

台风中螺旋云带的线性理论

黄瑞新

巢纪平

(中国科学技术大学研究生院) (中国科学院大气物理研究所)

提 要

在指出台风中螺旋云带本质上反映了一类重力惯性内波后,应用缓变波列理论讨论了这类螺旋波的色散关系和群速度,同时进一步指出曳式波发展的能源主要是背景场转动角速度在水平和垂直方向上的不均匀性,特别是垂直切变更为重要。

一、基本现象

热带扰动发展成热带风暴和台风时,一般都会出现螺旋带状结构,这种结构很容易从卫星云图上分辨出来。在热带扰动的分类法上,常把出现螺旋带状看成是热带风暴成熟的标志(参见[1])。宏观地看,螺旋带的结构是很规则的,并相对于风暴中气流的旋转方向,一般都是曳式的,几乎没有观测到导式的。

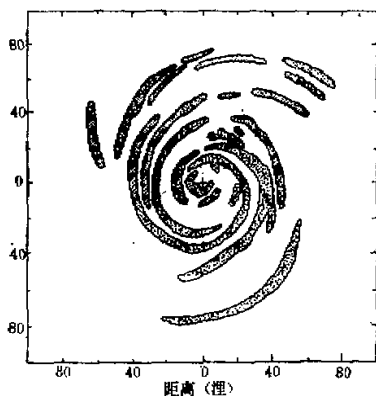


图1 1964年9月4日围绕着飓风“朵拉”的雷达回波分布图(转引自[1])。

螺旋云带形成后,将沿着气流方向绕着台风眼运动。根据 Ligda^[2] 的观测,其移速一般大于风速。从台风的雷达回波(图1)来看,在每个宏观的螺旋带中在径向方向还可以同时出现几排并列的雨带,并有径向生长的趋势^[2],现象的径向传播速度约每小时100公里。

由于台风中的强烈天气(暴雨、雷暴、阵风等)都发生在螺旋带中,因此研究螺旋带的形成和发展,不仅是一个有意义的理论问题,而且有实用价值。

近年来,Anthes 等^[3,4]模拟台风发展的三维非轴对称数值试验已经计算出螺旋带状结构,但数值试验并没有对螺旋带的物理本质给

出清楚的解释。然而,从上述的观测事实是不难对螺旋带的本质作出分析的。1)螺旋带绕台风眼的转动速度不等于气流的旋转速度,表明螺旋带不是由同样空气质点组成的物质带;2)螺旋带有径向生长的趋势,表明在径向方向有能量的传播。因此可以推测这是一类波动现象。事实上,Richi^[5]很早就指出,这是一类内波,但他没有作进一步动力学

的分析, Abdullah^[2] 对于正压旋转流体, 用特征线法进行数值解而得到了曳式的重力波。但他的方程是相当简化的, 也没有分析波的动力学性质, 特别是波发展的能量来源。我们注意到在上述 Anthes 等人的台风发展数值试验中, 有一个有意思的现象, 即螺旋带状结构并不是一开始就很快出现的, 而是要到台风的轴对称环流有一定强度后才呈现出来, 有理由认为, 螺旋状重力波的发展能量来自旋转的基本气流以及它的不均匀性(较差转动和垂直切变)。

从上述分析, 可以认为台风的发展大致通过这样两个阶段: 首先是通过 Charney 等^[6] 提出的 CISK (第二类条件性不稳定性), 热带低压在合适的大尺度天气背景条件下从云团中获得能量, 使转动速度增强而发展成热带风暴。当旋转气流强烈到一定程度时, 随机性的扰动可以从旋转气流中吸取能量, 而组织成有规则的曳式螺旋结构。

下面将用缓变波列的线性化理论来分析这类螺旋状重力惯性内波的动力学性质。

二、基本方程

为描述台风的空间结构, 采用三维柱坐标 (r, φ, z) , 设台风的基态是一个处于静力平衡和梯度风平衡下的轴对称涡旋, 即有

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial z} = g; \quad \frac{v_0^2}{r} + f v_0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial r} \quad (1)$$

其中 $v_0 = Q(r, z)r$, Q 为气流旋转角速度。今假定在基态场上迭加一个小扰动, 则对于速度的三个分量 (u, v, w) 及压力 p 和位温 θ 有:

$$\begin{aligned} u &= u'; \quad v = v_0 + v'; \quad w = w'; \\ p &= p_0 + p'; \quad \theta = \bar{\theta} + \theta' \end{aligned} \quad (2)$$

在 Boussinesq 近似下, 线性化后的基本方程组为

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + Q \frac{\partial u'}{\partial \varphi} - (2Q + f)v' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + Q \frac{\partial v'}{\partial \varphi} + \zeta_a u' + \frac{\partial Q r}{\partial z} w' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + Q \frac{\partial w'}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + Q \frac{\partial \theta'}{\partial \varphi} + \frac{d\bar{\theta}}{dz} w' = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \varphi} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\text{其中} \quad \zeta_a = 2Q + r \frac{\partial Q}{\partial r} + f \quad (8)$$

