

红外遥测气温垂直分布中几种反演方法的比较与误差分析

黄荣辉 袁重光

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文利用经验正交展开,最优统计,非线性迭代,Chahine 迭代来求解气温遥测方程.通过对不同天气形势下进行反演计算并与实况相对比,结果表明:(1)利用非线性迭代方法来反演气温垂直分布其精度较高,收敛速度快.(2)利用经验正交展开法与最优统计法其反演误差在大气低层大,反之迭代反演法在高层误差大.(3)从500毫巴等压面反演误差的分布与常规观测所得到的温度场配置来看,往往在槽区反演误差较大,而脊区反演误差较小.

一、求解气温遥测方程的几种方法

设光路沿垂直方向,则到达卫星上的辐射强度 I_ν 为:

$$(I_\nu) = a_{\nu S} B_{\nu S} \bar{\tau}_{\nu S} + \int_{P_S}^0 B_\nu \frac{\partial \bar{\tau}_\nu}{\partial P} dP \quad (1.1)$$

右边第一项 $a_{\nu S} B_{\nu S} \bar{\tau}_{\nu S}$ 表示地表辐射经过大气层吸收后到达卫星红外仪器的辐射量,第二项表示大气本身的辐射经过大气层自身的吸收削弱后到达卫星红外仪器的整层总辐射, ν 为波数, I_ν 表示仪器所得到的以 ν 为中心的一小波段的平均辐射量. B_ν 是普朗克函数.

$$B_\nu = \frac{C_1 \nu^3}{e^{C_2 \nu/T} - 1} \quad (1.2)$$

$C_1 = 2hc^2 = 0.11909 \times 10^{-4}$ 尔格/厘米²·秒·立体角·厘米⁻¹ $C_2 = 1.43880$ 厘米·度, $\bar{\tau}_\nu(P)$ 为第 i 波段在 P 压力层上的透过率.把方程(1.1)经过适当处理后可得;

$$g_i = \int_{\zeta_S}^\infty B_i[T(\zeta)] \frac{\partial \tau_i}{\partial \zeta} d\zeta \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.3)$$

其中 g_i 为大气顶部波数为 ν 的通道射出辐射减去地表辐射达到大气顶部的部分, B_i 为 i 波段在 T 温度下的普朗克函数, $\frac{\partial \tau_i}{\partial \zeta}$ 为 i 波段的权重函数, $\zeta = \ln \frac{1}{P}$, P 为气压,下标 S 表示地面.方程(1.3)是第一类弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程,积分核就是权重函数 $\frac{\partial \tau_i}{\partial \zeta}$.

1978年5月6日收到.

我们用如下几种方法来求解方程 (1.3):

1. 经验正交函数展开方法

我们在 (1.3) 式中把积分号中普朗克函数用一组经验函数 $x_i(\zeta)$ 来展开, 即

$$B_i[T(\zeta)] = \sum_{j=1}^N f_j x_j(\zeta) \quad (1.4)$$

i 表示某等压面层, 把 (1.4) 式代入 (1.3) 式可得:

$$g_i = \sum_{j=1}^N f_j a_{ij} \quad (1.5)$$

其中

$$a_{ij} = \int_{\zeta_s}^{\infty} x_j \bar{K}_i(\zeta) d\zeta, \\ \bar{K} = \frac{\partial \bar{\tau}_i(\zeta)}{\partial \zeta} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M;$$

把 (1.5) 式写成矩阵形式:

$$G = AF \quad (1.6)$$

G 为 i 个元素单列矩阵, A 为 i 行 j 列矩阵, f_j 为 j 个元素的单行矩阵。这样把求解积分方程变成求解一组线性代数方程组的解。

然而 (1.6) 式的解是不稳定的, 这可以从图一看出, 因权重函数曲线有相当大的重叠部分, 这使得 A 行列式的值相当小, 甚至有时趋于 0, 故解是不稳定的。但从物理上看, 辐射传递方程只是适合于局地热力平衡状态, 因此在求解辐射传递方程时必须加上这个条件, 这样使问题变成解有约束条件下的积分方程的解。我们可以把局地热力平衡写成下列方程式:

