第4卷 第3期　　大 气 科 学　　Vol. 4, No. 3
1980 年 9 月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　Sept., 1980

侧向边界条件处理方式对局部地区数值天气预报误差的影响

郭 本 瑜
(上海科学技术大学)

在[1]中，已以最简单的正压模式为例，根据守恒定律构造了差分格式，并证明在一定条件下，这些格式都是可以预报的，其可预报期的长短则与格式参数、粘性系数、初始条件观测误差，计算舍入误差和大气变化剧烈程度等因素有关. 在[2]中，还分析了侧向边界形状和边值误差对非线性不稳定性的影响. 事实上，它还与边界条件类型及其处理方式有关，Platzman[3], Nitta[4], Mastuno[5] 和 Shapiro[6] 等都用计算实例证实了这一点. 以后，Shapiro 和 O'Brien[7], Williamson 和 Browning[8], Perkey 和 Kreitzberg[9] 等还提出了许多处理方式，然而都未能证明究竟在什么样条件下，可以保证计算的稳定性和收敛性.

本文应用能量法证明了下列结果：若第二类边值条件的计算误差是 $o(h^{1.5})$，则格式是广义稳定且收敛的. 若第三类边值条件的计算误差是 $o(h)$，则格式也是广义稳定且收敛的. 若边界条件是定常的，则会出现预报值趋向平稳状态的现象. 最后证明了若边界形状相当好，则可改进上述结果，即只要求第二类边值条件的计算误差是 $o(h)$.

本文全部采用[1]中的记号，并直接引用其中的结果.

一、第二类边值条件及外推边界条件

本文考虑下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\dfrac{\partial\xi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\dfrac{\partial\xi}{\partial x_2}-\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\dfrac{\partial\xi}{\partial x_j}\right)=f_1\\ \nabla^2\psi-\xi=f_2,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 ξ 是涡度，ψ 是流函数，ν 是粘性系数，不妨设为正常数，f_i 是已知函数. 在边界上满足条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\xi}{\partial n}=g_1,\\ \psi=g_0.\end{cases}\tag{1.2}$$

在[1]中定义了差分算子 $J(v,w)$，

$$\begin{aligned}J(v,w)=&\alpha_1(v_{\hat{x}_1}w_{\hat{x}_2}-v_{\hat{x}_2}w_{\hat{x}_1})+\alpha_2(vw_{\hat{x}_2})_{\hat{x}_1}-\alpha_2(vw_{\hat{x}_1})_{\hat{x}_2}\\&-\alpha_3(v_{\hat{x}_2}w)_{\hat{x}_1}+\alpha_3(v_{\hat{x}_1}w)_{\hat{x}_2},\end{aligned}$$

1978 年 6 月 24 日收到修改稿.

其中 $\alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$.

令用 $J(\eta, \varphi)$ 来逼近(1.1)中的 Jacobin 算子. 若 $\alpha_1 = \alpha_2$,则有[1]

$$(\eta, J(\eta, \varphi)) = \alpha_1 B_{R_h^*}(\eta\varphi_{\hat{s}}, \eta, 1) - \alpha_1 B_{R_h^*}(\eta, \varphi\eta_{\hat{s}}, 1), \tag{1.3}$$

它表达了守恒定律.

计算(1.1)的格式是

$$\begin{cases} L_1(\eta, \varphi) = \eta_t - J(\eta, \varphi) - \Delta^{\nu}\eta = f_1, \\ L_2(\eta, \varphi) = \Delta\varphi - \eta = f_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

边界条件(1.2)的形式逼近是

$$\begin{cases} \eta_n(Q, k) = g_1\left(\dfrac{Q + Q'}{2},\ k\right), & Q \in R_h^*, \\ \varphi(Q, k) = g_0(Q, k), & Q \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{1.5}$$