引进特征水平半径 r_0 (~ 100 公里), 特征高度 H_0 (~ 10 公里), 特征转动角速度 Q_0 ($10^{-3} \sim 10^{-4}$ 秒), 以及无量纲量:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{t} &= Q_0 t; \quad \tilde{r} = r/r_0; \quad \tilde{z} = z/H_0; \\ (\tilde{u}', \tilde{v}') &= (u', v')/Q_0 r_0; \quad \tilde{w}' = w'/Q_0 H_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\pi} &= \frac{p'}{\bar{\rho}} / \Omega_0^2 r_0^2; \quad \bar{\theta}' = \theta' / \frac{\Omega_0^2 r_0^2}{g H_0} \bar{\theta}; \\ \bar{\Omega} &= \Omega / \Omega_0; \quad \bar{\zeta}_a = \zeta_a / \Omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

则方程(3)–(7)的无量纲形式为(已略去“~”号)

$$u'_r + \Omega u'_\varphi - (2\Omega + R_0^{-1})v' + \pi'_r = 0 \quad (11)$$

$$v'_r + \Omega v'_\varphi + \zeta_a u' + \frac{\partial \Omega}{\partial z} w' + \frac{1}{r} \pi'_\varphi = 0 \quad (12)$$

$$\varepsilon^2 (w'_r + \Omega w'_\varphi) + \pi'_z - \theta' = 0 \quad (13)$$

$$\theta'_r + \Omega \theta'_\varphi + F_r^{-1} w' = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} (r u')_r + \frac{1}{r} v'_\varphi + w'_z = 0 \quad (15)$$

其中 $\varepsilon = H_0/r_0 \sim 10^{-1}$ 为小参数, $R_0 = \Omega_0/f$ 为 Rossby 数, $F_r = \frac{\Omega_0^2 r_0^2}{N^2 H_0^2} \sim 0(1)$ 为转动 Froude 数, $N = \left(\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \right)^{1/2}$ 为 Brunt-Väisälä 频率, 下标表示微商。

三、缓变波列的色散关系

设解的形式为:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \bar{U}(R, \Theta, z, \tau) e^{i\phi} \\ v' &= \bar{V}(R, \Theta, z, \tau) e^{i\phi} \\ w' &= \bar{W}(R, \Theta, z, \tau) e^{i\phi} \\ \theta' &= \bar{T}(R, \Theta, z, \tau) e^{i\phi} \\ \pi' &= \bar{P}(R, \Theta, z, \tau) e^{i\phi} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中

$$\phi = k r + n z - m \varphi + \omega t \quad (17)$$

而

$$k = \phi_r, \quad n = \phi_z, \quad m = -\phi_\varphi \quad (18)$$

分别为径向、垂直方向、周向波数, m 又称为螺旋带的臂数;

$$\omega = \phi_t \quad (19)$$

为波动的频率, 以及

$$R = \varepsilon r, \quad z = \varepsilon z, \quad \Theta = \varepsilon \varphi, \quad \tau = \varepsilon t \quad (20)$$

由于 $\varepsilon \ll 1$, 形如(16)式的解表明, 波振幅是空间和时间的缓变函数, 这样的波列称为缓变波列。显然, (16)式表示一种螺旋波, 因为对于每一时刻 t , 在 $z = \text{常数}$ 的平面上, 等位相线由 $k r - m \varphi = \text{常数}$ 所确定。可见当 $k < 0$ 时, r 增大则 φ 减小, 故等位相线呈曳式螺旋状; 反之, 当 $k > 0$ 时呈导式螺旋状。同样, 在每一时刻 t , 在 $r = \text{常数}$ 的柱面上, 等位相线由 $n z - m \varphi = \text{常数}$ 所确定, 亦即为柱面上的螺旋线, 故 $n > 0$ 时为右旋, $n < 0$ 时为左旋。

把(16)式代入到(11)–(15)式中, 可得到波振幅函数的线性方程组:

$$i\bar{\omega}\bar{U} - (2Q + R_0^{-1})\bar{V} + ikP + \varepsilon(\bar{U}_r + Q\bar{U}_\theta + P_r) = 0 \quad (21)$$

$$i\bar{\omega}\bar{V} + \zeta_s\bar{U} + \frac{\partial QR}{\partial z}\bar{W} + \varepsilon\left(\bar{V}_r + Q\bar{V}_\theta - im\frac{P}{R}\right) + \varepsilon^2\frac{P_\theta}{R} = 0 \quad (22)$$

$$inP - T + \varepsilon P_z + \varepsilon^2(i\bar{\omega}\bar{W} + Q\bar{W}_\theta) + \varepsilon^3\bar{W}_r = 0 \quad (23)$$

$$i\bar{\omega}T + F_r^{-1}\bar{W} + \varepsilon(T_r + Q\bar{T}_\theta) = 0 \quad (24)$$

$$ik\bar{U} + in\bar{W} + \varepsilon\left[\frac{1}{R}(R\bar{U})_R - i\frac{m}{R}\bar{V} + \bar{W}_z\right] + \varepsilon^2\frac{\bar{V}_\theta}{R} = 0 \quad (25)$$