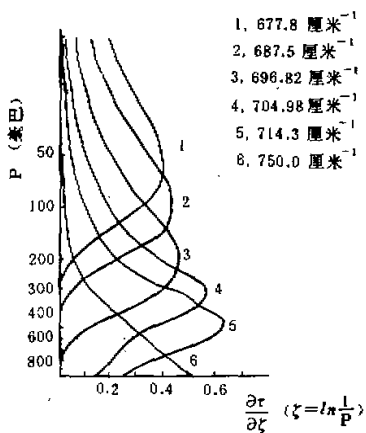


图 1a 权重函数分布图

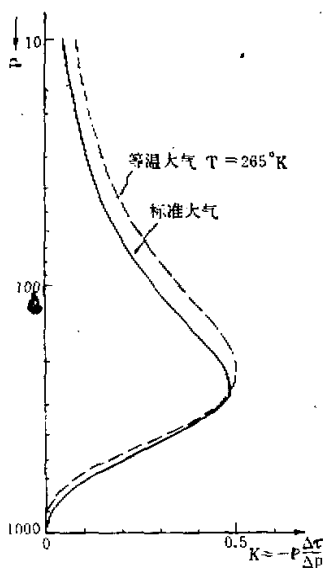


图 1b 等温大气与标准大气核函数的比较

$$\int_0^{P_s} (T - \bar{T})^2 dP < \text{确定值} \quad (1.9)$$

把(1.9)式写成数学表达式:

$$\sum_{j=1}^M P_j^2(f_j)^2 < \text{确定值}$$

其中 f_j 为普朗克函数偏差的展开系数。把方程(1.6)写成偏差形式:

$$F^1 = A^{-1}G^1 + e \quad (1.10)$$

在实际计算中,我们往往还要取比(1.9)更强的限制条件,即求“最优解”,按照最小二乘的概念,取:

$$\sum_{j=1}^M e_j^2 + r \sum_{j=1}^M P_j^2(f_j)^2 = \text{最小} \quad (1.11)$$

要使(1.11)式成立,必须满足

$$\frac{\partial}{\partial f_j} (r F^{1*} H F^1 + e^* e) = 0 \quad (1.12)$$

其中 F^{1*} 为 F^1 的转置矩阵, e^* 为 e 的转置矩阵, H 是单位矩阵, r 为光滑系数。把(1.10)式与(1.12)式联立,可得

$$F^1 = (A^* A + \gamma H)^{-1} A^* G^1 \quad (1.13)$$

这样得出的解是稳定的。

2. 最优统计方法

这种方法与上面不同之处在于不是用最小二乘方法来建立量测(卫星所测得的辐射值)与估计(反演出的该温度的普朗克函数)的关系,而是直接利用辐射传递方程,在统计意义上建立量测与估计之间的统计关系,但是必须预先知道 f^1 与 e 的统计特性^[1]。

把辐射传递方程写成线性化方程并取成矩阵形式:

$$A f^1 = G^1 + e \quad (1.14)$$

f^1 , G^1 , e 的意义与上面所述相同, A 为透过函数的矩阵,即:

$$A = \begin{cases} a_{ij} = [\tau_i(\zeta_{j+\frac{1}{2}}) - \tau_i(\zeta_{j-\frac{1}{2}})] \\ a_{i1} = [\tau_i(\zeta_{\frac{1}{2}}) - \tau_i(\zeta_{\frac{1}{4}})] + \frac{1}{2} [\tau_i(\zeta_{\frac{1}{2}}) - \tau_i(0)] \\ a_{i0} = \frac{1}{2} [\tau_i(\zeta_{\frac{1}{2}}) - \tau_i(0)] \\ 1 - \tau_{is} = \sum_{j=1}^s a_{ij} \end{cases}$$