用 $\tilde{g}_i, \tilde{f}_i, \tilde{\eta}, \tilde{\varphi}$ 表示 g_i, f_i, η, φ 的计算误差,为方便计,不妨设 $\tilde{g}_0 \equiv 0$. h 和 τ 分别是空间和时间方向的步长,$\lambda = \tau h^{-2}$. 又记

$$\|\tilde{\eta}(k)\|^2_{0\oplus\nu} = \|\tilde{\eta}(k)\|^2 + \tau \sum_{j=0}^{k-1} \|\tilde{\eta}(j)\|^2_{1\nu},$$

$$Q(\tilde{\eta}(k)) = \|\tilde{\eta}(k)\|^2_{0\oplus\nu} + \tau^2 \sum_{j=0}^{k-1} \|\tilde{\eta}_t(j)\|^2,$$

$$\rho(\tilde{\eta}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{g}, k) = \|\tilde{\eta}(0)\|^2 + \tau \sum_{j=0}^{k} (\|\tilde{f}_1(j)\|^2 + \|\tilde{f}_2(j)\|^2 + \|\tilde{g}(j)\|^2_{\Gamma_h}).$$

定理 1 若在格式(1.4)(1.5)中,$\lambda < \dfrac{1}{4\nu}$, 那末,当 $\|\tilde{f}_2\|^2 \leqslant Nh^2$, $\rho(\tilde{\eta}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, h^{-0.5}\tilde{g}_1, k) \leqslant Nh^2$ 时,对一切 $k\tau \leqslant T \leqslant T_0(\rho)$ 者, $Q(\tilde{\eta}(k)) \leqslant Me^{LT} \cdot \rho$. 如果当 $h \to 0$ 时, $\rho = 0(h^2)$, 则 T_0 任意.

证明 由[1]中的(4.3)式,误差满足关系式

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\eta}\|_t^2 + (m-1)\tau\|\tilde{\eta}_t\|^2 + 2\|\tilde{\eta}\|^2_{1\nu} + \frac{m\tau}{2}(\|\tilde{\eta}\|^2_{1\nu})_t \\ &- \frac{m\tau^2}{2}\|\tilde{\eta}_t\|^2_{1\nu} - 2B_{R_h^*}(\nu, \tilde{\eta}, \tilde{\eta}_n) - m\tau B_{R_h^*}(\nu, \tilde{\eta}_t, \tilde{\eta}_n) \\ &= \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \tilde{E}_3, \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中 $\tilde{E}_1 = (2\tilde{\eta} + m\tau\tilde{\eta}_t, J(\eta, \tilde{\varphi}) + \tilde{f}_1)$,

$\tilde{E}_2 = (2\tilde{\eta} + m\tau\tilde{\eta}_t, J(\tilde{\eta}, \varphi))$,

$\tilde{E}_3 = (2\tilde{\eta} + m\tau\tilde{\eta}_t, J(\tilde{\eta}, \tilde{\varphi}))$.

由于 $2B_{R_h^*}(\nu, u, v_n) = 2\nu h \sum_{R_h^*} uv_n + \nu h^2 \sum_{R_h^*} u_n v_n$,

因此

$$\begin{aligned} |2B_{R_h^*}(\nu, u, v_n)| &\leqslant \sum_{R_h^*} h^2u^2 + \left(\frac{\nu^2}{h} + \frac{\nu h}{2}\right)\sum_{R_h^*} hV_n^2 + \frac{\nu h^2}{2}\sum_{R_h^*} u_n^2 \\ &\leqslant M_1[\|u\|^2 + (h^{-1} + h)\|V_n\|^2_{\Gamma_h} + h\|u_n\|^2_{\Gamma_h}], \end{aligned}$$

从而得到

$$|2B_{R_h^*}(\nu, \tilde{\eta}, \tilde{\eta}_n)| \leqslant M_2[\|\tilde{\eta}\|^2 + h^{-1}\|\tilde{g}_1\|_{\Gamma_h}^2], \tag{1.7}$$

$$|m\tau B_{R_h^*}(\nu, \tilde{\eta}_t, \tilde{\eta}_n)| \leqslant \tau^2\|\tilde{\eta}_t\|^2 + M_4 h^{-1}[\|\tilde{g}_1\|_{\Gamma_h}^2 + \tau^2\|\tilde{g}_{1t}\|_{\Gamma_h}^2], \tag{1.8}$$

又由[1]中的(4.8)，(4.12)和(4.15)式，得到

$$|\tilde{E}_1| \leqslant M_5[\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_1\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2], \tag{1.9}$$

$$|\tilde{E}_2| \leqslant \frac{a\tau}{2}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \varepsilon\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 + M_6\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\|\tilde{\eta}\|^2, \tag{1.10}$$

$$|\tilde{E}_3| \leqslant \frac{a\tau}{2}\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \varepsilon\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 + M_7 h^{-2}\|\tilde{\eta}\|^2(\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2). \tag{1.11}$$

