

非线性计算不稳定性

季仲贞

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文综合介绍天气预报问题中的非线性计算不稳定的含义、计算现象和处理办法。文中还提出我们的计算格式、稳定性定理和计算结果。

一、引 言

数值天气预报问题是一个数学物理问题,其中物理问题和数学问题都是同样重要的,而计算格式的计算稳定性问题是数值预报中十分重要的数学问题。通常,数值预报问题是对一组非线性时变偏微分方程初边值问题进行数值求解的。常系数线性时变方程用差分法求解时,其稳定性可用福氏方法来分析,一般,当空间步长固定时,只要时间步长取得足够小,格式总是计算稳定的。但是,像数值天气预报这样的非线性问题,由线性化方程所得的稳定性判据只有参考的意义,对线性化方程是稳定的差分格式,应用到相应的非线性方程上,有时却是计算不稳定的。这说明非线性差分方程有其特殊的不稳定性,这就是非线性计算不稳定性。这种不稳定性不同于线性不稳定性,不能用缩小时间步长来克服。phillips^[1]在他的非线性正压涡度方程数值求解中,遇到这类不稳定,他首先作了描述性的分析。

在模式的实际计算中,我们遇到各种各样的计算不正常(包括不稳定)现象。有时数值解随时间指数增长;有时却在一定的范围内激烈地振动;有时数值解逐渐减幅失真,流场过于平滑;有时却越算越紊乱,以致失去了物理意义。不少作者认为,这些现象或者是截断误差,或者是舍入误差所造成的,只要保证舍入误差不增长,在时间和空间步长缩小时,截断误差趋于零,数值解就趋于微分方程。只要物理模式的解不是“混乱”的也就不会有“混乱”的数值解。曾庆存认为,产生计算紊乱甚至计算不稳定的数学、物理本质在于时间上的离散化以及空间上用有限个自由度系统代替原来的连续介质系统、这就改变了原来方程的频散性质、能谱的非线性转移性质,甚至破坏了能量的守恒性。有的作者通过实例计算和分析,发现非线性不稳定对初值的依赖性很大。Hirt^[2]的分析说明非线性计算不稳定的产生与差分方程的“截断粘性项”的性质直接有关。

本文为了讨论问题的方便,仅以简单的一维非线性平流方程对复杂的天气预报模式的计算稳定性问题作模拟分析讨论,并且主要是讨论随着计算时间的延长,解的振幅也无

限增长的非线性计算不稳定性.

二、几个非线性计算不稳定的例子

所谓非线性计算不稳定是怎么回事呢? 先看看几个具体的例子.

考虑一维非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1)$$

为了构造差分格式的方便, 可以把 (2.1) 式改写为如下几种形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^3}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.3)$$

或者更一般地写为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + (1 - \theta) u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (2.4)$$

如果取初值为

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2.5)$$

则方程 (1) 有行波解

$$u(x, t) = f(x - ut). \quad (2.6)$$

从 (2.1) 至 (2.4) 式出发, 可以构造各种各样的差分格式. 譬如有

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \lambda u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (2.7)$$

式中 $\lambda = \Delta t / \Delta x$, 还有

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{1}{2} \lambda [(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2], \quad (2.8)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{1}{4} \lambda [(u_{j+1}^n + u_j^n)^2 - (u_j^n + u_{j-1}^n)^2] \quad (2.9)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{1}{3} \lambda (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (2.10)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{3} \lambda (\bar{u}_{j+1} + \bar{u}_j + \bar{u}_{j-1})(\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}), \quad (2.11)$$

其中

$$\bar{u}_j = (u_j^{n+1} + u_j^n) / 2 \quad (2.12)$$

除 (2.11) 式外, 这些格式的线性稳定性条件都是

$$|u\lambda| < 1 \quad (2.13)$$

都会出现非线性计算不稳定. 例如, 在 [4] 中我们对格式 (2.9) 和 (2.10) 同时取了如下两种初值进行试验:

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad (2.14)$$

$$u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x, \quad (2.15)$$

在计算中取 $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.004$, 于是得

$$|u\lambda| \leq |u|_{\text{Max}}\lambda = 2.5 \frac{0.004}{0.1} = 0.1 < 1$$

即格式满足线性稳定性条件 (2.13)。由于我们主要关心其计算稳定性, 在图 1、图 2 中分别给出两种初值下三种格式的动力能变化曲线, 图 1 对应初值 (2.14), 图 2 对应初值 (2.15), 比较这两张图, 可以看到如下几点: (a) 初值为 (2.15) 时, 格式 (2.9) (2.10) 总动能始终在一定范围内变化, 即格式计算稳定。 (b) 在初值为 (2.14) 时, 上述两种格式在计算开始时总动能变化是微小的, 即计算是稳定的, 但是在一定时间后, 突然出现指数增长现象, 可见其非线性不稳定性是一种突变现象。 (c) 两种初值相差一个常数项 1.5, 它对计算稳定性起着重要的作用, (d) 格式 (2.11) 始终计算稳定。