其中 i, j 分别为通道与层次的序数,这样可得到(1.14)的最优统计解为

$$f^1 = C_f A^* (A C_f A^* + C_e)^{-1} G^1 \quad (1.15)$$

其中

$$C_f = \{\overline{f_j f_l}\} \quad j = 1, 2, m, \quad l = 1, 2, \dots, m;$$

$$C_e = \{\overline{e_j e_l}\}$$

即

$$C_f = \begin{pmatrix} \overline{f_1 f_1}, & \overline{f_1 f_2}, & \cdots & \overline{f_1 f_m} \\ \overline{f_2 f_1}, & \overline{f_2 f_2}, & \cdots & \overline{f_2 f_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{f_m f_1}, & \overline{f_m f_2}, & \cdots & \overline{f_m f_m} \end{pmatrix},$$

$$C_\varepsilon = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_1}, & \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, & \cdots & \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_m} \\ \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_1}, & \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_2}, & \cdots & \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{\varepsilon_m \varepsilon_1}, & \overline{\varepsilon_m \varepsilon_2}, & \cdots & \overline{\varepsilon_m \varepsilon_m} \end{pmatrix}$$

C_f 为 f 的自相关矩阵, C_ε 为观测仪器与方程近似所引入误差的自相关矩阵, * 表示矩阵的转置。

3. 迭 代 法

1) 非线性迭代法

从图一可以看到权重函数在 P_i 处有明显的极大值, 若以 P_i 处为插值作数值积分, 则所得代数方程组其主对角线元素均为每列的最大值, 充分利用这一特点, 可以在求解过程中增加稳定性。

把方程 (1.3) 变成下列非线性迭代形式:

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^{(n-1)} \right) B_i^{(n)}(\zeta_i) = g_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}^{(n-1)} [B_j^{(n-1)}(\zeta_i) - B_j^{(n-1)}(\zeta_j)]$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^{(n-1)} B_j^{(n-1)}(\zeta_i) + (g_i - g_i^{(n-1)}) \right) \quad (1.16)$$

其中

$$a_{ii} = \tau_i(\zeta_{i-\frac{1}{2}}) - \tau_i(\zeta_{i+\frac{1}{2}})$$

$$a_{i1} = 1 - \tau_i(\zeta_{i+\frac{1}{2}})$$

$$a_{im} = \tau_i(\zeta_{m-\frac{1}{2}}) - \tau_{is}$$

$$1 - \tau_{is} = \sum_{j=1}^m a_{ij}$$

i, j 分别为通道与大气分层的序数, m 为大气的总层数, S 为地面, τ 为透过率。

引入张弛因子 $\alpha_i^{(n)}$, 把迭代方程写成更一般的形式:

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^{(n-1)} \right) f_i^{(n)} = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^{(n-1)} \right) f_j^{(n-1)} + \alpha_i^{(n)} (g_i - g_i^{(n-1)}) \quad (1.17)$$

上式 n 为迭代次数。迭代到 $|g_i - g_i^{(n)}| < \varepsilon$ 为止, ε 为仪器误差, $\alpha_i^{(n)}$ 为张弛因子, 按需要选取。

若再考虑核函数的性质, 即 $\zeta > \zeta_i$ 一边比较平缓, 伸展得较远, 同时迭代过程总是对方程组逐个进行, 因此在迭代过程中还采用 $\zeta > \zeta_i$ 处新的较准确的 $B_i(\zeta)$ 的值, 这样能

使结果较为准确,并使迭代次数减少。

2) Chahine 迭代

Chahine 提出下列迭代法^[2]:

$$B_i^{(n)}(\zeta_i) = B_i^{(n-1)}(\zeta_i) + \frac{B_i^{(n-1)}(\zeta_i)}{g_i^{(n-1)}} (g_i - g_i^{(n-1)}) \quad (1.18)$$

显然,若在线性迭代法 (1.17) 式中将 $\alpha_i^{(n)}$ 取成下式:

$$\alpha_i^{(n)} = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^{(n-1)} \right) \left(\frac{B_i^{(n-1)}(\zeta_i)}{g_i^{(n-1)}} \right)$$