把(1.7)—(1.11)代入(1.6)，即得到

$$\begin{aligned}\|\tilde{\eta}\|_t^2 &+ (2-2\varepsilon)\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2 + \frac{tm}{2}(\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2)_t - \frac{m\tau^2}{2}\|\tilde{\eta}_t\|_{1\nu}^2 \\ &+ (m-1-\tau-a)\tau\|\tilde{\eta}_t\|^2 \leqslant \tilde{R}(\tilde{\eta}) = M_8\{\|\tilde{\eta}\|^2 + \|\tilde{\eta}\|^2 \\ &+ h^{-2}\|\tilde{\eta}\|^4 + h^{-2}\|\tilde{\eta}\|^2\|\tilde{f}_2\|^2 + \|\tilde{f}_1\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2 \\ &+ h^{-1}\|\tilde{g}_1\|_{\Gamma_h}^2 + \tau h\|\tilde{g}_{1t}\|_{\Gamma_h}^2\},\end{aligned} \tag{1.12}$$

让 ε, a 和 τ 适当小，并用 τ 乘(1.14)式，再对 $j = 0, 1, \cdots, k-1$ 求和，又略去和式中的某些项，使不等式仍然成立，从而得

$$\begin{aligned}\|\tilde{\eta}\|_{0\oplus\nu}^2 &+ (m-2-a)\tau^2\sum_{j=0}^{k-1}\|\tilde{\eta}_t(j)\|^2 - \frac{m\tau^3}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\|\tilde{\eta}_t(j)\|_{1\nu}^2 \\ &\leqslant \tau\sum_{j=0}^{k-1}\tilde{R}(\tilde{\eta}(j)) + \tilde{R}(0),\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中 $\tilde{R}(0) = o(\|\tilde{\eta}(0)\|^2)$.

最后取 $m > (a+2)(1-4\lambda\nu)^{-1}$，由于 $\tau\|\tilde{\eta}_t\|_{1\nu}^2 \leqslant q\nu\lambda\|\tilde{\eta}_t\|^2 + \nu\tau h^{-1}\|\tilde{g}_{1t}\|_{\Gamma_h}^2$，因此(1.15)式左端第二、三两项的和不小于

$$a_0\tau^2\sum_{i=0}^{k-1}\|\tilde{\eta}_t(j)\|^2 - \tau h^{-1}\sum_{j=0}^{K}\|\tilde{g}_1(j)\|_{\Gamma_h}^2\cdot\text{const}, \quad a_0 > 0,$$

从而

$$Q(\tilde{\eta}(k)) \leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\tilde{R}[\tilde{\eta}(j)] + \tilde{R}(0).$$

最后只要应用[1]中的引理 7，即在引理 7 中令 $w(k) = Q(\tilde{\eta}(k)$, $v(k) = \|\tilde{\eta}(k)\|_{1\nu}^2, n_1 = 2$, n_2 任意.

讨论 1，由定理 1，若 $\tilde{g}_1 \equiv 0$，则当 $\|\tilde{f}_2\|^2 \leqslant Nh^2$, $\rho(\tilde{\eta}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, o, k) \leqslant Nh^2$ 时，计算就稳定. 若 $\tilde{g}_1 \neq 0$，则尚要求 $h\sum_{j=0}^{k}\|\tilde{g}_1(j)\|_{\Gamma_h}^2 \leqslant Nh^2$，因此边值误差影响比较显著.

讨论 2，若把 $\tilde{f}_i$, $\tilde{g}_1$ 看作形式逼近误差，则当 $\|f_i\|^2 \geqslant o(h^2)$, $\|\tilde{g}_1\|_{\Gamma_h}^2 = o(h^3)$ 时，格式就收敛. 合适地选择 Γ_h，这种条件是可以达到的.

讨论 3，由(1.3)，参数 $\alpha_1 = \alpha_2$，不仅使格式很好地满足守恒定律，又消去了区域内部非线性误差积累，因此是优化的.

