

在有热源和耗散情况下的大气适应过程

张可苏

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文讨论在热源和摩擦耗散作用下大气的适应过程。一、分析无穷空间点源扰动函数积分形式的解。二、在热源沿水平方向周期分布的情况下,求解有摩擦时环流向常定外源及下垫面外强度场适应的过程,并和无摩擦的情况相比较。三、求出在常定外源和摩擦的共同作用下大气适应的终态。四、给出系统垂直结构与热源空间分布的关系。

前 言

旋转地球上的大气经常自动地向准静力平衡和准地转平衡调整,说明大气运动有向外部力场(重力场和柯氏力场)适应的性质。很多作者如 Rossby, Обухов, Кибель, 叶笃正等早就注意到地球大气的风压场之间存在着一定的适应关系,这种关系对系统的水平尺度有很强的依赖性。曾庆存进一步研究了扰动垂直结构对适应结果的影响,求出非线性发展过程与适应过程的关系及球面大气的解。他们的工作很好地阐述了自由大气向地球旋转适应的动力性质。但是,作用于地球大气的远不止这些动力因子。太阳是大气运动的最终能源,太阳在地球赤、极之间形成的辐射差额构成地球大气运动的根本动因。如果暂且不顾及热源与运动场的相互作用,则大气运动还具有向“外部热源”适应的性质。由于晴空大气对太阳短波辐射的吸收量很小,太阳能主要为地面及洋面吸收,然后再通过长波辐射,水相变化及湍流过程将热量传给大气,热量基本上来自下垫面,因此,讨论大气向下垫面常定热源适应的过程将具有基础的意义。

本文结果表明,大气运动同时具有向“外部热源”和向“地转运动”适应的性质。大气向常定外源或下垫面温度场适应的过程按准地转关系进行,常定热源激发的重力波随时间单调衰减,因而从某些方面来说“准地转模式”可能对长期过程是可用的。非定常热源则是激发重力波的“源”。加入湍流粘性后,大气发展过程的速率减慢,重力波阻尼,最终能量收支平衡,运动趋于定常。由于湍流的尺度效应,场的涡旋部份较之波动部分容易维持,因而湍流的加入加速重力波能量的耗散而有利于适应过程的完成。此外,热源的空间分布直接影响系统的垂直结构和适应的终态。在不考虑对流及垂直方向的湍流混合时下垫面单波冷、热源只能生成整层一致并向上衰减的冷高压和热低压,只有一定垂直分布型式空间热源才能生成高、低空反相的环流系统。

1978年11月23日收到修改稿

一、方程组及边界条件

在考虑热源和水平湍流混合的情况下,斜压大气线性化无因次方程可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu - \nu \Delta u = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + u - \nu \Delta v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon' \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = 0 \\ \zeta^2 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \mu^2 \varepsilon' \tau = A_0 + K_T \zeta^2 \Delta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = A \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $t, (u, v), (x, y), \tau, \phi$ 的特征值分别为 $1/f, U, L, \bar{\tau}$ 及 fUL , 柯氏参数 f 取 $1.1 \times 10^{-4} S^{-1}$, $\zeta = P/P_0, \tau = \frac{d\zeta}{dt}$, P_0 是海平面标准气压, $\mu^2 = \left(\frac{L_0}{L}\right)^2$, $L_0 = C/f$, $C^2 = \alpha R \bar{T}$, $\alpha = \frac{R}{g} (\gamma_d - \gamma)$, $\varepsilon' = \frac{L}{U} \frac{\bar{\tau}}{P_0}$, $\nu = \frac{\nu_H}{fL^2}$, $K_T = K_H/fL^2$ 均为无量纲参数, 取动量湍流系数 ν_H 与热量湍流系数 K_T 相等, $A_0 = -\frac{\varepsilon_0 R^2 T}{C_p P_0 f U L}$, ε_0 是除水平湍流以外的热流入量; 在 $\bar{T} = 270^\circ K$, $\bar{\tau} = 0.5^\circ C/100$ 米时, $\alpha \approx 0.14$, $C \approx 104$ 米/秒。

由(1)式消去其它变量后得到关于 ϕ 的方程:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi) &\equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right)^2 + 1 \right] + \mu^2 \Delta \right\} \left(\frac{\partial}{\partial t} - K_T \Delta \right) \phi \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right)^2 + 1 \right] \frac{\partial A_0}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (2)$$

这是本文将要讨论的主要方程。

边界条件的提法是一个需要特别小心的问题^[4]。(1)式求解的唯一性要求至少 (u, v, ϕ, τ) 在 $0 \leq \zeta \leq 1$ 上平方可积, 同时, 按体系总能量守恒也要求有与之等效的全气柱能量有界*, 这个条件比解方程组(1)所要求的正则条件强。以下求解(2)时上边界满足 $\int_0^\infty \rho w^2 < \infty$, 它可化为:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} |\zeta^{\frac{1}{2}} \phi_{,\zeta}| \rightarrow 0 \quad (3)$$