其中

$$\bar{\omega} = \omega - mQ \quad (26)$$

以下进一步利用小参数 ε 作振幅函数的幂级数展开, 即

$$\bar{U} = \bar{U}_0(R, \theta, z, \tau) + \varepsilon\bar{U}_1(R, \theta, z, \tau) + \dots$$

其余 $\bar{V}$ 、 $\bar{W}$ 、 P 、 T 类同。代入 (21)–(25) 式中可得零阶近似为:

$$i\bar{\omega}\bar{U}_0 - (2Q + R_0^{-1})\bar{V}_0 + ikP_0 = 0 \quad (27)$$

$$i\bar{\omega}\bar{V}_0 + \zeta_s\bar{U}_0 + \frac{\partial QR}{\partial z}\bar{W}_0 = 0 \quad (28)$$

$$inP_0 - T_0 = 0 \quad (29)$$

$$i\bar{\omega}T_0 + F_r^{-1}\bar{W}_0 = 0 \quad (30)$$

$$ik\bar{U}_0 + in\bar{W}_0 = 0 \quad (31)$$

由此可得

$$\bar{U}_0 = -\frac{n}{k}\bar{W}_0 \quad (32)$$

$$T_0 = i\frac{F_r^{-1}}{\bar{\omega}}\bar{W}_0 \quad (33)$$

$$P_0 = \frac{F_r^{-1}}{n\bar{\omega}}\bar{W}_0 \quad (34)$$

$$\bar{V}_0 = \frac{i}{\bar{\omega}}\left(\frac{\partial QR}{\partial z} - \frac{n}{k}\zeta_s\right)\bar{W}_0 \quad (35)$$

代入到 (27) 式整理后得

$$\bar{\omega}^2 = \frac{k^2}{n^2}F_r^{-1} + (2Q + R_0^{-1})\left(\zeta_s - \frac{k}{n}\frac{\partial QR}{\partial z}\right) \quad (36)$$

故

$$\begin{aligned} \omega &= mQ \pm \left[\frac{k^2}{n^2}F_r^{-1} + (2Q + R_0^{-1})\left(\zeta_s - \frac{k}{n}\frac{\partial QR}{\partial z}\right)\right]^{1/2} \\ &\equiv F(R, \theta, z, \tau, k, m, n) \end{aligned} \quad (37)$$

为局地色散关系。另一方面, 群速度为:

$$C_{kr} = -\frac{\partial\omega}{\partial k} = -\frac{1}{2\bar{\omega}}\left[\frac{2k}{n^2}F_r^{-1} + \frac{1}{n}(2Q + R_0^{-1})\frac{\partial QR}{\partial z}\right] \quad (38)$$

$$C_{sz} = -\frac{\partial\omega}{\partial n} = -\frac{1}{2\bar{\omega}}\left[-\frac{2k}{n^3}F_r^{-1} + \frac{k}{n^2}(2Q + R_0^{-1})\frac{\partial QR}{\partial z}\right] \quad (39)$$

$$C_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = Q \quad (40)$$

显然径向和垂直方向群速度满足下述关系:

$$kC_{gr} + nC_{gz} = 0 \quad (41)$$

由(17)–(19)式可得以下的偏微商关系:

$$\frac{\partial \omega}{\partial R} = \frac{\partial k}{\partial r}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial r}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -\frac{\partial m}{\partial r} \quad (42)$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial R}; \quad \frac{\partial k}{\partial \theta} = -\frac{\partial m}{\partial R}; \quad \frac{\partial n}{\partial \theta} = -\frac{\partial m}{\partial z} \quad (43)$$

另外还有以下的运动学关系^[7]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_{R, \theta, r, k, m, n} \quad (44)$$

$$\frac{dk}{dt} = (\nabla F)_{k, h, n, r} \quad (45)$$

其中 $\mathbf{k} = (k, m, n)$ 为波数矢量, 在柱坐标中的标量形式为

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + C_{gr} \frac{\partial \omega}{\partial R} + C_{gz} \frac{\partial \omega}{\partial z} + C_{\varphi\varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_{R, \theta, r, k, m, n} \quad (46)$$