讨论 4，在数值天气预报中，还会遇到两类外推边界条件

$$\eta(Q')=\eta(Q)\quad Q\in R_h^*, \tag{1.16}$$

或

$$\eta(Q')=2\eta(Q)-\eta(Q^*),\quad Q\in R_h^*. \tag{1.17}$$

其中 Q^* 是 R_h 内法向上距 Q' 为 $2h$ 的网格点。(1.16) 和 (1.17) 的形式逼近误差分别是 $o(h)$ 和 $o(h^2)$，它们又可视为条件(1.5)，并相应地有 $\|\tilde g_1\|_{\Gamma_h}^2=o(1)$ 和 $\|\tilde g_1\|_{\Gamma_h}^2=o(h)$. 显然，定理 1 无法保证其计算的稳定性与收敛性。Platzman[3] 和 Mastuno[5] 的计算结果似乎表明：若采用外推边界条件，宜应用三层以上的内点值。

二、第三类边界条件及混合边界条件

考虑第三类边界条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\xi}{\partial n}+\xi=g_1,\\[2ex] \varphi=g_0,\end{cases} \tag{2.1}$$

其差分逼近是

$$\begin{cases}\eta_n(Q,k)+\dfrac{1}{2}\,[\eta(Q,k)+\eta(Q',k)]=g_1\left(\dfrac{Q+Q'}{2},k\right), & Q\in R_h^*,\\[2ex] \varphi(Q')=g_0(Q'), & Q'\in\Gamma_h.\end{cases} \tag{2.2}$$

仍设 $\tilde g_0\equiv 0$

定理 2，设格式(1.4)(2.2) 中，$\lambda<\dfrac{1}{4\nu}$，那末，当 $\|\tilde f_2\|^2\leqslant Nh^2$，$\rho(\tilde\eta,\tilde f_1,\tilde f_2,\tilde g_1,k)\leqslant Nh^2$ 时，对一切 $k\tau\leqslant T\leqslant T_0(\rho)$ 者，$Q(\tilde\eta(k))\leqslant Me^{LT}\rho$，若当 $h\to 0$ 时，$\rho=o(h^2)$，则 T_0 任意。

证明 (1-6)仍然成立。由(2.2)

$$\tilde\eta_n=-\frac{1}{2}(\tilde\eta+\tilde\eta')+\tilde g_1, \tag{2.3}$$

因此

$$-2B_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta,\tilde\eta_n)=\frac{\nu}{2}\sum_{R_h^*}h(\tilde\eta+\tilde\eta')^2-\nu\sum_{R_h^*}h(\tilde\eta+\tilde\eta')\tilde g_1, \tag{2.4}$$

由于

$$\left|\sum_{R_h^*}h(\tilde\eta+\tilde\eta')\tilde g_1\right|\leqslant\frac{\varepsilon\nu}{2}\sum_{R_h^*}h(\tilde\eta+\tilde\eta')^2+\frac{1}{2\varepsilon\nu}\sum_{R_h^*}h\tilde g_1^2,$$

因此

$$-2B_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta,\tilde\eta_n)\geqslant\frac{\nu}{2}(1-\varepsilon)\sum_{R_h^*}h(\tilde\eta+\tilde\eta')^2-M_5\|\tilde g_1\|_{\Gamma_h}^2, \tag{2.5}$$

又由(2.3)式得到

$$-\tau mB_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta_t,\tilde\eta_n)=\frac{\tau m\nu}{4}\sum_{R_h^*}h(\tilde\eta_t+\tilde\eta_t')(\tilde\eta+\tilde\eta')-\frac{\tau m\nu}{2}\sum_{R_h^*}h(\tilde\eta_t+\tilde\eta_t')\tilde g_1,$$

可以证明

$$\sum_{R_h^*}[(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')^2]_t=2\sum_{R_h^*}(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')_t+\tau\nu\sum_{R_h^*}(\tilde{\eta}_t+\tilde{\eta}_t')^2$$

$$\left|\frac{\tau m\nu}{2}\sum_{R_h^*}h(\tilde{\eta}_t+\tilde{\eta}_t')\tilde{g}_1\right|\leqslant\frac{m\nu\tau^2\varepsilon}{8}\sum_{R_h^*}h(\tilde{\eta}_t+\tilde{\eta}_t')^2+\frac{M_{10}}{\varepsilon}\|\tilde{g}_1\|_{\Gamma_h}^2,$$