则可得到 Chahine 迭代法。

二、四种方法所得的计算结果

1. 首先取一组 $15\mu\text{CO}_2$ 谱带的 6 个通道(如图一),分别取北京,上海,广州三地区 90 天 12:00 时的无线电探空温度曲线,按辐射传递方程,计算各通道每天 12:00 时大气往太空的射出辐射值。定义 σ 为温度反演的均方根误差:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{90} \sum_{i=1}^6 [T_{it} - (T_0)_{it}]^2}{90 \times 6}} \quad (2.1)$$

其中 T 为反演的温度, T_0 为无线电探空的温度, i 表示通道所对应的层数, t 为天数。

1) 利用上面计算的辐射值,并按 (1.13) 式解出普朗克函数的展开系数,从而由 (1.4) 式可得到某通道所对应的普朗克函数,再利用 (1.2) 式反求出温度来。表 1 为取不同 γ 值用经验正交函数展开法的反演均方根误差。

表 1 不同 γ 值用经验正交展开方法反演的均方根误差

$\sigma(^{\circ}\text{C})$		γ	10^{-2}	1.1×10^{-2}	1.2×10^{-2}
地 区					
北 京			2.545	2.543	2.553
上 海			2.745	2.703	2.675
广 州			2.442	2.305	2.267

2) 应用最优统计方法,即用 (1.15) 式来反演所得的反演均方根误差,所得结果列于表 2。

表 2 应用最优统计法所得的反演结果

$\sigma(^{\circ}\text{C})$		$\varepsilon = 1$ 尔格/ 厘米 $\cdot$ 秒 $\cdot$ 立体角
地 区		
北	京	3.021
上	海	4.915
广	州	2.600

2. 应用上述的通道,在东亚地区选取 60 个站,每站根据不同天气形势,各取三天的无线电探空温度资料,利用辐射传递方程算得各通道的射出辐射值。

1) 利用非线性迭代方法,即用 (1.17)

式来反演垂直温度分布,我们选用三种迭代初值:

- ① 先用类似于经验正交函数展开的方法所得到的解作为初值,即取

$$B^{(0)} = (A^*A + \gamma H)^{-1}A^*G \quad (2.2)$$

这里 A 矩阵的元素为 (1.16) 式的 a_{ii} , r , H 与 (1.13) 式说明相同, G 为 g_i 所组成的单列矩阵。

- ② 选用 g_i 加权值作为初值,即:

$$B_i^{(0)} = g_i/A_i \quad (2.3)$$

- ③ 当地的平均无线电探空温度曲线算得的普朗克函数作为迭代初值。

利用这三种初值,选取不同的 ϵ 值可得不同的反演均方根误差,结果列于表 3。

- 2) 利用 Chahine 迭代法进行反演,其反演的均方根误差亦列在表 3:

表 3 不同 ϵ 值下非线性迭代与 Chahine 迭代反演的均方根误差

方 案	初 值	各种 ϵ 下的均方根误差($^{\circ}\text{C}$)			
		5×10^{-3}	10^{-1}	5×10^{-2}	10^{-1}
非线性迭代	近 似 解	0.33	0.58	1.12	1.31
	$B_i^{(0)} = g_i/A_i$	0.38	0.76	2.54	2.84
	平均探空曲线	0.35	0.66	1.60	1.85
Chahine 迭代	标准大气			2.01	2.65

ϵ 的单位: 尔格/厘米²·秒·立体角

① 我们用更多的资料、相同的初值及收敛误差对非线性迭代及 Chahine 迭代作了计算比较,结果是非线性迭代的均方根误差为 1.90°C , 而 Chahine 迭代为 2.32°C , 因此在同样仪器误差下,应用非线性迭代方案可以得到较好的效果。

② 用经验正交展开与最优统计的方法来反演大气垂直温度廓线一般说来还是可以的,其反演的均方根误差在一般情况下为 $1-3^{\circ}\text{C}$ 。由于这两个方法比较简便,若事先知道某测站的各层温度及其普朗克函数的统计性质,也可用这两种方法。如果预先不可能知道这种统计性质,则可用迭代法。