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + C_{gr} \frac{\partial k}{\partial R} + C_{gz} \frac{\partial k}{\partial z} + C_{\varphi\varphi} \frac{\partial k}{\partial \theta} - C_{\varphi\varphi} \frac{m}{R} = \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_{\theta, z, r, k, m, n} \quad (47)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + C_{gr} \frac{\partial n}{\partial R} + C_{gz} \frac{\partial n}{\partial z} + C_{\varphi\varphi} \frac{\partial n}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{R, \theta, r, k, m, n} \quad (48)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} + C_{gr} \frac{\partial m}{\partial R} + C_{gz} \frac{\partial m}{\partial z} + C_{\varphi\varphi} \frac{\partial m}{\partial \theta} + C_{\varphi\varphi} \frac{k}{R} = - \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)_{R, z, r, k, m, n} \quad (49)$$

由于 F 中并不显含 τ , 故在缓变的准稳态波列中, 以群速度随波群运动时所看到的波频率是不变的, 即

$$\frac{d\omega}{dt} \approx 0,$$

但此时的波数一般是不断变化的。

由(37)式, 沿周向的相速度为

$$Q_p = \frac{\omega}{m} = Q \pm \frac{1}{m} \left[\frac{k^2}{n^2} F_r^{-1} + (2Q + R_0^{-1}) \left(\zeta_s - \frac{k}{n} \frac{\partial QR}{\partial z} \right) \right]^{1/2} \quad (50)$$

注意到, 当根号中取负值时, 波将变为不稳定, 因此除熟知的不稳定层结 ($N^2 < 0$, 因此 $F_r < 0$) 是使波发展的因素外, 当绝对涡度 $\zeta_s < 0$ 时也是使波发展的因素, 但它们的作用对曳式和导式波是一样的。一般来说, 要在大范围出现 $N^2 < 0$ 或 $\zeta_s < 0$ 的条件是很难的, 所以这两种使波发展的情况不是常见的。另一方面, 在台风中流场的气旋性涡度除了在低层大气中一般都随高度的增加而减小, 即 $\partial Q / \partial z < 0$, 因此切向风速的垂直切变对右旋的曳式波 ($n > 0, k < 0$) 是不稳定因素, 而对右旋的导式波是稳定因素。这表明在一个轴对称的台风中, 曳式的螺旋重力惯性波将更容易得到发展。由于 $F_r \sim 1$, $\frac{\partial QR}{\partial z} \sim 1$, 而 $\zeta_s \sim R_0^{-1}$ (见[75]式), 因此如取 $\left| \frac{k}{n} \right| \sim 1$, 则当 $m = 2$ 时, 可得 $|Q_p -$

$Q| \lesssim 0.5$, 即周向波速最大不超过局地气流角速度的 1.5 倍, 最小也要大于局地气流角速度的一半。对于多臂模式, 这一差值更要小。

对于准稳态的螺旋波 Q_r 应为实数, 此时不难证明, $k < 0$ 时, 若 $Q_r - Q > 0$, 即当波的周向传播角速度大于气流角速度时, C_{gr} 、 C_{gs} 均为正, 因此能量将从台风中心向外输送、从低空向高空输送。正是这种输送, 造成了雨带的径向向外生长的趋势, 这和观测事实是一致的。

利用上述估计相速度的简化条件, 同样可估计出 $C_{gr} \sim \frac{1}{n}$, 恢复为有量纲量为 $C_{gr} \sim \frac{1}{n} (Q_0 r_0)$, 取 $n \sim 1$, $Q_0 \sim 2.5 \times 10^{-4}$ /秒, $r_0 \sim 100$ 公里, 则 $C_{gr} \sim 90$ 公里/小时, 这接近于观测到的雨带径向的传播速度。

从上面运动学的分析可见, 把螺旋带看作是一种螺旋重力惯性波的假设是符合现实的。

四、波的能量方程

方程组 (21)–(26) 的幂级数展开中的一阶近似为:

$$i\omega \bar{U}_1 - (2Q + R_0^{-1})\bar{V} + ikP_1 + (\bar{U}_{0r} + Q\bar{U}_{0\theta} + P_{0r}) = 0 \quad (51)$$

$$i\omega \bar{V}_1 + \zeta_s \bar{U}_1 + \frac{\partial QR}{\partial z} \bar{W}_1 + (\bar{V}_{0r} + Q\bar{V}_{0\theta} - im \frac{P_0}{R}) = 0 \quad (52)$$

$$inP_1 - T_1 + P_{0z} = 0 \quad (53)$$

$$i\omega T_1 + F_r^{-1} \bar{W}_1 + T_{0r} + Q T_{0\theta} = 0 \quad (54)$$

$$ik\bar{U}_1 + in\bar{W}_1 + \frac{1}{R} (R\bar{U}_0)_R + \bar{W}_{0z} - i \frac{m}{R} \bar{V}_0 = 0 \quad (55)$$