因此

$$-\tau mB_{R_h^*}(\nu,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_n)\geqslant\frac{\tau m\nu}{8}\Big[\sum_{R_h^*}h(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')^2\Big]_t$$

$$-\frac{\tau^2m\nu}{8}(1+\varepsilon)\sum_{R_h^*}h(\tilde{\eta}_t+\tilde{\eta}_t')^2-M_{11}\|\tilde{g}_1\|_{\Gamma_h}^2 \tag{2.6}$$

把(1.9)—(1.11)和(2.5)—(2.6)代入(1.6)，即得到

$$\|\tilde{\eta}\|_t^2+2(1-\varepsilon)\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2+\frac{m\tau}{2}(\|\tilde{\eta}\|_{1\nu}^2)_t-\frac{m\tau^2}{2}\|\tilde{\eta}_t\|_{1\nu}^2+(m-1-a)\tau\|\tilde{\eta}_t\|^2$$

$$+\frac{m\nu\tau h}{8}\Big[\sum_{R_h^*}(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')^2\Big]_t-\frac{m\nu\tau^2h}{8}(1+\varepsilon)\sum_{R_h^*}(\tilde{\eta}_t+\tilde{\eta}_t')^2+\frac{\nu h}{2}(1-\varepsilon)\sum_{R_h^*}(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')^2$$

$$\leqslant M_{15}[\|\tilde{\eta}\|^2+\|\tilde{\eta}\|^2+h^{-2}\|\tilde{\eta}\|^4+h^{-2}\|\tilde{f}_2\|^2\|\tilde{\eta}\|^2+\|\tilde{g}_1\|_{\Gamma_h}^2+\tau^2\|\tilde{g}_{1t}\|_{\Gamma_h}^2, \tag{2.7}$$

余下的证明与定理 1 相类似.

讨论，由定理 2，若 $\|\tilde{f}_2\|^2\leqslant Nh^2$，$\rho\leqslant Nh^2$，则计算就稳定. 若把 $\tilde{f}_i$，$\tilde{g}_i$ 看作形式逼近误差，则当 $\|\tilde{f}_i\|^2=o(h^2)$，$\|\tilde{g}_1\|_{\Gamma_h}^2=o(h^2)$ 时，格式就是收敛的.

三、定常边值条件

若边界条件是定常的，则预报值可能向平衡态过渡，本节来证明这一点. 为方便计，不妨设求解区域 R 是长方形，边界条件是 $\xi=\psi=0$. 又考虑与(1.1)相对应的零边值的定常流问题解 ξ^* 和 ψ^*，它满足下列方程组

$$\begin{cases}\nu\nabla^2\xi^*+\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x_2}\dfrac{\partial\xi^*}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x_1}\dfrac{\partial\xi^*}{\partial x_2}=-f_1,\\ \nabla^2\psi^*-\xi^*=f_2.\end{cases} \tag{3.1}$$

仿照[10]中采用的方法，作者已证明在很弱的条件下，(1.1)和(3.1)都存在广义解. 若 ν 适当大，都具有唯一解. 为了书写方便，本节采用下列记号

$$(\xi_1,\xi_2)=\iint_R\xi_1\xi_2dx_1dx_2,\ \ \|\xi\|^2=(\xi,\xi),$$

$$\|\xi\|_1^2=\sum_{j=1}^2\left\|\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\right\|^2,\quad \|\xi\|_2^2=\sum_{j=1}^2\left\|\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\right\|_1^2,$$

$$\|\xi\|_{w_2^1}^2=\|\xi\|_1^2+\|\xi\|^2.$$

又记 $m_0^*=\sup\limits_{\xi\in M^{(2)}}\|\xi\|^2/\|\xi\|_1^2$，其中 $M^{(2)}$ 是有限支集，无限次光滑函数在范数 $\|\xi\|_{w_2^1}^2$ 意义下的闭包.

在(3.1)第一式的两边乘以 ξ^*,并求积分,由边值条件得

$$\nu\|\xi^*\|_1^2=(\xi^*, f_1),$$

由 Schwarz 不等式

$$\nu\|\xi^*\|_1^2\leqslant\|\xi^*\|\|f_1\|\leqslant m_0^{*\frac{1}{2}}\|\xi^*\|_1\|f_1\|,$$

从而

$$\|\xi^*\|_1\leqslant m_0^{*\frac{1}{2}}\nu^{-1}\|f_1\|,\quad \|\xi^*\|\leqslant m_0^*\nu^{-1}\|f_1\|$$

以及

$$\|\xi^*\|\|\xi^*\|_1\leqslant m_0^{*\frac{3}{2}}\nu^{-2}\|f_1\|^2. \tag{3.2}$$

下面来估计 $\tilde{\xi}=\xi-\xi^*$, $\tilde{\psi}=\psi-\psi^*$, 为此需要应用下面引理.

