

用快速富立叶变换的涡度方程 (球函数)谱模式

邢如楠

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文积分了球面函数展开的正压涡度方程。求变数的离散富氏变换用固定点数的 FFT, 节省了计算时间。

用分析初值所做试验结果表明谱方法是精确的和稳定的。用实际天气资料所做预报结果表明谱模式能报出主要天气系统的发展, 但预报强度偏深。

一、引 言

近几年来,在数值天气预报中,谱方法受到人们越来越多的重视。这种方法相对于差分法具有精确度高,比较容易处理截断小波动,以及求解 Poisson 方程时不需要迭代等许多优点。但是目前国内应用得还不多,主要是由于其工作量大,国内电子计算机速度有限,特别是当自由度较大的时候,实现起来比较困难。自从 Cooley 和 Tukey^[1]提出了离散富氏变换的快速方法 FFT 以后,使谱方法的计算变得十分方便。后来 Orszag^[2], Machenhauer 等^[3]提出了谱模式的变换方法,回避了相互作用系数方法的大量计算。本文用固定点数的 FFT 方法做变数的离散富氏变换,用完全的变换方法 (Machenhauer 等^[3]) 计算非线性项,积分了球面函数展开的正压涡度方程。由于采用了快速的计算方法,计算量大大节省,使其计算量做到可以和差分法相接近。

用分析初值 4 个波稳定地积分了 36 天以上,用实际天气资料也进行了计算。

二、球面函数和高斯积分

若 F 是一个实数(标量或向量分量),定义在球坐标 (λ, μ) 上,可将 F 展成球面函数

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (2.1)$$

这里 λ 是经度, $\mu = \sin \varphi$, φ 是纬度。 F_n^m 是球面函数展开系数。 Y_n^m 是球面函数, 定义为

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (2.2)$$

式中 $P_n^m(\mu)$ 是 m 阶 n 次的缩合 Legendre 函数

$$P_n^m(\mu) = \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(x) \quad (2.3)$$

实现变数 F 的球面函数展开分成两步, 第一步先将 F 在 λ 方向展成富氏级数

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (2.4)$$

富氏系数为

$$F^m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \quad (2.5)$$

第二步, 比较(2.4)和(2.1)式, 可以看出 F^m 能改写成 Legendre 函数的和

$$F^m(\mu) = \sum_{n=m}^{\infty} F_n^m P_n^m(\mu) \quad (2.6)$$

球面函数展开系数 F_n^m 则可以写成

$$F_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \quad (2.7)$$

上式的积分用高斯求积公式, 即

$$F_n^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^k G_k F^m(\mu_k) P_n^m(\mu_k) \quad (2.8)$$

在这个表达式中, μ_k 是高斯坐标, 它是 Legendre 多项式 P_k^0 的根, G_k 是相应的高斯权重. 高斯求积公式有 k 个座标点, 对任何 $2k-1$ 阶的多项式都是精确的.

三、完全的变换方法

考虑正压无辐散涡度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{2Q}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) \quad (3.1)$$

式中 Ψ 是流函数, ζ 是涡度, Q 是地球角速度, a 为地球半径.

正压涡度方程的谱形式是

$$\frac{\partial \Psi_n^m}{\partial t} = \frac{2Q}{n(n+1)} im \Psi_n^m - \frac{a^2}{n(n+1)} F_n^m \quad (3.2)$$

由于自由度有限, 因此函数展开必须截断. 一般截断有两种方法, 平行四边形截断和三角形截断. 这里用的是平行四边形截断, $|m| \leq M$, $n - |m| \leq J$, M 和 J 都是正整数.

流函数和涡度的球面函数展开分别是

$$\Psi = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+J} \Psi_n^m Y_n^m \quad (3.3)$$

$$\zeta = \nabla^2 \Psi = - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+J} \frac{n(n+1)}{a^2} \Psi_n^m Y_n^m \quad (3.4)$$

方程(3.2)中的 F_n^m 代表非线性项的展开系数

$$F_n^m = \frac{1}{a^2(\mu^2 - 1)} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} (\mu^2 - 1) \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} (\mu^2 - 1) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right]^m \quad (3.5)$$

方程中非线性项的计算是用完全的变换方法 (Machenbauer 等^[3]), 也就是说将变数从 (m, n) 空间变到 (λ, μ) 空间, 非线性项的计算是在物理空间格点 (λ, μ) 上进行的, 结果再变回到 (m, n) 空间, 形成展开系数.