下边界条件取作地表面 $w = 0$, 线性情况下, 从而有

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi = A_0 |_{\zeta=1}$$

若在近地面边界层中应用 Ekman 理论, 则在边界层上界出现正比于风场涡度的垂直速度 $w_0 = K_1 Q$, 再略去边界层的厚度, 于是下边界条件可改写为

* 水平范围有限且具有周期性侧边界条件的理想大气(或球面大气)是质量、能量守恒系统。设守恒的总能量为 E , $E < \infty$, 由水平范围的有界性, 可推得每一个垂直方向无限长的气柱的能量 $E_0 < \text{体系总能量 } E_0 < \infty$ 。

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tilde{K} \Delta \right) \phi \right] = A_0 |_{\zeta=1} \quad (4)$$

其中 $\tilde{K} = gK_1/fL^2$, $K_1 = \sqrt{\nu_z/2f}$, ν_z 是垂直方向的湍流粘性系数.

二、自由大气运动向常定外源的适应过程

我们先看只有热能供给没有动能消耗的情况, 讨论风、压场如何向“外源”适应, 它们的发展特性以及重力波是否会因为能源的加入而发生增幅等问题.

取 $\nu = 0$, 讨论空间有常定热源, 下界有常定热流入量的情况, 这时的泛定方程及定解条件为:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) + \mu^2 \Delta \right] \phi_t = \frac{\partial A}{\partial \zeta} \\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) \phi_t = A |_{\zeta=1} \\ \left| \zeta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi_t}{\partial \zeta} \right| \rightarrow 0 |_{\zeta \rightarrow 0} \\ (\phi, \phi_t, \phi_{tt})|_{t=0} = (\phi_0, (\phi_t)_0, (\phi_{tt})_0) \end{cases} \quad (5)$$

令 $\phi = \phi_g + \tilde{\phi}$, 其中 ϕ_g 是准地转部份, $\tilde{\phi}$ 是波动部份, ϕ_g 满足“准地转”模式:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \mu^2 \Delta \right] \phi_{gt} = \frac{\partial A}{\partial \zeta} \\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) \phi_{gt} = A |_{\zeta=1} \\ \left| \zeta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi_{gt}}{\partial \zeta} \right| \rightarrow 0 |_{\zeta \rightarrow 0} \\ (\phi_g)_0 = \phi_0 \end{cases} \quad (5)_1$$

直接引用已有的结果^[2], 有

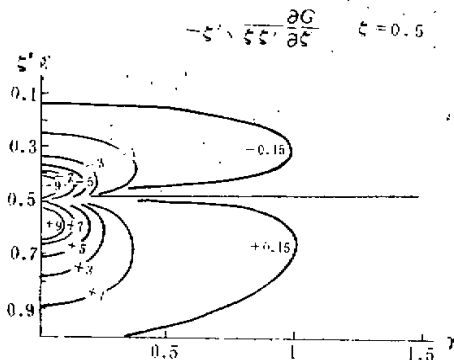


图1 空间热源 $(-A)$ 对 $\zeta = 0.5$ 层的作用

$$\begin{cases} \phi_{zt} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 A \frac{\partial G}{\partial \zeta'} d\zeta' dx' dy' = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 G \frac{\partial A}{\partial \zeta'} d\zeta' - GA \right]_{\zeta'=1} dx' dy' \\ \phi_g = \phi_{zt} + \phi_0 \end{cases} \quad (5)_2$$

其中 $-\frac{\partial G}{\partial \zeta'}$ 是空间热源 $-A$ 的点源扰动函数, (见图一, 取自文献^[2]) 热源切变 $\left(-\frac{\partial A}{\partial \zeta'}\right)$ 的点源扰动函数 G 在全空间均为正值,

$$\begin{cases} G = \frac{1}{2\sqrt{\zeta\zeta'}} \left[\sigma_{(r, \ln \frac{\zeta}{\zeta'})} + \sigma_{(r, \ln \frac{1}{\zeta\zeta'})} \right] + \frac{1-2\alpha}{2(\zeta\zeta')^\alpha} \int_{\ln \frac{1}{\zeta\zeta'}}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}-\alpha)a} \sigma_{(r, a)} da \\ \sigma_{(r, a)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+a^2}}}{\sqrt{\gamma^2+a^2}}; \\ \gamma^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \end{cases} \quad (5)_1$$

若 A 集中于近地面薄层, 令平均热源强度 $-\bar{A} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \int_{\zeta}^1 (-A) a \zeta$ 则因

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta'} \Big|_{\zeta'=1} = -\alpha_0 G \Big|_{\zeta'=1},$$

我们有

$$\phi_{zt} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{A} \frac{\partial G}{\partial \zeta'} \Big|_{\zeta'=1} dx' dy' = -\frac{\alpha}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{A} G \Big|_{\zeta'=1} dx' dy'$$