引理 1　若 ξ_1 和 ξ_2 分别在 x_i 和 x_j 方向的边界上为零, $i\neq j$, ξ_k 无限次光滑, 那末

$$\|\xi_1\xi_2\|^2\leqslant 2\|\xi_1\|\|\xi_1\|_1\|\xi_2\|\|\xi_2\|_1.$$

证明　不妨设 $i=1$, $j=2$, 则有

$$\xi_1^2(x_1, x_2)=2\int_{x_1'}^{x_1}\xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}dx_1$$

其中点 $(x_1', x_2)\in\Gamma$, 点 $(x_1'', x_2)\in\Gamma$, $x_1'\leqslant x_1''$,

从而

$$\max_{x_1}\xi_1^2(x_1, x_2)\leqslant 2\int_{x_1'}^{x_1''}|\xi_1|\left|\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right|dx_1,$$

类似地有

$$\max_{x_2}\xi_2^2(x_1, x_2)\leqslant 2\int_{x_2'}^{x_2''}|\xi_2|\left|\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right|dx_2,$$

由 Cauchy 公式

$$\begin{aligned}\iint_R\xi_1^2\xi_2^2dx_1dx_2&\leqslant\int_{x_2'}^{x_2''}\max_{x_1}\xi_1^2dx_2\int_{x_1'}^{x_1''}\max_{x_2}\xi_2^2dx_1\\&\leqslant 4\iint_R|\xi_1|\left|\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right|dx_1dx_2\iint_R|\xi_2|\left|\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right|dx_1dx_2\\&\leqslant 4\sqrt{\iint_R\xi_1^2dx_1dx_2\iint_R\xi_2^2dx_1dx_2\iint_R\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right)^2dx_1dx_2\iint_R\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right)^2dx_1dx_2}.\end{aligned}$$

引理 2[10] 若在边界 Γ 上, $\xi=0$, 那末

$$\|\xi\|_1^2\leqslant\|\nabla^2\xi\|^2.$$

定理 3　若广义雷诺尔数 $R^*=\dfrac{2\sqrt{2}}{\nu^2}m_0^{*\frac{3}{2}}\|f_1\|<1$, 则当 $t\to\infty$ 时, $\|\tilde{\xi}(t)\|^2\leqslant e^{-\alpha t}\|\tilde{\xi}(0)\|^2\to 0$, 其中 $\alpha=\dfrac{2\nu}{m_0^*}(1-R^*)$.

证明　$\tilde{\xi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{\xi}}{\partial t}-\dfrac{\partial(\psi^*+\tilde{\psi})}{\partial x_2}\dfrac{\partial\tilde{\xi}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial(\psi^*+\tilde{\psi})}{\partial x_1}\dfrac{\partial\tilde{\xi}}{\partial x_2}-\nu\nabla^2\tilde{\xi}=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\xi^*\dfrac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_2}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\xi^*\dfrac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_1}\right),\\ \Delta^2\tilde{\psi}-\tilde{\xi}=0.\end{cases}\tag{3.3}$$

用 $2\tilde{\xi}$ 乘(3.3)中的第一式,并求内积,又对右端进行分部积分,从而由边界条件得到

$$\frac{d}{dt}\|\xi\|^2 + 2\nu\|\xi\|_1^2 = A = 2\iint_R \xi^*\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2.$$

由 Schwarz 不等式,引理 1 和(3.2)

$$|A| \leqslant 2\|\xi\|_1\left(\left\|\xi^*\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\xi^*\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_2}\right\|\right) \leqslant 4\sqrt{2}\,\|\xi\|_1\|\xi^*\|^{\frac{1}{2}}\|\xi^*\|_1^{\frac{1}{2}}\|\tilde{\Phi}\|_1^{\frac{1}{2}}\|\tilde{\Phi}\|_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{4\sqrt{2}\,m_0^*}{\nu}\|f_1\|\|\xi\|_1\|\tilde{\Phi}\|_2,$$