由 (55)、(54)、(53)、(52) 式可得

$$\bar{U}_1 = -\frac{n}{k} \bar{W}_1 + \frac{i}{k} \left[\frac{1}{R} (R\bar{U}_0)_R - i \frac{m}{R} \bar{V}_0 + \bar{W}_{0z} \right] \quad (56)$$

$$T_1 = \frac{i}{\omega} F_r^{-1} \bar{W}_1 + \frac{i}{\omega} (T_{0r} + Q T_{0\theta}) \quad (57)$$

$$P_1 = \frac{1}{n\omega} F_r^{-1} \bar{W}_1 + \frac{1}{n\omega} (T_{0r} + Q T_{0\theta}) + \frac{i}{n} P_{0z} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 = & \frac{i}{\omega} \left(\frac{\partial QR}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_s \right) \bar{W}_1 - \frac{\zeta_s}{k\omega} \left[\frac{1}{R} (R\bar{U}_0)_R - i \frac{m}{R} \bar{V}_0 + \bar{W}_{0z} \right] \\ & + \frac{i}{\omega} (\bar{V}_{0r} + Q\bar{V}_{0\theta} - i \frac{m}{R} P_0) \end{aligned} \quad (59)$$

把 (56)–(59) 式代入 (51) 中, 利用色散关系及群速度公式及 (32)–(35) 式整理后可得能量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial \tau} + C_{gr} \frac{1}{R} \frac{\partial R \bar{W}_0^2}{\partial R} + C_{gs} \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial z} + C_{s\theta} \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial \theta} \\ = \frac{k}{n} \left\{ \frac{1}{\omega} (2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial QR}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_s \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k}{n\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{F_r^{-1}}{\bar{\omega}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\frac{n}{k} \right) \\
& + \frac{1}{k\bar{\omega}} [(2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \bar{\omega}^2] \frac{\partial}{\partial R} \left(-\frac{n}{k} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{F_r^{-1}}{n\bar{\omega}} \right) \\
& - \frac{k}{n} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_r^{-1}}{n\bar{\omega}} \right) - (2Q + R_0^{-1}) \frac{Q}{\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[\frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{\partial Q R}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_a \right) \right] \\
& - \frac{kQ}{n\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{F_r^{-1}}{\bar{\omega}} \right) + Q \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(-\frac{n}{k} \right) \\
& + \frac{m}{Rk\bar{\omega}^2} \left(\frac{\partial Q R}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_a \right) [(2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \bar{\omega}^2] \\
& - \frac{m}{R\bar{\omega}} (2Q + R_0^{-1}) \frac{F_r^{-1}}{n\bar{\omega}} - \frac{F_r^{-1}}{Rn\bar{\omega}} \} \bar{W}_0^2
\end{aligned} \quad (60)$$

为分析其主要特点,作以下简化假设:

- 1) 除波振幅外,波动的结构是准稳定的,即 $\frac{\partial k}{\partial \tau} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = 0$ 等.
- 2) $F_r = \frac{Q_0^2 r_0^2}{N^2 H_0^2}$ 是常数.
- 3) 周向波数 m 和垂直方向波数 n 为常数,各参数均与周向无关,即 $\frac{\partial k}{\partial \Theta} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial \Theta} = 0$ 等.

于是(60)式简化成

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial \tau} + C_{sr} \frac{1}{R} \frac{\partial R \bar{W}_0^2}{\partial R} + C_{sz} \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial z} + C_{s\theta} \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial \Theta} \\
& = \frac{k}{n} \left\{ \frac{n}{k^3 \bar{\omega}} [(2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \bar{\omega}^2] \frac{\partial k}{\partial R} - \frac{F_r^{-1}}{n\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial R} + \frac{k F_r^{-1}}{n^2 \bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right. \\
& \quad + \frac{m}{Rk\bar{\omega}^2} \left(\frac{\partial Q R}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_a \right) [(2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \bar{\omega}^2] \\
& \quad \left. + \frac{m F_r^{-1}}{Rn\bar{\omega}^2} (2Q + R_0^{-1}) - \frac{F_r^{-1}}{Rn\bar{\omega}} \right\} \bar{W}_0^2
\end{aligned} \quad (61)$$