若是完全没有空间热源, 只有边界热流入量, 则

$$\phi_{zt} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} GA \Big|_{\zeta'=1} dx' dy'$$

这说明, 常定“外源”作用下系统的垂直结构完全由热源分布决定(在非线性的模式中, “源”函数还包括平流部分)。空间热源 $-A$ 按 $-\frac{\partial G}{\partial \zeta'}$ 规律作用于全空间, 在热源以上造成正变高, 在热源以下造成负变高(见图一); 热源强度向上减弱 $\left(-\frac{\partial A}{\partial \zeta'} > 0\right)$ 有利于生成热高压, 热源强度向上增强 $\left(-\frac{\partial A}{\partial \zeta'} < 0\right)$ 有利于生成热低压; 下边界热流入量则造成以地面为中心的全空间负变高。因此, 下边界加热强而空间热源集中于高层时, 易于生成低层热低压高层热高压结构, 若空间加热向上增强且低层以边界热流入量为主, 则有利于生成深厚的热低压, 实际大气热源在 600mb 处最大, 故常出现对流层低层暖低压, 高层暖高压的结构。

波动部分 $\tilde{\phi}$ 可按线性问题的迭加原理由下列方程决定。

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 1 \right) + \mu^2 \Delta \right] \tilde{\phi}_t = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) \phi_t = 0 \Big|_{\zeta=1} \\ \left| \zeta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi_t}{\partial \zeta} \right| \rightarrow 0 \\ \tilde{\phi}_0 = \phi_0 - \phi_{g0} = 0, \quad (\tilde{\phi}_t)_0 = (\phi_t)_0 - (\phi_{gt})_0, \quad (\tilde{\phi}_n)_0 = \phi_n \Big|_{r=0}. \end{cases} \quad (6)$$

关于这问题的解, 可以直接引用 A. C. Монин 的结果^[3,4]:

$$\tilde{\phi}_i = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \Gamma \cdot (\tilde{\phi})_0 d\xi' dx' dy' + \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \Gamma \cdot (\phi_{0i})_0 d\xi' dx' dy' \right] \quad (6)_1$$

这个点源影响函数 Γ 具有明显的波动性质.

$$\begin{aligned} \Gamma_{(r, \xi, \xi', t)} = & \frac{\mu}{2r\sqrt{\xi\xi'}} \left[J_0 \left(\sqrt{\left(r^2 - \frac{\gamma^2}{4\mu^2} \right) \left(1 + \frac{\mu^2}{\gamma^2} \ln^2 \frac{\xi}{\xi'} \right)} \right) \right. \\ & + J_0 \left(\sqrt{\left(r^2 - \frac{\gamma^2}{4\mu^2} \right) \left(1 + \frac{\mu^2}{\gamma^2} \ln^2 \frac{1}{\xi\xi'} \right)} \right) \\ & \left. + \frac{1-2\alpha}{(\xi\xi')^\alpha} \left[\frac{\cos \sqrt{\frac{r^2 - \alpha(1-\alpha)\gamma^2}{\mu^2}}}{\sqrt{r^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)\gamma^2}{\mu^2}}} - \frac{\mu}{2\gamma} \int_{\ln \xi\xi'}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}-\alpha)a} J_0(a, r, t) da \right] \right] \quad (6)_2 \end{aligned}$$

其中 J_0 是零阶贝塞尔函数. 除余弦函数一项的宗量不含垂直坐标, 代表表面波外, 其它三项都是重力-惯性内波, 波动能量随时间向全空间弥散, 最终强度趋于零, 达成“地转适应”状态.

三、运动向下垫面温度场的适应

如果下边界给定的不是热流入量, 而是一个固定温度场 $-A/R$, 则需解下列第二类边值问题:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) + \mu^2 \Delta \right] \phi_t = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = A|_{\xi=1}, \quad \left| \xi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi_t}{\partial \xi} \right| \rightarrow 0|_{\xi \rightarrow 0} \end{cases} \quad (7)$$

仍作分解 $\phi = \phi_s + \tilde{\phi}$. “地转模式”还可对时间积分一次, 得:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \mu^2 \Delta \right] \phi_s = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \mu^2 \Delta \right] \phi_0 \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial \xi} = A|_{\xi=1}, \quad \left| \xi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi_s}{\partial \xi} \right| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (7)_1$$

这相当于用位势涡度守恒定理由初态 ϕ_0 决定过程终态 ϕ_s . 文献[5]已给出 $(7)_1$ 的 Green 函数表达式

$$G_0 = \frac{1}{2\sqrt{\xi\xi'}} \left[\sigma_{(r, \ln \frac{\xi}{\xi'})} + \sigma_{(r, \ln \frac{1}{\xi\xi'})} \right] - E_1 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + \ln \frac{1}{\xi\xi'}} - \ln \frac{1}{\xi\xi'} \right)$$