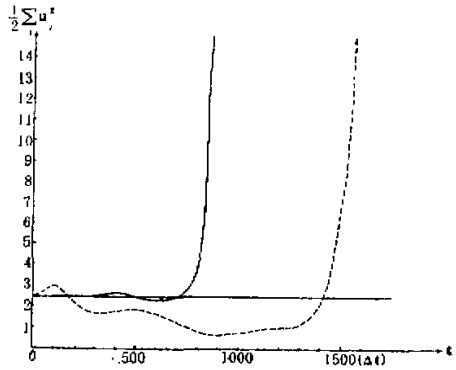


图 1 当 $u(x, 0) = \sin 2\pi x$ 时

总动能变化曲线

虚线对应 (2.9) 式, 实曲线对应 (2.10) 式,
实直线对应 (2.11) 式

在 [5] [6] 中用格式 (2.8) 也作了计算试验, 指出仅当 u_j^n 接近于零时才出现不稳定。

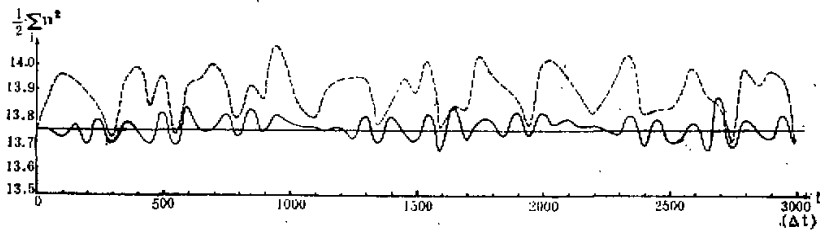


图 2 当 $(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x$ 时总动能变化曲线

说明同图 1

为了更清楚地看到差分分解中(包括初值, 即 $n = 0$ 时)的常数项对产生非线性不稳定的作用, [7] 中给出如下例子:

考虑差分格式 (2.8) 形如

$$u_j^n = C^n \cos \frac{\pi}{2} j + S^n \sin \frac{\pi}{2} j + U^n \cos \pi j + V \quad (2.16)$$

的特解, 其中 C^n 、 S^n 和 U^n 是扰动波长分别为 $4\Delta X$ 、 $4\Delta X$ 、 $2\Delta X$ 的波的系数, V 是常数 (基本流场)。把 (2.16) 代入 (2.8) 式, 考虑 j 的奇偶值关系, 得系数的递推关系:

$$\begin{cases} C^{n+1} - C^{n-1} = 2\lambda S^n (U^n - V) \\ S^{n+1} - S^{n-1} = 2\lambda C^n (U^n + V) \\ U^{n+1} - U^{n-1} = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

其中第三式表明 U^n 交替地取两个常数,不妨设为 A 和 B , 由 (2.17) 可得

$$C^{n+2} - 2\mu C^n + C^{n-2} = 0 \quad (2.18)$$

式中

$$\mu = 1 + 2\lambda^2(A+V)(B-V) \quad (2.19)$$

对 S^n 我们可以得到类似的方程. 如果 $|\mu| \leq 1$, 系数 C^n 和 S^n 是有界的; 如果 $|\mu| > 1$, 则解随 n 指数增长. 其稳定性条件是

$$-1 < \lambda^2(A+V)(B-V) < 0 \quad (2.20)$$

可见, 只要数值 V 充分大, 以致 $|V| > |A|$, $|V| > |B|$, 在满足 $\lambda|u|_{\max} < 1$ 的条件下, (2.20) 式可满足, 则格式稳定. 然而, 如果 A 和 B 同号, 并且常数 V 取得充分小, 以致 $A+V$ 和 $B-V$ 也同号, 则不稳定出现, 也就是解的光滑部分(基本流场)不能抑制扰动部分(二倍格距的波). 这表明基本气流(常数项) V 对稳定性起着重要的作用. phillips^[1] 曾做过一个类似的分析, 但没有考虑基本流场(常数项) V 的影响. Robert 等^[2]对类似的不稳定现象也作了分析和讨论.