在上述简化条件下,由(38)–(40)式得群速度的空间偏导数为

$$\frac{\partial C_{sr}}{\partial R} = -\frac{1}{\bar{\omega}} C_{sr} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial R} - \frac{F_r^{-1}}{n^2 \bar{\omega}} \frac{\partial k}{\partial R} + \frac{1}{2n\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial R} \left[(2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial Q R}{\partial z} \right] \quad (62)$$

$$\frac{\partial C_{sz}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\omega}} C_{sz} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} - \frac{k}{2n^2 \bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial z} \left[(2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial Q R}{\partial z} \right] \quad (63)$$

$$\frac{\partial C_{s\theta}}{\partial \Theta} = 0 \quad (64)$$

利用上面三个关系式,可把(61)式进一步改写成

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (C_{sr} R \bar{W}_0^2) + \frac{\partial}{\partial z} (C_{sz} \bar{W}_0^2) + \frac{\partial}{\partial \Theta} (C_{s\theta} \bar{W}_0^2) \\
& = \frac{k}{n} \left\{ \frac{n}{k^3 \bar{\omega}} [(2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \bar{\omega}^2] - \frac{k^2}{n^2} F_r^{-1} \right\} \frac{\partial k}{\partial R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{F_r^{-1}}{n\bar{\omega}^2} + \frac{n}{k\bar{\omega}} C_{gr} \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial R} + \left(\frac{kF_r^{-1}}{n^2\bar{\omega}^2} - \frac{n}{k\bar{\omega}} C_{gz} \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \\
& + \frac{m}{Rk\bar{\omega}^2} \left(\frac{\partial Q R}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_a \right) [(2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \bar{\omega}^2] \\
& - \frac{mF_r^{-1}}{Rn\bar{\omega}^2} (2Q + R_0^{-1}) - \frac{F_r^{-1}}{Rn\bar{\omega}} + \frac{1}{2k\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial R} \left[(2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial Q R}{\partial z} \right] \\
& - \frac{1}{2n\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial z} \left[(2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial Q R}{\partial z} \right] \bar{W}_0^2 \quad (65)
\end{aligned}$$

等式右侧前三项又可作以下的简化:

$$\frac{n}{k^3\bar{\omega}} \left[(2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \bar{\omega}^2 - \frac{k^2}{n^2} F_r^{-1} \right] \frac{\partial k}{\partial R} = \frac{2n}{k^2} C_{gr} \frac{\partial k}{\partial R} \quad (66)$$

在前述的简化条件下,由(47)式得

$$\begin{aligned}
C_{gr} \frac{\partial k}{\partial R} &= \frac{mQ}{R} + \left(\frac{\partial F}{\partial P} \right)_{\Theta, z, r, k, m, n} \\
&= \frac{m}{R} \frac{\partial Q R}{\partial R} + \frac{1}{2\bar{\omega}} \left[\frac{\partial}{\partial R} (2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \frac{k}{n} \frac{\partial}{\partial R} (2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial Q R}{\partial z} \right] \quad (67)
\end{aligned}$$

同理,由(42)式可知

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial R} = \frac{\partial \omega}{\partial R} - m \frac{\partial Q}{\partial R} = \frac{\partial k}{\partial r} - m \frac{\partial Q}{\partial R} = -m \frac{\partial Q}{\partial R} \quad (68)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial z} - m \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial r} - m \frac{\partial Q}{\partial z} = -m \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (69)$$

利用(38)、(39)式又可得

$$\frac{F_r^{-1}}{n\bar{\omega}^2} + \frac{n}{k\bar{\omega}} C_{gr} = \frac{1}{2k\bar{\omega}^2} (2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial Q R}{\partial z} \quad (70)$$

$$\frac{kF_r^{-1}}{n^2\bar{\omega}^2} - \frac{n}{k\bar{\omega}} C_{gz} = \frac{1}{2n\bar{\omega}^2} (2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial Q R}{\partial z} \quad (71)$$

把(66)–(71)式代入(65)式中整理后得到右端只含有基态项偏导数的能量方程为:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (C_{gr} R \bar{W}_0^2) + \frac{\partial}{\partial z} (C_{gz} \bar{W}_0^2) + \frac{\partial}{\partial \Theta} (C_{\Theta\Theta} \bar{W}_0^2) \\
& = \frac{k}{n} \left\{ \frac{2mn}{Rk^2} \frac{\partial R Q}{\partial R} + \frac{m}{2k\bar{\omega}^2} (2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial R Q}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial R} \right. \\
& \quad - \frac{m}{2n\bar{\omega}^2} (2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial R Q}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{n}{k^2\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial R} [(2Q + R_0^{-1})\zeta_a] \\
& \quad + \frac{m}{Rk\bar{\omega}^2} \left(\frac{\partial R Q}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_a \right) [(2Q + R_0^{-1})\zeta_a - \bar{\omega}^2] \\
& \quad + \frac{1}{Rn\bar{\omega}^2} [m(2Q + R_0^{-1}) + \bar{\omega}] F_r^{-1} + \frac{1}{2k\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial R} \left[(2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial R Q}{\partial z} \right] \\
& \quad \left. - \frac{1}{2n\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial z} \left[(2Q + R_0^{-1}) \frac{\partial R Q}{\partial z} \right] \right\} \bar{W}_0^2 \quad (72)
\end{aligned}$$