其中函数 $E_1(-\xi) = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ 在 $\xi \rightarrow 0$ 时有对数型奇性. $(7)_1$ 的解为

$$\phi_s = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 G_0 \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \mu^2 \Delta \right] \phi_0 + \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A G_0|_{\xi'=1} dx' dy' \quad (7)_2$$

波动部份 $\tilde{\phi}$ 仍描写一纯地转适应过程:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) + \mu^2 \Delta \right] \tilde{\phi}_t = 0, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}_t}{\partial \zeta} = 0|_{\zeta=1}, \quad \left| \zeta^2 \frac{\partial \tilde{\phi}_t}{\partial \zeta} \right| \rightarrow 0|_{\zeta \rightarrow 0} \\ (\tilde{\phi})_0 = \phi_0 - \phi_{g0} = 0, \quad (\tilde{\phi}_t)_0 = (\phi_t)_0, \quad (\tilde{\phi}_{tt})_0 = (\phi_{tt})_0; \end{cases} \quad (7),$$

此问题与定解问题(6)完全一样,仅 $\alpha = 0$, 即滤去了表面波. $\tilde{\phi}_t$ 求出后,按文献[4]的研究

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tilde{\phi}_t dt = \bar{\phi} < \infty$$

并且结果趋于地转,因此

$$\phi = \phi_g + \int_0^t \tilde{\phi}_t dt$$

在 $t \rightarrow \infty$ 时趋向于常定的地转场 ($\phi_g + \bar{\phi}$). 即在大气内部没有热源时,运动向下边界温度场适应的终态唯一地由地表温度场及初始扰动特性决定.

四、特殊定解条件的解

为了明晰起见,我们再在简单的边界条件及特殊的初始条件下讨论运动向常定外源及下垫面温度场适应的过程. 由于适应结果主要取决于外源分布和边界条件,所以选择特殊的初条件并不会从本质上影响我们对运动向“外源”适应的了解. 特殊的初条件只是为了求解方便. 其实,若具有任意初始场,则因主要发展部份仍为地转风,故特殊初条件并不影响所得结论.

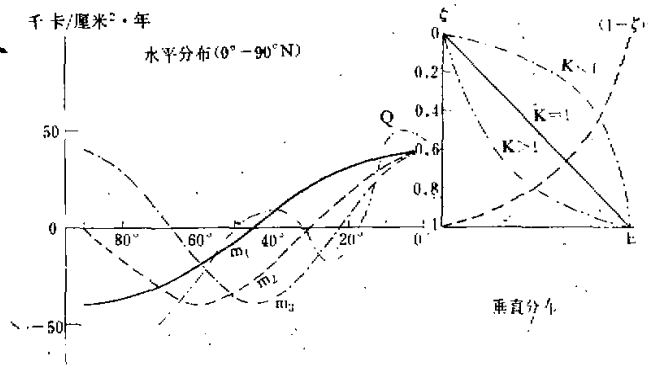


图2 北半球热源的水平分布, $A = -E\zeta^K \cos my$, m_1, m_2, m_3 是单波理想热源, Q 是实际热源年平均分布

1. 首先讨论只有下边界热流入量的情况,热源分布呈谐波状(见图二),所得方程为:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) + C^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \phi_t = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) \phi_t|_{\zeta=1} = -E \cos my \\ (\phi_t)_0 = (H\zeta^{M_\alpha} - F\zeta^{M_\beta}) \cos my; \quad \phi_0, (\phi_{tt})_0 = 0; \end{cases} \quad (8)$$

其中 $M = \sqrt{\frac{1}{4} + n^2} - \frac{1}{2} > 0$; $M_\alpha = \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha(\alpha - 1)} - \frac{1}{2} < 0$; $n = Cm$, E 是加热强度, H, F 是初扰决定的常数, 取 $F = \frac{E}{M + \alpha}$.

令 $\phi_t = (\phi_s)_t + \tilde{\phi}_t = (\chi_s + \chi) \cos my$

其中, “准地转”发展部份满足

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{d\zeta} \zeta^2 \frac{d}{d\zeta} - n^2 \right) \chi_s = 0 \\ \left(\frac{d}{d\zeta} + \alpha \right) \chi_s|_{\zeta=1} = -E \end{cases} \quad (8)_1$$

令 $\zeta = e^{-\xi}$, $\chi_s = \bar{\chi}_s e^{\frac{\xi}{2}}$, 则 $\bar{\chi}_s$ 满足的方程是

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \left(\frac{1}{4} + n^2 \right) \right] \bar{\chi}_s = 0$$

它在条件(3)下的正则解是 $\chi_s = -\frac{E}{M + \alpha} \zeta^M$.

这表明, 下垫面热源引起整层一致但向上衰减的扰动. 热源尺度越大 (m, n 越小), 扰动越强, 且向上衰减越慢. 由下垫面决定的大尺度热源热汇将造成强大而深厚的热低压和冷高压, 尺度较小的热源热汇则造成浅薄、弱小的热低压及冷高压(图3). 如果有不止一个的热源波 $E \cos my$. 则也可合成上、下层反位相结果.