此外, 在 [5] 和 [9] 中对类似于 (2.10) 式的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的格式

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \frac{1}{3} \lambda (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2.21)$$

作了一个分析, 其分析办法与 [7] 中的有所不同. [5] 中指出, 倘若函数 u 的初始两个时间层的值满足如下分布,

$$u^0: \cdots, d, -c, 0, c, -d, 0, d, -c, 0, c, -d, \cdots,$$

$$u^1: \cdots, -b, -a, 0, a, b, 0, -b, -a, 0, a, b, \cdots,$$

则格式 (2.21) 不稳定.

总之, 由上可见, 非线性方程用差分法求解时, 非线性计算不稳定是确实存在的. 这种不稳定性既与格式的结构有关, 又与初值扰动的分布有关.

三、非线性计算不稳定与混淆误差

phillips^[1] 认为由于有限的格网不能恰当地分解短波, 从而出现了短波的虚假表示, 造成了混淆现象的存在. 而混淆误差又引起了前述的非线性计算不稳定.

为了了解混淆误差与非线性不稳定之间的关系, 我们仍以非线性平流方程 (2.1) 为例作简要的分析. 把区间 $0 \leq x \leq 1$ 作 M 等分; $x = j\Delta x$ ($j = 0, 1, \cdots, M$, $M\Delta x = 1$) 并将 u 函数表示为如下有限福氏级数:

$$u_j = \sum_{k=0}^{M/2} \left(a_k \cos \frac{2\pi k j}{M} + b_k \sin \frac{2\pi k j}{M} \right) \quad (3.1)$$

可见, x 方向的最大可分解波数为 $M/2$, 相应的波长为 $2\Delta x$. 不妨设 u_j 包含有波数为 k_1 和 k_2 的两个波, 经非线性乘积相互作用后, 产生了波数为 $k_1 + k_2$ 和 $k_1 - k_2$ 的新波, 如果

$k_1 + k_2 > \frac{M}{2}$, 则这种特殊形式的波就不能分解, 而是由级数 (3.1) 所包含的波虚假地表示着。如图 3 所示, 共有 9 个格点, 最大可表示的波数为 4, 因此如实线所示的 6 个波表示不了, 结果出现了如虚线所示的 2 个虚假的波。这种虚假的表示就是所谓的混淆现象。设 $k_1 + k_2 = M - S > M/2$, 那末虚假出现的波数为 $S = M - (k_1 + k_2)$, 不妨设 $k_1 = M/2$, $k_2 = M/4$, 则 $S = M/4$ 。这就说明有能量反馈到波长为四个格距的波中去, 如果不断重复这个过程, 最终就能使这种短波动能迅速增加。这不反映真正的物理过程的能量, 而是一种虚假现象。这种虚假现象就是所谓的非线性不稳定性。

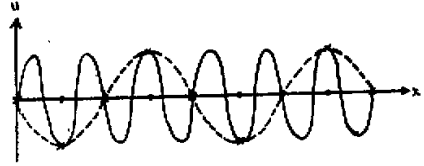


图 3 波的虚假表示

上面的分析, 基本上是 phillips 对造成非线性不稳定原因的分析。然而, Arakawa^[10]指出, 虽然 phillips 把非线性计算不稳定归因于“混淆”, 或者不可分解的短波的虚假表示, 但是, 混淆不一定意味着能量的虚假的增生; 而是否出现能量的虚假增长, 依赖于已经出现的波和虚假表示的波之间的位相关系。Arakawa 还进一步指出, 在他构造的守恒格式中, 存在着混淆误差, 它可以表现为一个相差或是能谱分布中的一个畸变, 但是, 对总能量来说, 对平均尺变的运动来说, 这个格式是没有混淆误差的。

Orszag^[11] 也指出, 推测混淆误差必引起非线性不稳定是不确切的, 因为可以构造去掉引起不稳定的混淆相互作用的格式。如本文第四节所讨论的平方守恒的格式, 尽管存在混淆相互作用, 但不会引起非线性不稳定。

陈雄山^[12]最近提出采用 Walsh-Hadamard 变换, 使变量的乘积不会超出有限离散正交基底的范围, 因此不会出现混淆现象。这也说明不能把产生非线性不稳定的原因简单地归罪于混淆误差。

总之, 非线性计算不稳定是数值天气预报问题计算中的病症, 但还不十分清楚病因之所在。在我们看来, 在一定的格式结构和初值、边值条件下, 混淆误差是可能造成非线性不稳定的, 但混淆误差不见得是造成非线性不稳定的充分必要条件, 其间的关系还有待于作进一步的研究。

