----- 实测值

----- Берлянд 模式值

我们用相对误差 E ; 其绝对值 E_1 ; 计算比 ρ 来表示误差程度, 定义如下

$$E = \frac{C_{\#} - C_{\#}}{C_{\#}}, \quad E_1 = \frac{|C_{\#} - C_{\#}|}{C_{\#}}, \quad \rho = \frac{\max(C_{\#}, C_{\#})}{\min(C_{\#}, C_{\#})}$$

其中 $C_{\#}$ 表各点计算值, $C_{\#}$ 表各点实测值。每次试验对每测点均计算。计算发现, 同一 σ_A 类中各试验各测点误差随距离变化不大, 故对某 σ_A 类中各试验的各点求上述各量各自的平均值 $\bar{E}$; $\bar{E}_1$; $\bar{\rho}$ 表示平均误差大小。结果见表 2。

表 2 不同稳定度下峰值浓度误差

σ_A	$\bar{E}$	$\bar{E}_1$	$\bar{\rho}$	试验次数
12°	-0.13	0.42	1.63	5
9°	1.00	1.00	2.00	3
6°(白天) 8°(夜)	0.96	0.96	1.96	3(不计其中一个)
6°	0.89	0.96	1.99	9(不计其中一个)
5°($k_1 = 0.01$)	3.50	3.88	5.05	4
5°($k_1 > 0.01$)	1.53	1.58	2.58	4

由表 2 可见,除中等不稳定外,基本上都是理论值大于实测值。除中等稳定外,计实比一般在 2 倍以内。这样的个例精确度还是可以的。 $\sigma_A = 5^\circ$ 即中等稳定类较差。将此类再分成 $k_1 = 0.01$ 米²/秒及 $k_1 > 0.01$ 米²/秒(平均 $k_1 = 0.05$ 米²/秒)两大类,前者误差较大,而后者计实比仍在 3 倍以内,即 k_1 愈小,误差愈大。

中性及 $\sigma_A = 6^\circ$ (夜)时各略去一个例外,这例外的理论值要超过实测值好几倍。此二例外均是 k_1 特小的情况,如中性一次 $k_1 = 0.01$ (其余平均为 0.18), $\sigma_A = 6^\circ$ 例外一次 $k_1 = 0.01$ (其余平均 0.08),故 k_1 小时误差较大是一普遍现象。

Smith (见文献 [8]) 曾从湍流微结构的观测求出当地转风速 4 米/秒, $z_0 = 0.03$ 米时三种稳定度下各高度 k 值。将他的 k_1 与我们的比较,似不能说明我们的 k_1 偏小,即误差原因似不能从 k_1 解释。

我们比较中性时一次 $k_1 = 0.01$, 一次 $k_1 = 0.09$ 的情况。这二次在 0.5 米—2 米间及 2 米—16 米间的平均 Ri 数是

Ri (2—16 米)		Ri (0.5—2 米)
$k_1 = 0.01$	0.018	0.028
$k_1 = 0.09$	0.016	0.012

可见虽然 0.5—2 米 Ri 二者差较大,使二个 k_1 差较大。但 2—16 米二者 Ri 已很接近,因而较高气层二者 k 应接近。但因我们算出的 m 都是二者相近因而使 $k_1 = 0.01$ 时较高气层的扩散能力被低估了,使浓度过高估计。 $\sigma_A = 5^\circ$ 类的 $k_1 = 0.01$ 情况与此相同,因而误差原因之一是假定(2.4)在 k_1 小时不精确所致。

对于侧向扩散,我们将 x 相同时横坐标为 y 处的浓度与轴线浓度之比 $\frac{C_y}{C_p}$ 的理论值与实测值进行比较。由(2.26)

$$\frac{C_y}{C_p} = e^{-\frac{(a+1)y^2}{4k_0 x^{a+1}}}$$

不稳定时计算与 x 轴角距为 10° 的点的浓度,中性及稳定时则取与 x 轴角距为 6° 的点。我们仍用上面举过的那次试验为例说明计算值,实测值及 Берланд 模式的比较。结果见图 2。可见我们的模式比 Берланд 的更接近实际。我们对同一稳定度类同一距离各次求平均 $\frac{C_y}{C_p}$, 然后计算其相对误差,结果见表 3。