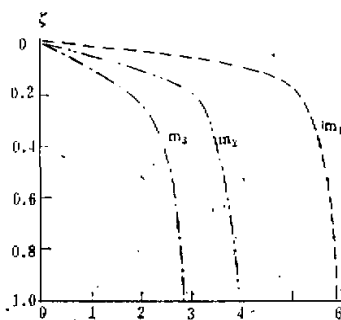


图3 地面热源引起的扰动
“准地转”发展率的垂直分布

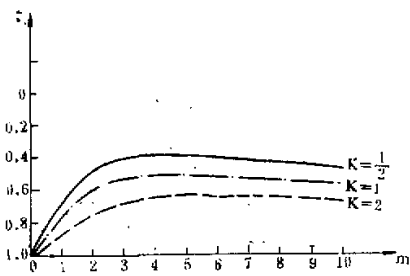


图4 反转层高度 $\xi\kappa$ 随热源尺度的变化 ($\mu = 0.2$, $\gamma = 5$ 度/公里)

波动部分 χ 由下列定解问题决定:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) - n^2 \right] \chi = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) \chi|_{\zeta=1} = 0 \\ \chi_0 = H \zeta^{M_\alpha}, (\chi_t)_0 = 0 \end{cases} \quad (8)_2$$

用分离变量法求解. 令 $\chi = T_* Z$, 得本征方程:

$$\begin{cases} T''_* + (f^2 - \lambda) T_* = 0 \\ \left(\frac{d}{d\zeta} \zeta^2 \frac{d}{d\zeta} - \frac{n^2}{\lambda} \right) Z = 0 \end{cases}$$

利用边界条件和初始条件定出本征值 λ 和频率 ω .

$$\lambda = \frac{n^2}{\alpha(\alpha-1)}; \quad \omega = \sqrt{f^2 - \lambda} = \sqrt{f^2 + \frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)}};$$

在 α 通常的取值范围内 ($0 < \alpha < 1$)、本征值 λ 为负.

$$\chi = H\zeta^{M_\alpha} \cos \omega t.$$

合并(8)₁及(8)₂,并写出相应的风场、温度场(初值不妨取作零). Q 、 D 分别表示涡度及散度. 若令 $A_1 = \frac{E}{M+\alpha} \zeta^M$, $B = H\zeta^{M_\alpha}$, 则

$$\begin{cases} \phi = \left(-A_1 t + \frac{B}{\omega} \sin \omega t \right) \cos my \\ T = \left(\frac{M}{R} A_1 t - \frac{M_\alpha}{\omega R} B \sin \omega t \right) \cos my \\ v = \left[\frac{A_1}{f^2} (\cos ft - 1) - \frac{B}{\omega^2 - f^2} (\cos \omega t - \cos ft) \right] m \sin my = V_{(t)} \sin my \\ u = \left[\frac{A_1}{f^2} \left(\frac{\sin ft}{f} - t \right) - \frac{B}{\omega^2 - f^2} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{\sin ft}{f} \right) \right] mf \sin my = U_{(t)} \sin my \\ Q = -m U_{(t)} \cos my \\ D = m V_{(t)} \cos my \\ \tau = -\frac{\zeta}{C^2} [-M A_1 + B M_\alpha \cos \omega t] \cos my \end{cases} \quad (8),$$

由于加热场在垂直方向不连续,故 τ 在 $\zeta = 1$ 处发生间断.

$$\tau|_{\zeta=1} = \frac{1}{C^2} \left[-E \left(1 - \frac{M}{M+\alpha} \right) - \frac{M_\alpha H}{\omega} \sin \omega t \right] \cos my.$$

于是,除 $\zeta = 1$ 是受热上升外,空间因无热源,均为辐合下沉增温,下边界处则由 τ 的不连续引起辐散,这种不连续在自然界中是不存在的,下面将给出连续分布的热源引起的环流,其结构就更逼近实况了.(8)₃所给出的解形可帮助我们分析常定热源产生的运动:

1) 由热源引起的 ϕ , T , u , Q 场的发展满足“准地转关系”,相应的 D , τ , v 场有一常定部分与之配合,“准地转”部分随时间增长成为解的主要部分,其结构为升温降压区与气旋性辐合环流相配合.

2) 在这种单波情形下,风场有纯惯性振动,不过在全空间积分形式的解中,纯惯性振动将会消失^[3].

3) 频率为 ω 的重力惯性波动. 当 $0 < \alpha < 1$ 时, ω 为实数,得到稳定波; $\alpha < 0$ 时,波长 $L < \frac{2\pi L_0}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}$ 的波出现不稳定增长; $\alpha \rightarrow 0$ 时,波动部分消失,这时 $\omega \rightarrow \infty$, 振幅

$\alpha \frac{1}{\omega} \rightarrow 0$. 解的结构还说明,大尺度热源的本征频率 ω 小,激发的波动周期长,振动强,小尺度热源激发的波动周期短,振动弱. 在空间范围有限的热源情况下,由(二)的讨论可

知,这些波动强度最终将会趋于零.