为进一步简化方程,可假定切向风速的垂直切变为常数,即

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial R Q}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial R Q}{\partial z} \right) = 0,$$

考虑到 $R_0^{-1} = f/Q_0 \ll 1$, 故 (72) 式中的 R_0^{-1} 项与 Q 相比可以略去, 整理后得方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (C_{s,r} R \bar{W}_0^2) + \frac{\partial}{\partial z} (C_{s,z} \bar{W}_0^2) + \frac{\partial}{\partial \Theta} (C_{s,\varphi} \bar{W}_0^2) \\ &= \frac{k}{n} \left\{ \frac{2mn}{Rk^2} \frac{\partial R Q}{\partial R} + \left[\frac{1}{k\bar{\omega}} \left(\frac{mQ}{\bar{\omega}} + 1 \right) \frac{\partial R Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial R} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{m}{Rk\bar{\omega}^2} (2Q\zeta_s - \bar{\omega}^2) \left(\frac{\partial R Q}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_s \right) \right] + \frac{2n}{k^2 \bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial R} (Q\zeta_s) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{n\bar{\omega}} \left(\frac{mQ}{\bar{\omega}} + 1 \right) \frac{\partial R Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{1}{Rn\bar{\omega}^2} (2mQ + \bar{\omega}) F_r^{-1} \right\} \bar{W}_0^2 \quad (73) \end{aligned}$$

对于上式右侧方括号中各量的总效果可作如下的估计: 在台风眼以外, 一般可认为切向风速接近满足角动量守恒, 故有

$$Q = M/r^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial R} = -\frac{2Q}{r} \quad (74)$$

$$\zeta_s = R_0^{-1} \ll 1 \quad (75)$$

在这种情况下, 考虑到 (74) 式后, 可得如下的估计:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{k\bar{\omega}} \left(\frac{mQ}{\bar{\omega}} + 1 \right) \frac{\partial R Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial R} + \frac{m}{Rk\bar{\omega}^2} (2Q\zeta_s - \bar{\omega}^2) \left(\frac{\partial R Q}{\partial z} - \frac{m}{k} \zeta_s \right) \right] \\ & \approx \frac{1}{k\bar{\omega}} \left[\frac{m}{\bar{\omega}} (Q - \zeta_s) + 1 \right] \frac{\partial R Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial R} \\ & \quad - \frac{m}{Rk} \left(\frac{\partial R Q}{\partial z} - \frac{n}{k} \zeta_s \right) - \frac{2mnQ}{Rk^2 \bar{\omega}^2} \zeta_s^2 \end{aligned}$$

再考虑到 (75) 式, 可略去其中的 ζ_s 及 ζ_s^2 项, 则波的能量方程最后可简化成以下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{W}_0^2}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (C_{s,r} R \bar{W}_0^2) + \frac{\partial}{\partial z} (C_{s,z} \bar{W}_0^2) + \frac{\partial}{\partial \Theta} (C_{s,\varphi} \bar{W}_0^2) \\ &= \frac{k}{n} \left\{ \frac{2mn}{k^2} \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial R Q}{\partial R} - \frac{m}{k} \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{1}{mk\bar{Q}_p} \left(\frac{Q}{\bar{Q}_p} + 1 \right) \frac{\partial R Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial R} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{mn\bar{Q}_p} \left(\frac{Q}{\bar{Q}_p} + 1 \right) \frac{\partial R Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial z} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{mn\bar{Q}_p^2} \left(\frac{2Q}{\bar{Q}_p} + 1 \right) \frac{F_r^{-1}}{R} \right\} \bar{W}_0^2 \quad (76) \end{aligned}$$

其中 $\bar{Q}_p = \frac{\bar{\omega}}{m}$.

方程 (76) 右端可以看成是螺旋重力惯性波发展的能源(汇). 对于右旋情况, 各项的作用分别如下:

1) 第一项为较差转动的影响, 当 $k < 0$ 时, 由于 $\frac{\partial R Q}{\partial R} < 0$, 故此项为正, 即单纯的较差转动对曳式重力惯性波是能源.