表 3 $\frac{C_r}{C_s}$ 计算值与实测值的相对误差

σ_A	测点对 X 轴角距	50 米	100 米	200 米	400 米	800 米
12°	10°	0.03	0.04	0.18	0.44	-0.49
9°	10°	-0.19	-0.34	-0.64	-0.42	-0.66
6°(白天)8°(夜)	6°	0.15	-0.17	-0.16	-0.12	0.37
6°(夜)	6°	0.13	0.09	-0.05	-0.05	-0.73
5°	6°	-0.20	-0.35	-0.83	-1.0	—

除 $\sigma_A = 12^\circ$ 外, 大都是理论值小于实测值。相对误差大都小于 50%。因 σ_r 理论值与实测值相符, 因而这种误差应由对高斯分布的小的偏差所造成, 因为小的偏差也能产生一定的误差。高斯分布是各种扩散模式的共同特征。因而这一误差不能归之于本模式的缺陷。

因 Y 方向理论上的扩散比实际的弱, 因而理论上的轴线浓度就要比实测的大些。表 2 与表 3 的对比可说明这一问题。因而轴线浓度过高估计的原因之一, 很可能是 Y 方向误差所造成。由于轴线浓度计算偏高些, 而侧向扩散计算值又偏低些, 于是非轴线浓度的计算值相对误差比较小。此处不另说明。

五、下垫面影响的估计

上面进行的浓度计算都是在 $v = 0$ 时进行的。下面进一步计算 $v \approx 0$ 时对地面源浓度场能产生多大的影响。我们来求影响最大处即最远 800 米处地面浓度。

因 x, H 均小, 可将 (2.24) 中 $J_{\pm\mu}(\theta), J_{\pm\mu}(\lambda)$ 展开后取第一项

$$\chi = \frac{2Q}{k_1(2+n-m)} \int_0^\infty \frac{(zH)^{1-m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu} \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{u_1}{k_1}} \omega\right)^{2\mu} + \frac{a(z^{1-m} + H^{1-m})}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(1+\mu)}}{1+a^2} \\ + \frac{a^2}{[\Gamma(1-\mu)]^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2\mu} \left(\frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{u_1}{k_1}} \omega\right)^{-2\mu} \\ \leftarrow \frac{+ 2a \cos \pi \mu}{e^{-\omega^2} \omega d\omega},$$

令 $Q = \omega^2$, 经计算得

$$\chi = \frac{Q \left[\frac{(aH)^{1-m} v^2}{k_1^2 (1-m)^2} + \frac{v(z^{1-m} + H^{1-m})}{k_1 (1-m)} + 1 \right]}{k_1^{1-\mu} (2+n-m)^{1-2\mu} [\Gamma(1-\mu)]^2 u_1^\mu} \int_0^\infty \frac{Q^\mu e^{-Q}}{(Q^\mu + M)^2 + N} dQ, \quad (5.1)$$

其中

$$M = \frac{v\Gamma(1+\mu)(2+n-m)^{2\mu} \cos \pi \mu}{(1-m)\Gamma(1-\mu)k_1^{1-\mu} u_1^\mu};$$

$$N = \frac{v^2 [\Gamma(1+\mu)]^2 (2+n-m)^{4\mu} \sin^2 \pi \mu}{k_1^{2(1-\mu)} u_1^{2\mu} (1-m)^2 [\Gamma(1-\mu)]^2}.$$

(5.1)中令 $z = 1.5$ 米(采样高度) $H = 0.5$ 米(2.26)中令 $z = H = 0$, 注意到 $n + m = 1$, 则从(2.26), (5.1)得

$$\frac{C_{x=0}}{C_{y=0}} = \frac{X_{x=0}}{X_{y=0}} = \left[\frac{(zH)^n v^2}{k_1^2 n^2} + \frac{v(z^n + H^n)}{k_1 n} + 1 \right] \frac{\zeta^{\frac{1+n}{2+n-m}}}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2+n-m}\right)} \int_0^\infty \frac{Q^n e^{-Q\zeta}}{(Q^n + M)^2 + N} dQ. \quad (5.2)$$

我们只计算中性情况, 取平均值 $k_1 = 0.12$ 米²/秒, $u_1 = 5$ 米/秒, $n = 0.17$, $m = 0.83$, 于是 $\mu = 0.13$. 按 Owers 和 Powell^[3] 在草地上对二氧化硫的实验得 $v = 0.6 - 2.6$ 厘米/秒, 我们分别计算几个不同 v 值时的上述比值. (5.2) 中积分则数值计算. 在不超过 1% 误差下, 各 v 时的 $\frac{C_{x=0}}{C_{y=0}}$ 见图 3. 可见, 随 v 增加 $\frac{C_{x=0}}{C_{y=0}}$ 减少, 而减少速率愈来愈慢. 如果

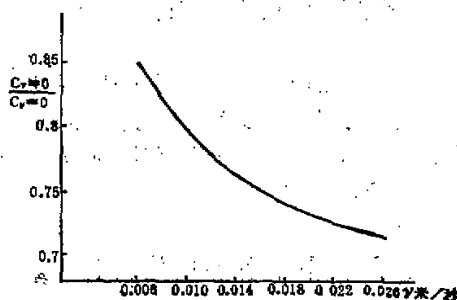


图 3 不同 v 值时的 $\frac{C_{x=0}}{C_{y=0}}$.