为了避免下边界处解的间断,我们讨论更真实一些的空间连续分布的热源函数.由于垂直方向任意分布的热源均可按 Taylor 级数在 ζ 等于 0—1 的区间上展开,故我们只看 $A = -E\zeta^K \cos my$ 型的分布.此外,由前面的讨论知道常定热源激发的重力波是衰减的,故系统的垂直结构向常定外源分布适应的结果主要由解的主要部份即准地转部份决定.下面我们仅用“准地转模式”讨论.类似于(8),式有:

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{d\zeta} \zeta^2 \frac{d}{d\zeta} - n^2 \right] \chi_s = -KE\zeta^{K-1} \\ \left(\frac{d}{d\zeta} + \alpha \right) \chi_s|_{\zeta=1} = -E \end{cases} \quad (9)$$

令 $\chi_s = C_1\zeta^M + C_2\zeta^{K-1}$, 其中 $M = \sqrt{\frac{1}{4} + n^2} - \frac{1}{2} > 0$, $C_1\zeta^M$ 是齐次方程通解, $C_2\zeta^{K-1}$ 是非齐次方程特解,由方程及边界条件定出

$$C_1 = -\frac{E + (K-1+\alpha)C_2}{M+\alpha}; \quad C_2 = -\frac{KE}{K^2 - K - n^2};$$

$$\therefore \chi_s = \frac{E}{K^2 - K - n^2} \left(\frac{n^2 + \alpha K}{M + \alpha} \zeta^M - K\zeta^{K-1} \right) \quad (9)_1$$

由(9)₁式可以定出高低空气压场的反转高度 ζ_K

$$\zeta_K^{M-K+1} = K \frac{M+\alpha}{n^2 + \alpha K} \quad (9)_2$$

在反转高度 ζ_K 上,除气压场外,风场也发生相应的反转. ζ_K 在 $n \rightarrow \infty$ 及 $M - K + 1 = 0$ 处不确定,一般分布见图四.

垂直速度决定于加热和变温的大小,在 $K=1$, $A = -E\zeta \cos my$ 时,由热力学方程得

$$C^2 \tau_s = E\zeta \left(-1 + \frac{M(n^2 + \alpha)}{n^2(M + \alpha)} \zeta^M \right) \cos my \quad (9)_3$$

由于对任何 n 有 $n^2 > M$, 故 τ_s 与 $-E$ 同界,即加热区 ($E > 0$) 整层上升,冷却区整层下沉.故在大气内部有热源时,每一对热源、热汇均可构成一个闭合的垂直环流,在上升区是低空热低压转高空热高压,在下沉区是高空冷低压转低层冷高压,反转层高度 ζ_K 由(9)₂式确定,它依赖于热源的垂直分布(K)、水平尺度及层结稳定度.配合图二、四可知, K 越大,热源切变最大值集中在低层,反转高度低; K 越小,反转层越高.最大反转高度出现在 $m=3-5$ 之间, (相当于热源尺度为 $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times 2\pi L_0$, L_0 取为 1000 公里) $m=0-3$ 时,反转层抬升最迅速,此后变化平缓.

以上的讨论说明,不论是分析通解或是求出特解,自由大气在常定热源或外部温度场持续作用下,都有地转适应过程.证明了稳定层结大气中重力波的稳定性.以固定速率加入大气这部“热机”中的热能大部分转变为基本场位能和基本场动能,波动场不能持续地从外部取得能量,因而在整个运动场中只占很小部分,这说明研究大尺度长期过程时,“准地转模式”可能仍有相当效力.

五、摩擦和热源共同作用下的适应过程

(8), 式得出准地转的无限发展过程。这是由于只描写了热能转变为机械能的过程而没有描写机械能的耗散。大气湍流起着能量耗散的作用, 只需引入很小的湍流交换系数, 其结果也将从根本上抑制大气动能的无限增加, 最后, 在常定热源和摩擦的共同作用下, 达到能量平衡。特别是在湍流系数很小时, 平衡关系非常接近于地转风关系。为了减少系统垂直结构的复杂性, 下面只讨论热源和垂直方向摩擦集中于下边界以及大气内部只有动量水平湍流的情况。

在方程(1)、(2)中去掉热源, 不考虑热传导, 若在初条件 $\phi_0 = 0$, $(\phi_t)_0 = 0$, $(\phi_{tt})_0 = 0$ 下对方程积分一次, 则问题的数学模型可简化为:

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nu \Delta \right)^2 + 1 \right] + \mu^2 \Delta \right\} \phi = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tilde{K} \Delta \right) \phi = A_0 |_{\zeta=1} \\ \left| \zeta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi_t}{\partial \zeta} \right| \rightarrow 0 |_{\zeta \rightarrow 0} \text{ (以下书写从略)} \\ \phi_0 = (\phi_t)_0 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

仍只考虑 A_0 为一维无穷空间的常定单波热源, 令 $A_0 = -E \cos my$, $\phi = X \cos my$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $n^2 = \mu^2 m^2$, $K = \nu m^2$, $h = \tilde{K} m^2$.