四、克服非线性计算不稳定的措施

一般说来, 非线性不稳定在初始表现为局地的小尺度的不规则性, 也就是高频扰动, 在一定时间以后就出现突变式的指数增长。这种高频扰动可以用如下几种方法中的一种来消除或减弱: (a) 空间或时间平滑^{[13][14]}; (b) 在变量 A 的预报方程中引入形式为 $\nu \Delta^2 A$ 的扩散项; (c) 构造具有隐式平滑或某种选择性衰减作用的差分格式; (d) 构造能量守恒的格式。

若把混淆误差看作是非线性方程所产生的截断误差的普遍形式, 则在 [14] 中指出适当滤去小于四倍格距的波分量就可以消去这种误差。Phillips 也建议作这样的过滤, 在他

的大气环流模式中就是通过对预报场作周期的空间平滑,也就是在福氏分析中消去波长小于四倍格距的波来控制非线性不稳定的。显然,长时间地使用这种平滑算子,将会影响计算结果的精确度。

[9]中指出,避免非线性不稳定性的一种办法就是加逸散项,也就是前述的形如 $\nu \Delta^2 A$ 的扩散项。譬如,对格式(2.7)加上逸散项成为:

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{1}{2} \lambda u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \nu \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (4.1)$$

当常数 ν 充分大时,解 u_j^n 对整个时间保持有界,出现的缺点是逸散量需要很大,使解光滑太过分。如果采用类似于(2.10)的准守恒格式,正如在第二节给出的[5]中的例子所看到的,在一定的初值分布下仍会出现不稳定,但是这时仍可用逸散方式来控制,而且所需的逸散量很小,不必在每个时间步长内应用逸散量。我们还指出,如果采用四阶精度的差分格式:

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{1}{\Delta x} u_j^n \left[\frac{4}{3} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{1}{3} (u_{j+2}^n - u_{j-2}^n) \right] \quad (4.2)$$

虽然仍会出现非线性不稳定,但能用非常小的逸散量控制它。

至于前述的某些含有隐式平滑或选择平滑作用的格式也有很多,例如,在数值预报中应用十分广泛的 Euler 后差或 Matsuno 格式^[12]就是其中的一种。这是一种迭代格式,实践证明对抑制高频波是十分有效的,但是这种方法长时间地使用,同样会抑制低频波。最近有人^[16]提出把迭代格式与时间过滤格式结合起来使用,并发展了把高频波项与低频波项分开处理的办法,使得通过选择不同的光滑系数,相对地保持高频波而抑制低频波。

克服非线性不稳定的另一个办法就是构造能量守恒的格式。不难证明,在格式(2.10)中如果保持时间偏导数形式,将是满足能量守恒的。这时相应(2.10)式的微分差分方程是

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{1}{3} \lambda (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (4.3)$$

以 u_j^n 乘上式两边,并对所有格点求和,只要 u_j^n 在边界上是周期的或取刚体边界,则有

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_j^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_j \left(\frac{1}{2} u_j^2 \right) = 0 \quad (4.4)$$

这样,解 u_j^n 对时间为一致有界。因此,只要不将时间导数作差分离散化,非线性不稳定是完全可以避免的。

如果以 $\bar{u}_j$ 乘(2.11)式两边,并对所有格点求和,不难证明格式(2.11)是完全能量守恒的,因此格式是绝对稳定的。类似地,如果把(4.4)式改为隐式,用 Crank-Nicholson 方法处理时间导数,作出完全的差分近似,所得格式也是完全能量守恒的,从而也是绝对稳定的。

曾庆存等^[14]对完整原始方程构造了一种全隐式的时空差分总能量守恒格式(这种格式可视为格式(2.11)的推广格式)。显然,这种格式是有利于克服非线性计算不稳定的。

郭本瑜^[18]提出多种加耗散的调整守恒格式,据他初步试验,也能抑制非线性计算不稳定。

五、一维平流方程全隐式格式非线性 计算稳定的一个充分必要条件

如上所述,只要适当选取差分格式或采取必要的措施,非线性计算不稳定是可以克服的。自然,人们要问,一个非线性差分方程计算稳定的充分必要条件是什么呢?对一般的非线性方程要完全回答这问题是困难的。但是在[6]中对一维非线性平流方程(2.4)的Crank-Nicolson格式在一个小的限制下给出了非线性计算稳定的充分必要条件,是一个有启发性的讨论。[6]中所证明的定理比较一般,为了简洁明瞭起见,这里采用类似的办法证明如下较简化的定理。