取 v 的典型值 0.01 米/秒, 则 $\frac{C_{x=0.01}}{C_{y=0}} = 0.8$. 于是在第一近似下可忽略下垫面影响, 但仔细估计浓度时应考虑该项订正.

六、几点结论

1. 梯度-传输理论经过一些补充假定, 即考虑 k 是 z 函数亦是 x 的函数时, 可使方程的解在扩散特性上较符合于实际结果. 但有关参数现时只能由实测资料确定, 资料愈多, 越有代表意义.

2. 梯度-传输理论在人们对扩散的物理本质的认识上比纯根据经验的模式前进了一步. 但 k 随 z 变化的原因需进一步探索, 以求进一步从理论上说明扩散现象.

3. 本文以 σ_A 为扩散指标, 以此来区分扩散级别. 可能 σ_A 不一定是最好的扩散指标. 亦可按其他稳定度分类来区分扩散级别, 求出各级别的参数值. 这需要在大量观测资料基础上进一步分析研究. 对很不稳定和很稳定的极端情况也需要根据大量数据进一步研究.

4. 本模式对中等不稳定到弱稳定误差要比中等稳定时小, 前者轴线浓度误差可在 2

倍以内,后者可在 3 倍以内或稍大一些。误差原因之一在于 k_z 随 z 变化的幂次律精确性还不够,还有侧向浓度偏离高斯分布等原因。正确估计各高度的 k 求方程的数值解是提高精确度的重要途径。

5. 下垫面清除作用的影响在小尺度范围内第一近似下可忽略,但清除作用剧烈或尺度较大时应予考虑。本文提供了小尺度范围内估计下垫面清除作用的一种方法。

参 考 资 料

- [1] F. Pasquill, *Atmospheric Diffusion*. 1974, Ellis Horwood Ltd.
- [2] М. Е. Берлянд, *Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы*, 1975, Гидрометеонаиздат.
- [3] L. K. Peters & G. K. Klinzing, The effect of variable diffusion coefficient and velocity on the dispersion of pollutants, *Atm. Env.* 1971, 5, 497.
- [4] G. T. Yeh, & Y. J. Tsai, Analytical solution of a three dimensional diffusion equation with variable coefficient. *Third Symposium on atmospheric turbulence diffusion and air quality*, 1976, 194.
- [5] H. E. Cramer, A practical method for estimating the dispersal of atmospheric contaminants, *Proceedings of the conference on applied meteorology*, 1957.
- [6] M. L. Barad, Project Prairie Grass, a field program in diffusion, *Geophys. Res. Papers*, No. 59, Vols I & II.
- [7] 布德科(李环境等译), 地表面热量平衡, 1960, 科学出版社.
- [8] F. Pasquill, The dispersion of material in the atmospheric boundary layer—The basis for generalized, *Lectures on air pollution and environmental impact analysis*, 1975.
- [9] M. J. Owens & A. W. Pawell, Deposition velocity of sulphur dioxide on land and water surface using a ^{35}S tracer method, *Atm. Env.* 1974, 8, 63.

A MODEL OF K-THEORY FOR ATMOSPHERIC DIFFUSION AND ITS APPLICATIONS

Zhao Ming

(Department of Meteorology, Nanjing University)

ABSTRACT

Under the assumption of $u = u_1 z^n$, $k_y = k_y(x, z)$, $k_z = k_z(x, z)$ an analytical solution of a three dimensional turbulent diffusion equation of a stationary continuous point source with the consideration of the deposition of the pollutant on the ground is obtained. The solution contains some parameters depending on the atmospheric stability. Using the experimental data of the ground-level source diffusion in the PPG, we empirically determined these parameters which are suitable to the small-scale diffusion under various atmospheric stabilities ranging from the moderate unstable condition to the moderate stable one. Except a few cases, the relative errors of the concentration magnitude between the evaluated and the measured values are within 200% on the average. Finally, the effects of the deposition on the concentration field are also evaluated for various deposition velocities.