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + K \right)^2 + 1 \right] - n^2 \right\} X = 0 \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + K \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + h \right) \right] X |_{\zeta=1} = -E \\ X_0 = (X_t)_0 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

在有摩擦情况下, 场最终趋于定常, 记为 X_∞ , 我们先来找适应过程的终态。

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{d\zeta} \zeta^2 \frac{d}{d\zeta} - \frac{n^2}{K^2 + 1} \right] X_\infty = 0 \\ \left(K \frac{d}{d\zeta} + \alpha h \right) X_\infty = -E |_{\zeta=1} \end{cases} \quad (12)$$

其解为

$$X_\infty = -\frac{E}{M_\nu K + \alpha h} \zeta^{M_\nu}, \text{ 其中 } M_\nu = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{n^2}{K^2 + 1}} - \frac{1}{2};$$

对应的风场也可一并写出:

$$\begin{cases} \phi_\infty = -\frac{E}{M_\nu K + \alpha h} \zeta^{M_\nu} \cos my = X_\infty \cos my \\ u_\infty = \left[\frac{\nu^2 m^2 M_\nu}{\mu^2} (1 + M_\nu) + 1 \right] m X_\infty \sin my \\ v_\infty = \left[\frac{\nu m^3 M_\nu}{\mu^2} (1 + M_\nu) + 1 \right] \nu m^3 X_\infty \sin my \end{cases} \quad (12)_1$$

特别是 ν 很小时, 还可得到准地转关系

$$\begin{cases} u_{\infty} = -\frac{\partial \phi_{\infty}}{\partial y} \\ v_{\infty} = 0 \end{cases} \quad (12)_2$$

由于仅有一个单波下垫面热源, 且不包含热量的对流及湍流垂直输送, 按图二 m_1 型热源分布, 只能得出整层一致的赤道热低压、极地冷高压及相应的带偏北分量的东风。若再加上大气内部热源, 则可在反转层以上形成带偏南分量的西风。进一步, 若能用几个热源波合成近于实际的平均分布, 在低纬和中纬各形成一个热源, 则可在每一对热源热汇之间形成一个定常的经圈环流, 这已在(9)式中讨论过了。

现在来求有摩擦时的波动过程, 考察湍流对适应速率的影响。初值不妨取作零。作积分变换:

$$\bar{\chi}_{(s)} = S \int_0^{\infty} \chi(t, \xi) e^{-st} dt$$

由(11)式有:

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} - \frac{n^2}{(K+S)^2 + 1} \right] \bar{\chi} = 0 \\ \left[\frac{d}{d\xi} (S+K) + \alpha(S+h) \right] \bar{\chi}|_{\xi=1} = -E \end{cases} \quad (13)$$

解得 $\bar{\chi} = -\frac{E}{M_s(S+K)+\alpha(S+h)} \xi^{M_s}$, 其

中 $M_s = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{n^2}{(S+K)^2 + 1}} - \frac{1}{2}$; 当 t

很小时, 将 $\bar{\chi}$ 中的 M_s 和系数按 $\frac{1}{S}$ 展开取近似:

$$\bar{\chi} \approx -\frac{E}{\alpha} \frac{1}{S} e^{-2n^2 \xi / S^2} \quad \left(\text{其中 } \xi = \ln \frac{1}{\xi} \right)$$

反演得

$$\chi_{(t)} = -\frac{E}{\alpha} \frac{t'}{n\sqrt{\xi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (t')^{2m}}{m! \Gamma(2(m+1))} \quad (13)_1$$

其中 Γ 是伽玛函数, $t' = n\sqrt{\xi} t$ 。图五是(13)₁ 的图示。扰动在垂直方向有明显的内波性质, 各高度上波动的第一周期约为 $T = 9.4/n\sqrt{\xi}$, 水平尺度越大 (n 小), 高度越低,

波动周期越长, 振幅也越大。特别在 $\xi = 0$ 处, $\chi = -\frac{E}{2\alpha} t$, 即起初 ϕ 场是直线下降的, 但比(8)₁ 给出的 $\xi = 1$ 处自由大气的发展率 $\frac{-E}{M+\alpha}$ 小。由于按 $\frac{1}{S}$ 展开取一级近似, (13)₁ 中不含 K, h , 说明对零初始场, 摩擦的重要性在于积累效应。