定理: 对非线性方程(2.4)取全隐式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\theta}{2} \frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2\Delta x} + (1-\theta) \bar{u}_j \frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (5.1)$$

其中 $\bar{u}_j = \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}$, 如果取周期边界条件,且初值 u_j^0 的分布为

$$\{u_j^0\} = \cdots, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, \cdots, \quad \varepsilon \neq 0 \quad (5.2)$$

那末,格式(5.1)稳定的充分必要条件是 $\theta = \frac{2}{3}$ 。

证明: 首先证明条件的必要性。设 $u_j^n = \xi^n r_j$, 代入(5.1)式得:

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} r_j + \left(\frac{\xi^{n+1} + \xi^n}{2} \right)^2 \left[\frac{\theta}{2} \frac{r_{j+1}^2 - r_{j-1}^2}{2\Delta x} + (1-\theta) r_j \frac{r_{j+1} - r_{j-1}}{2\Delta x} \right] = 0 \quad (5.3)$$

记

$$T r_j = \frac{\theta}{2} \frac{r_{j+1}^2 - r_{j-1}^2}{2\Delta x} + (1-\theta) r_j \frac{r_{j+1} - r_{j-1}}{2\Delta x} \quad (5.4)$$

则(5.3)式可写为:

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} r_j + \left(\frac{\xi^{n+1} + \xi^n}{2} \right) T r_j = 0 \quad (5.5)$$

将(5.5)式分离变量,可写为

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} = c \left(\frac{\xi^{n+1} + \xi^n}{2} \right)^2 \quad (5.6)$$

$$T r_j = -c r_j \quad (5.7)$$

其中 c 是不为零的常数。(5.6)式可视为常微分方程 $\frac{d\xi(t)}{dt} = c\xi^2(t)$ 的差分近似,取初值 $\xi(0)=1$, 得其解 $\xi(t) = \frac{1}{1-ct}$, 可见当 $t = \frac{1}{c}$ 时, $\xi\left(\frac{1}{c}\right)$ 已发散至无限,这表明当 $c \neq 0$ 时,格式(5.6)一定是不稳定的。

可以看到,当 $\xi(0) = \xi^0 = 1$ 时, $u_j^0 = r_j$, 即 r_j 满足分布(5.2)。下面证明在(5.2)的分布下,当 $\theta \neq \frac{2}{3}$ 时,必有 $c \neq 0$ 。用 $\{r_j\}$ 表示 r_j 的分布序列,并且认为 $T\{r_j\} = \{T r_j\}$, 则有

$$\{r_j\} = \cdots, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, \cdots,$$

不难得到

$$\{r_i(r_{i+1} - r_{i-1})\} = \varepsilon\{r_i\}, \quad (5.8)$$

$$\{r_{i+1}^2 - r_{i-1}^2\} = -\varepsilon\{r_i\}, \quad (5.9)$$

把 (5.8) (5.9) 代入 (5.4) 式得:

$$\{Tr_i\} = -\frac{\theta}{2} \frac{\varepsilon\{r_i\}}{2\Delta x} + (1-\theta) \frac{\varepsilon\{r_i\}}{2\Delta x} = \frac{(2-3\theta)\varepsilon\{r_i\}}{4\Delta x}, \quad (5.10)$$

如果取

$$c = -\frac{(2-3\theta)\varepsilon}{4\Delta x}, \quad (5.11)$$

则 (5.10) 满足 (5.7) 式。可见, 当 $\theta \approx \frac{2}{3}$ 时, 必有 $c \approx 0$, 也就是当 $\theta \approx \frac{2}{3}$ 时, 格式 (5.1) 必不稳定。必要性证毕。

再证充分性。如果 $\theta = \frac{2}{3}$, 则 (5.1) 式可写为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{3} \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (5.12)$$

只要上式两边同乘以 $\bar{u}_i = \frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{2}$, 并对所有内点 i 求和, 利用边界条件的周期性, 可得

$$\sum_i \frac{1}{2} [(u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2] = 0 \quad (5.13)$$

即函数 u_i^n 一致有界, 故格式稳定。定理得证。

最后, 还要指出, 如果在上述定理中用显式格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\theta}{2} \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2\Delta x} + (1-\theta)u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (5.14)$$