三、各种方法的误差分析

表 4, 表 5 分别是用经验正交展开的方法与最优统计方法所得反演的绝对误差出现的概率(百分比)表:

1. 从这两个表可以看到: 用统计方法来反演气温垂直分布,其反演的误差在大气低层大。因为一般情况下,大气低层气温的离散度大,有时还出现逆温现象。不管是用经验正交展开的方法还是最优统计方法均是统计意义上最优,故对于离散大的情况,一般不容易反映出各个例的特点,特别是天气变化剧烈的情况,故其反演误差较大。

2. 图二与图三是分别用非线性迭代与 Chahine 迭代反演的温度随高度的变化。可以看出: 迭代法反演的温度误差一般在高层大。这可能是迭代法中迭代方程的系数所用的插值点是固定的,并且高层通道很少,而实际的对流层顶高度随环流形势的变化是不小

表 4 用经验函数展开方法所得各层反演温度绝对误差出现的概率

概率 % 等压面 (mb)	误差 绝对	0—3℃			3—5℃			5℃ 以上		
		北京	上海	广州	北京	上海	广州	北京	上海	广州
50		100.0	80.0	96.7	0.0	13.3	2.2	0.0	6.7	1.1
100		95.6	80.0	85.6	4.4	15.6	13.3	0.0	4.4	1.1
200		75.6	85.6	98.9	23.3	10.0	1.1	1.1	4.4	0.0
300		77.8	80.0	97.8	20.0	17.8	2.2	2.2	2.2	0.0
500		78.0	76.7	75.6	15.6	21.1	21.1	5.6	12.2	3.3
850		71.1	70.0	66.6	22.2	21.1	27.8	6.7	8.9	5.6

表 5 用最优化统计方法所得各层反演温度绝对误差出现的概率

概率 % 等压面 mb	绝对 误差	0—3℃			3—5℃			5℃ 以上		
		北京	上海	广州	北京	上海	广州	北京	上海	广州
50		95	94	95	5	6	1	0	0	4
100		94	54	71	5	35	23	1	11	6
200		79	73	100	11	22	0	10	5	0
300		87	46	98	13	28	2	0	26	0
500		77	77	90	18	18	10	5	5	0
850		49	43	46	24	22	24	27	30	30

的, 对流层顶高度的变化会使高层的温度垂直分布发生较大的变化, 因此在目前情况下, 只用 6 个通道无论如何不能较好地描述对流层顶附近的温度垂直分布。在相同的绝对误差下高层有较大的相对误差, 也是原因之一。

3. 图四, 图五是 1973 年 5 月 4 日与 5 月 16 日 500 毫巴用非线性迭代方法反演误差的分布。实线表示由无线电探空所得到的温度场, 虚线表示反演误差。从这两张图可以看到: 在一般情况下, 温度场的冷槽区反演误差大, 低纬度地区反演误差大, 而脊区反演