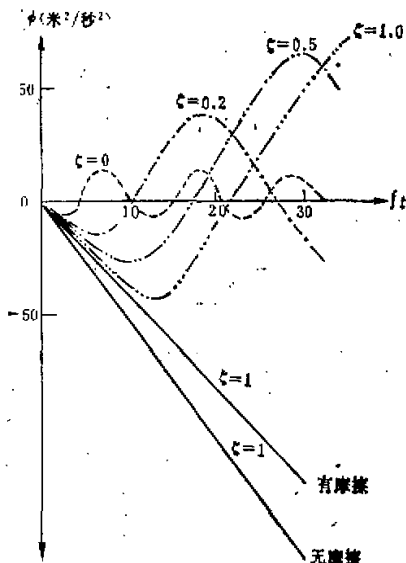


图5 下垫面热源激发的空间波动

当 t 很大时, 可选很小的 S 将 $\bar{\chi}$ 按 S 展开, 取 $M = M_0 + M_1 S$, 则

$$M_0 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{n^2}{K^2 + 1}} - \frac{1}{2}, \quad M_1 = -\frac{2n^2 K}{\sqrt{(1+K^2)(1+4n^2+K^2)}},$$

$$\bar{\chi} = \frac{-E}{(S+\beta)(M_1 K + M_0 + \alpha)} \zeta^{-2n^2/\alpha^2}$$

$$\chi = \frac{-E}{M_0 K + \alpha h} \zeta^{M_0}(1 - e^{-\beta(t-M_1 \ln \frac{1}{\zeta})}) = \chi_\infty(1 - e^{-\beta(t-M \ln \frac{1}{\zeta})}) \quad (13)_2$$

(13)₂ 表明气压场趋近于适应终态的渐近过程。参数 $\beta = \frac{M_0 K + \alpha h}{M_1 K + M_0 + \alpha}$ (在一般情况下, β 式中的 $M_0 \gg M_1$) 在调节风压场向“外源”适应的速率上起很大作用, 由于

$$\beta = \frac{M_0 K + \alpha h}{M_0 + \alpha} \alpha \frac{1}{fL^2},$$

表明尺度越大, 所需适应时间越长。由于涡流运动常常有比重力波更大的空间尺度, 故湍流的加入除减小运动速率并最终使运动趋于定常外, 还能选择性地加速短波长的重力波阻尼, 缩短适应时间, 从而加速适应过程的完成。

事实上, 时间足够长时, 波动几乎全部弥散并阻尼, 这时过程可用预先消去波动的“广义准地转模式”决定:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nu^2 \Delta + 1) + \mu^2 \Delta \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} - K_T \Delta \right) \phi = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tilde{K} \Delta \right) \phi|_{\zeta=1} = -E \cos my \\ \phi_0 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

在二维情况下, 设 $K_T, \nu, \tilde{K}$ 有相同数值。则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K_T \Delta \right) \phi = -\frac{E}{M_0 + \alpha} \zeta^{M_0} \cos my; \quad \left(\text{式中 } M_0 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{n^2}{1+K^2}} - \frac{1}{2} \right) \quad (14)_1$$

$$\text{即 } \phi = -\frac{E}{M_0 + \alpha} \zeta^{M_0} (1 - e^{-Kt}) \cos my. \quad (K = \nu m^2) \quad (14)_2$$

(14)₂ 与 (13)₂ 性质相同, 都得到平缓发展的极限过程。

本文是在曾庆存同志指导下完成的, 仅此志谢。

参 考 文 献

- [1] 奥布霍夫, 大气中的适应过程, 科学出版社, 1956.
- [2] Кибель И. А. 短期天气预报的流体力学方法引论, 科学出版社, 1959.
- [3] Мюни А. С. Изменение давления в бароклинной атмосфере. Изв. АН СССР. Серия Геофиз. №4. 1958.
- [4] 曾庆存, 斜压大气中的特征波动和地转适应过程, 大气科学, 2, 1—14, 1978.
- [5] 曾庆存, 大气中的适应过程与发展过程(一)(二), 气象学报 No. 2—3, 1963.
- [6] 曾庆存, 扰动特性对大气适应过程的影响和测风资料的使用问题, 气象学报 No. 1 1963.
- [7] 叶笃正, 朱抱真, 大气环流的若干基本问题, 科学出版社, 1958.

ON THE GEOSTROPHIC ADJUSTMENT PROCESS IN THE ATMOSPHERE IN THE PRESENCE OF HEAT SOURCES AND DISSIPATION

Zhang Ke-su

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

The geostrophic adjustment processes in the atmosphere in the presence of heat sources and dissipation are discussed.

1) The solution in integral form of Green's function of a point source in infinite space is analysed.

2) Under the condition of periodically distributed heat sources the atmospheric processes adjusted to exterior steady heat sources and surface temperature in the presence of dissipation are studied and compared with that in the absence of dissipation.

3 The solution of steady state of atmospheric circulation under the effect of heat sources and dissipation is found out.

4) The relations between vertical structure of the system and the spatial distribution of heat sources are given.