又由引理 2 及(3.3)的第二式,

$$\|\tilde{\Phi}\|_2^2 \leqslant \|\nabla^2\tilde{\Phi}\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \leqslant m_0^*\|\xi\|_1^2,$$

因此

$$|A| \leqslant \frac{4\sqrt{2}\,m_0^{*\frac{3}{2}}}{\nu}\|f_1\|\|\xi\|_1^2,$$

$$\frac{d}{dt}\|\xi\|^2 + \frac{2\nu}{m_0^*}(1 - R^*)\|\xi\|^2 \leqslant 0,$$

从而

$$\|\xi(t)\|^2 \leqslant e^{-\alpha t}\|\xi(0)\|^2.$$

根据定理 3，若边界条件是定常的，空间滤波系数又足够大，那末预报值可能会迅速地趋于平衡状态,即当 $h \to 0$ 时，$\eta(k) \to \xi(k\tau)$，又当 $k\tau \to \infty$ 时，$\xi(k\tau) \to \xi^*$.

为了克服上述现象,宜采用[9]中的方法处理边界值,或者采用下列边界条件

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + a\frac{\partial \xi}{\partial n} + b\xi = g_1.$$

四、边界形状对稳定性的影响

假设边界形状相当正规，不妨设为凸四边形．今考察 Γ_{2m} 上的一点，其 x_1 方向的坐标值是 ih，x_2 方向上的坐标值是 $hj_{\min(i)}$．在 Γ_{2M} 上具有这同一个 x_1 坐标值的网格点，则具有 x_2 方向上的坐标值 $hj_{\max(i)}$．$L_{(i)} = h(j_{\max(i)} - j_{\min(i)})$．为方便计，不妨记 $j_{\min}(i) = 0$，$u_{ij} = u(ih, jh)$．于是

$$u_{i0}^2 = u_{ij}^2 - h\sum_{m=0}^{j-1}(u_{im} + u_{im+1})u_{x_2im}$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{h}{2\varepsilon}\right)u_{ij}^2 + \frac{h}{2\varepsilon}u_{i0}^2 + \varepsilon h\sum_{m=0}^{j-1}u_{x_2im}^2 + \frac{h}{\varepsilon}\sum_{m=1}^{j-1}u_{im}^2,$$

从而

$$u_{i0}^2\left(1 - \frac{h}{2\varepsilon}\right) \leqslant \left(1 + \frac{h}{2\varepsilon}\right)u_{ij}^2 + \varepsilon h\sum_{m=0}^{L(i)-1}u_{x_2im}^2 + \frac{h}{\varepsilon}\sum_{m=1}^{L(i)-1}u_{im}^2,$$

对 j 求和即得到

$$u_{i0}^2\left(1 - \frac{h}{2\varepsilon}\right)L(i) \leqslant \left(1 + \frac{h}{2\varepsilon} + \frac{L(i)}{\varepsilon}\right)\sum_{m=1}^{L(i)-1}hu_{im}^2 + \varepsilon L(i)h\sum_{m=0}^{L(i)-1}u_{x_2im}^2,$$

对 Γ_{2m} 上的一切 i 求和,即得到

$$h\sum_{i\in\Gamma_{1m}}u_{i0}^2\left(1-\frac{h}{2\varepsilon}\right)L(i)\leqslant\left(1+\frac{h}{2\varepsilon}+\frac{L(i)}{\varepsilon}\right)\|u\|^2+L(i)\varepsilon\|u_{x_2}\|^2,$$

让 ε 适当小，$h<2\varepsilon$，且设对一切 h，$\dfrac{\max L(i)}{\min L(i)}\leqslant \text{const}<\infty$，则得

$$\sum_{i\in\Gamma_{1m}}hu_{i0}^2\leqslant \text{const}\left(\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\|u\|^2+\varepsilon\|u_{x_2}\|^2\right).$$

且

$$\|u\|_{\Gamma_h}^2\leqslant \text{const}\left(\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|u\|^2+\varepsilon\|u\|_1^2\right). \tag{4.1}$$

又

$$2B_{R_h^*}(\nu,u,v_n)+2\nu h\sum_{R_h^*}u'v_n-\nu h^2\sum_{R_h^*}u_nv_n,$$

因此由(4.1)式得到

$$|2B_{R_h^*}(\nu,u,v_n)|\leqslant M_{17}(\|u\|^2+\|v_n\|_{\Gamma_h}^2+\|u_n\|_{\Gamma_h}^2+\varepsilon\|u\|_{1\nu}^2),$$