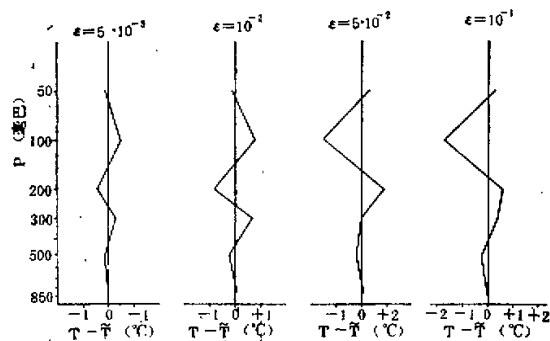


图 2 非线性迭代法的反演误差随高度的分布 T 为探空温度, ϵ 为迭代收敛误差, $\hat{T}$ 为反演温度

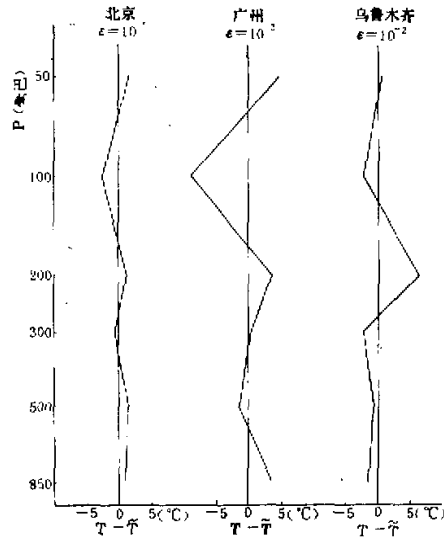
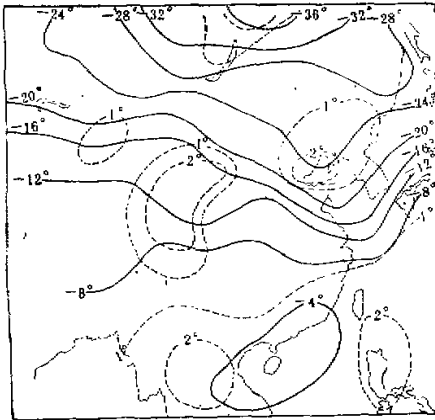
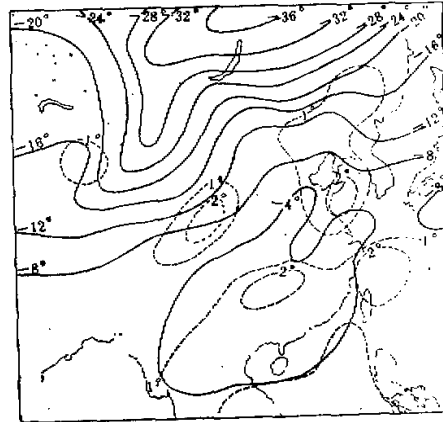


图3 Chahine 迭代反演误差随高度的分布

误差小。在图四中环流形势是处于槽脊减弱阶段,在青藏高原的东部有一小冷槽,并出现一片反演误差大的区域。在图五中环流形势处于槽脊加深阶段,我国西部受一冷槽控制,在高原的东部(即冷槽前)出现一片反演误差较大的区域。这是由于冷槽前对应在地面图上有锋面过境,这种情况经常出现逆温现象,而脊区对应于晴朗天气,很少有逆温出现,因此往往在冷槽前反演误差大,而暖脊区反演误差小。

最后应指出,本文所用的辐射值均由无线电探空的垂直温度廓线推算而得,因此所得的结论还是初步的,有待于进一步用真实卫星所测得的各通道的辐射资料进行验证。

图4 用非线性迭代法得到的反演
误差分布(500毫巴) 1973年5月4日00时图5 用非线性迭代法得到的反演
误差分布(500毫巴) 1973年5月16日00时

本文承蒙曾庆存同志指正和帮助, 北京大学 73 届毕业生房玉勤、何恩富参加了部分计算工作, 在此感谢。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存, 大气红外遥测原理, 科学出版社, 1973.
- [2] Chahine, T. Inverse problem in radiative transfer: determination of atmospheric parameters, *Journal of the atmospheric science* Vol. 27, No. 6, 1970.

COMPARISON BETWEEN DIFFERENT RETRIEVAL METHODS FOR INFRARED REMOTE SOUNDING OF TEMPERATURE PROFILE AND ERROR ANALYSIS

Huang Rong-hui Yuan Chong-guang

Abstract

Retrieval methods of using empirical orthogonal function, optimal statistics, non-linear iteration and Chahine iteration for solving the temperature remote sounding equation are described in this paper. The comparison between retrieved temperature profiles from different methods and radiosonde shows: (1) The nonlinear iterative methods gives higher accuracy of retrieved temperature and faster convergence. (2) While the error is larger in the lower atmosphere by the use of empirical orthogonal function method and optimal statistics method, the error is larger in the upper atmosphere by use of iterative methods. (3) By matching the error distribution at 500 mb level with the radiosonde temperature field it shows that retrieval error is larger in trough region, smaller in ridge region.