代替 (5.1) 式, 则采取与上述定理同样的办法可以证明 $\theta = \frac{2}{3}$ 是格式 (5.14) 稳定的一个必要条件。

不难看出, 当 $\theta = \frac{2}{3}$ 时, (5.1) 式和 (5.14) 式就分别变成 (2.11) 式和 (2.10) 式。

六、小结和讨论

用有限差分法求解天气预报方程 (时变非线性偏微分方程) 时, 非线性计算不稳定是容易出现的, 尽管对产生非线性计算不稳定的原因还需作进一步的研究, 但在实际工作中人们已总结出许多抑制和克服非线性计算不稳定的有效措施。采用时间或空间的平滑, 或在方程中加逸散项对抑制非线性不稳定是有效的, 但长时间使用会影响物理上重要的低频波的精确度。采用准守恒格式加小量的逸散是一种较好的办法。自然, 构造全隐式守恒格式对克服非线性不稳定更是很成功的, 但一般要费更多的计算时间。

需要特别指出的, 上述一些对抑制或克服非线性不稳定有效的格式, 包括能量守恒格式在内, 只是保证解不随时间指数增长。然而, 对于克服本文第一节中提到的计算紊乱现

象,一般不一定有效。就以总能量守恒来说,能量守恒是一个整体的概念,而计算紊乱却可能是局部的现象。后者是能谱非线性转移中的不正常现象,至今研究得还很少,值得今后努力。

最后,还要指出,对时变偏微分方程进行数值求解的方法除差分法外,还有谱函数展开法(包括有限元法)等。这些方法的一个优点是易于保持能量守恒性,因此,在这些方法中非线性计算不稳定现象不突出。但是,这些方法比较繁琐,费时间,不如差分法简单易行,另外,方法的精确度也还不够十分清楚,因此也大大限制了它们的使用。近年来新发展起来的假谱方法是一种新的谱方法,它吸取了差分法求乘积简单的优点,又吸取了谱方法精确求微商的优点,看来这是一种有发展前途的方法。但是在假谱方法中仍像差分法一样,存在非线性计算不稳定^[19]。因此,继续深入研究非线性计算不稳定还是很有意义的,也是十分必要的。

本文是在王宗皓同志建议和帮助下整理的,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Phillips, N. A., "The atmosphere and the sea in motion", Edited by B. Bolin, Rockefeller Institute, New York, 501—504, 1959.
- [2] 曾庆存, 计算稳定性的若干问题, 大气科学, 2, 181—191, 1978.
- [3] Hirt, C. W., *J. Computational Physics*, 2, 339—355, 1968.
- [4] 季仲贞, 非线性平流格式的构造、分析和试验(1978), (尚未发表).
- [5] Kreiss, H. and Oliger, J., *Tellus*, 24, 199—215, 1972.
- [6] Fomberg, B., *Mathematics of Computation*, 27, 45—57, 1973.
- [7] Richtmyer, R. R. and Morton, K. W., "Difference methods for initial-value problems" Wiley-Interscience, 1967.
- [8] Robert, A. J., Shuman, F. G. and Gerity, J. D., *Mon. Wea. Rev.*, 98, 1—6, 1970.
- [9] Kreiss, H. and Oliger, J., GARP publications series No. 10, 1973.
- [10] Arakawa, A., *J. Computational Physics*, 1, 119—143, 1966.
- [11] Orszag, A., *J. Fluid. Mech.*, 49, 75—112, 1971.
- [12] 陈雄山, 非线性 Korteweg-de Vries 方程的高精度数值解法, 第二届全国数值天气预报会议论文集, 283—291, 1980.
- [13] Robert, A. J., *J. Meteor. Soc. Japan*, 44, 237—245, 1966.
- [14] Platzman, G. W., *J. Meteorol.*, 18, 31—37, 1961.
- [15] Matsuno, T., *J. Meteor. Soc. Japan*, 44, 76—84, 1966.
- [16] Masuda, Y., WMO "Numerical weather prediction progress report for 1976" 62—63, 1976.
- [17] 曾庆存等, 原始方程差分格式的设计, 第二届全国数值天气预报会议论文集, 300—313, 1980.
- [18] 郭本瑜, 大气环流闭合方程组的总能量守恒格式及全球预报误差的严格估计(1978), (即将发表).
- [19] Kasahara, A., *Methods in Computation Physics*, 17, 48—51, 1977.

NONLINEAR COMPUTATIONAL INSTABILITY

Ji Zhong-zhen

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, the concept, phenomena and handling methods of nonlinear computational instability in the problems of numerical weather prediction are discussed. Computational schemes, stability theorem and calculated results are also presented.