所以可将(1.7)(1.8)两式改进为

$$|2B_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta,\tilde\eta_n)|\leqslant M_{18}(\|\tilde\eta\|^2+\varepsilon\|\tilde\eta\|_{1\nu}^2+\|\tilde g_1\|_{\Gamma_h}^2),$$

$$|m\tau B_{R_h^*}(\nu,\tilde\eta_t,\tilde\eta_n)|\leqslant M_{19}(\tau^2\|\tilde\eta_t\|^2+\varepsilon\tau^2\|\tilde\eta_t\|_{1\nu}^2+\|\tilde g_1\|_{\Gamma_h}^2+\tau^2\|\tilde g_{1t}\|_{\Gamma_h}^2,$$

并且可把(1.12)式改进为

$$Q(\tilde\eta(k))+(2-2\varepsilon-M_{18}\varepsilon)\|\tilde\eta\|_{1\nu}^2+\frac{\tau m}{2}(\|\tilde\eta\|_{1\nu}^2)_t^2-\frac{\tau^2}{2}(m+\varepsilon M_{19}).$$

$$\begin{aligned}&\|\tilde\eta_t\|_{1\nu}^2+(m-1-\tau-a-\tau M_{19})\tau\|\tilde\eta_t\|^2\\&\leqslant M_{20}\{\|\tilde\eta\|^2+\|\tilde\eta\|^2+h^{-2}\|\tilde\eta\|^4+h^{-2}\|\tilde\eta\|^2\|\tilde f_2\|^2+\|\tilde f_1\|^2+\|\tilde f_2\|^2\\&\quad+\|\tilde g_1\|_{\Gamma_h}^2+\tau^2\|\tilde g_{1t}\|_{\Gamma_h}^2\},\end{aligned}$$

到此，即可仿照定理1得到下列改进的结果：

定理 4 若在格式(1.4)(1.5)中，$\lambda<\dfrac{1}{4\nu}$，R_h 满足本节所述的条件，则当 $\|\tilde f_2\|^2\leqslant Nh^2$，$\rho(\tilde\eta,\tilde f_1,\tilde f_2,\tilde g_1,k)\leqslant Nh^2$ 时，对一切 $k\tau\leqslant T\leqslant T_0(\rho)$ 者，$\|\tilde\eta(k)\|_{\oplus\nu}^2\leqslant Me^{LT}\cdot\rho$。若当 $h\to0$ 时，$\rho=o(h^2)$，则 T_0 是任意的。

感谢中国科学院大气物理研究所王宗皓先生的帮助。

参 考 文 献

[1] 郭本瑜，大气科学，2，103—114，1978.
[2] 郭本瑜，应用数学学报，171—182，1978，3.
[3] Platzman, G. W. Arch. Meteor. Geophys U Bioklimatol, Ser A, 29—46, 1954.
[4] Nitta, T., *J. Meteor. Soci. Japan*, **40**, 13—24, 1962.
[5] Mastuno, T., *J. Metear. Soci. Japan*, **44**, 145—157, 1966.
[6] Shapiro, R. *Rev. Geophys. Space. Phys.*, **8**, 359—387, 1970.
[7] Shapiro, M. A., and O'Brien, J. J., *J. Appl. Meteor*, **9**, 345—349, 1970.
[8] Williamson, D. L., and Browning, G. L. *J. Appl. Meteor.*, **13**, 8—16, 1974.
[9] Perkey, P. J. and Kreitzberg, C. W. *M. W. R.* **104**, 744—755, 1976.
[10] Ладыженская, О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Физматгиз, 1961.

THE EFFECT OF THE TREATMENT OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE ERROR OF NUMERICAL PREDICTION

Guo Ben-yu

(*Shanghai Scientific and Technical University*)

Abstract

In this paper, by using the energy method for solving the two-dimensional vorticity equation, it is proved that if the computation error of the second boundary condition is $o(h^{1.5})$, the scheme is generally stable and convergent. If the computation error of the third boundary condition is $o(h)$, the scheme is generally stable and convergent. In the case of the suitable choice of the boundary shape the scheme is generally stable and convergent even if the error of boundary value is $o(h)$.

Finally, it is proved that with suitable choice of the boundary shape the above results could be improved.