2) 第二项为垂直切变的影响, 由于 $\frac{\partial Q}{\partial z}$ 一般均为负, 故此项为正, 它对曳式或导式波

均为能源。

3) 第三项为较差转动和垂直切变的共同影响, 由于 $|\Omega/\Omega_p| > 1$, 故

$$\frac{1}{\Omega_p} \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} + 1 \right) > 0$$

对 $\Omega > 0$ 的情况恒成立, 因此这项对于曳式或导式波均为能源。

4) 第四项为垂直切变的平方项影响, 显然它对于曳式波是能源。

5) 第五项为层结和气流转动的共同影响, 它对于曳式波及气旋性气流而言, 总是能源。

总的来说, 具有气旋性涡度的台风基态流场, 由于存在较差转动和风速的垂直切变, 将为曳式螺旋带的发展提供有利的背景条件。由于这些作用的共同影响, 曳式螺旋重力惯性波将比导式的波更易得到维持和发展, 特别可以看出, 切向风速的垂直切变占有最重要的地位, 因为能源的强度中有一项正比于风速垂直切变的平方。因此在风速垂直切变最强烈的区域, 曳式螺旋重力惯性波将发展得最强。图 2 是伊泽 (T. Izawa) 对 14 个接近日本的太平洋台风资料的统计所得到的切向风速径向剖面。由图可见风速垂直切变的最大值在台风顶部, 其高度在 12 公里左右, 在该处风速的水平切变也较大。再往上, 则由于气流开始转变为反气旋性, (76) 式中后三大项均将变成能汇, 扰动迅速衰减。而在中下层, 台风的内部, 切向风速的水平梯度是较大的。根据群速度公式, 台风从中低层较差转动中得到能量后, 一部分将向外输送, 一部分将向高层输送, 加上高层的垂直切变中获得的能量, 所以在高层曳式螺旋波由于积累了较多的能量, 因此在该区具有较强的强度。

最后指出, 在台风的底层, $\frac{\partial R\Omega}{\partial z} < 0$, 但由图 2 可知, 这大多只出现在 2 公里高度以下。由于大气边界层的厚度为 1 公里的量级, 可知这种情况主要是发生在 Ekman 边界层中。但在边界层中实际上还应进一步考虑到粘性力的作用, 如采用边界层近似等方法作详细的分析。由于现在的方程组中并不包括边界层效应, 因此在边界层中台风的能量收支问题需另外用边界层方程来讨论。

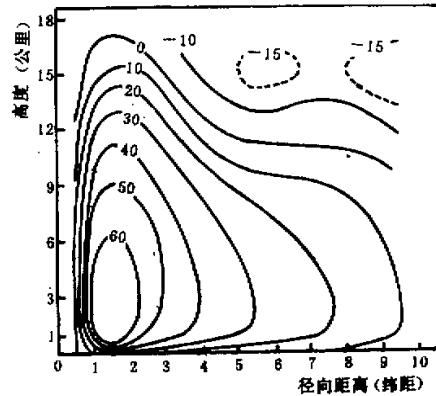


图 2 14 个太平洋台风平均切向速度的径向剖面图 (转引自 [1])。正值表示气旋性环流, 负值表示反气旋性环流

五、总 结

本文对台风中螺旋云带的发展提供了一个动力学解释。指出它本质上是一类螺旋重力惯性波, 应用缓变波列的线性理论, 分析了这类螺旋重力波的若干动力学性质。指出:

1) 在气旋性台风中,由于风速的垂直切变和较差转动,则任一个初始扰动波形成后,能够在基态流场中吸取能量而发展成曳式螺旋波。2) 在稳定层结的大气中,曳式螺旋重力波的波动能量存在着向外、向上的输送,故螺旋云带将沿着群速度的方向出现径向和垂直发展的现象。3) 这类曳式重力波的发展能量主要来源于风速的垂直切变和较差转动。

参 考 文 献

- [1] 阿特金森,热带天气预告手册(中译本),上海人民出版社,
- [2] Abdullah, A. J., *J. Atmos. Sci.* **23**, 367—375, 1966.
- [3] Anthes, R. A. et al., *Mon. Wea. Rev.* **99**, 744—759, 1971.
- [4] ———, *Mon. Wea. Rev.* **99**, 759—765, 1971.
- [5] Riehl, H., *Compendium of Meteorology*, Boston, *Amer. Meteor. Soc.* 902—913, 1951.
- [6] Charney, J. G. & Eliassen, A., *J. Atmos. Sci.* **21**, 68—75, 1964.
- [7] Bretherton, F. P., *Mathematical Problems in the Geophysical Sciences*, W. H. Reid, Editor, Amer. Mathematical Soc., Providence, Rhode island. 61—102.

THE LINEAR THEORY OF SPIRAL CLOUD BANDS OF TYPHOON

Huang Rui-xin

(Graduate College, the University of
Science and Technology of China)

Chao Jih-ping

(Institute of Atmospheric
Physics, Academia Sinica)

Abstract

It has been pointed out that the spiral cloud bands of typhoon are produced by the gravity-inertial waves. By using the linearized equations in cylindrical coordinates and the theory of slow-varying wave train the dispersion relation and the group velocity of these spiral waves have been discussed. Through the detailed analysis of the energy equation, it is obvious that the nonhomogeneities of the angular velocity of the base field in the horizontal and vertical direction provides the energy source for the development of the trailing spiral wave. The vertical shear is a more important factor.