下面分别加以说明

1. 从球面函数空间变换到富氏空间

当给出了 Ψ 和 ζ 的球面函数展开系数 Ψ_n^m 和 ζ_n^m 之后, 在纬圈 $\mu = \mu_k$ 上, 可以求出 Ψ 、 ζ 以及它们的导数的富氏系数

$$\Psi^m(\mu_k) = \sum_{n=|m|}^{|m|+J} \Psi_n^m P_n^m(\mu_k) \quad (3.6)$$

$$\zeta^m(\mu_k) = \sum_{n=|m|}^{|m|+J} \zeta_n^m P_n^m(\mu_k) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \Psi^m}{\partial \lambda}(\mu_k) = im \Psi^m \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \zeta^m}{\partial \lambda}(\mu_k) = im \zeta^m \quad (3.9)$$

$$M^{m(\Psi)}(\mu_k) = -(1 - \mu^2) \frac{\partial \Psi^m}{\partial \mu} = \sum_{n=|m|}^{|m|+J} \Psi_n^m H_n^m \quad (3.10)$$

$$M^{m(\zeta)}(\mu_k) = -(1 - \mu^2) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \mu} = \sum_{n=|m|}^{|m|+J} \zeta_n^m H_n^m \quad (3.11)$$

其中

$$H_n^m = -(1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} = n d_{n+1}^m P_{n+1}^m - (n+1) d_{n-1}^m P_{n-1}^m \quad (3.12)$$

$$d_n^m = \left[\frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

上面的公式中 $m \leq M$, $(n-m) \leq J$, 高斯座标的数目 K 由 M 和 J 决定, 必须满足

$$K \geq M + \frac{3}{2}J + 1$$

(Eliassen 等^[4]), 这是因为 $\{F^m(\mu)P_n^m(\mu)\}$ 至多是一个 $2M + 3J - 1$ 阶的多项式.

2. 由富氏空间变换到物理空间

在纬圈的格点上, Ψ 、 ζ 以及它们的导数值由富氏合成得到

$$\Psi(\lambda_i, \mu_k) = \sum_{m=-M}^M \Psi^m(\mu) e^{im\lambda_i} \quad (3.14)$$

$$\zeta(\lambda_i, \mu_k) = \sum_{m=-M}^M \zeta^m(\mu) e^{im\lambda_i} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(\lambda_i, \mu_k) = \sum_{m=-M}^M im \Psi^m(\mu) e^{im\lambda_i} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda}(\lambda_j, \mu_k) = \sum_{m=-M}^M i m \zeta^m(\mu) e^{i m \lambda_j} \quad (3.17)$$

$$-(1 - \mu^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = \sum_{m=-M}^M M^m(\mu) e^{i m \lambda_j} \quad (3.18)$$

$$-(1 - \mu^2) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} = \sum_{m=-M}^M M^m(\zeta) e^{i m \lambda_j} \quad (3.19)$$

3. 在物理空间计算非线性项在各纬圈上的格点值

用第 2 步所得结果相乘, 就得到了在纬圈的格点 (λ_j, μ_k) 上的非线性项的值

$$F(\lambda_j, \mu_k) = \frac{1}{a^2(\mu^2 - 1)} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mu}(\mu^2 - 1) \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(\mu^2 - 1) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right] \quad (3.20)$$

4. 从物理空间变回到富氏空间

对非线性项的格点值进行离散的富氏分析

$$F^m(\mu_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(\lambda_j, \mu_k) e^{-i m \lambda_j} \quad (3.21)$$

这里求离散富氏变换和第 2 步求富氏反变换均用离散富氏变换的快速方法 FFT, 节省了计算量。计算中选用了计算量最少的 FFT 版本, 其流程图类似于 Jagadesan^[5]。并由于采用固定点数的 FFT (与 [6] 相同), 即在程序编制中, 使点数固定, 如取 32 或 64, 可以节省一些加法和乘法的运算, 减少了运算次数并节约了计算时间。见表 1。

表 1 当 $N = 32$ 时, 离散富氏变换计算量比较

方 法	实数加法	实数乘法
直 接 法	4096	4096
Cooly-Tukey	640	640
本 文	388	108

富氏正变换和富氏反变换用一套程序。N 要取 2 的幂次。

5. 从富氏空间变回球面函数空间

用 $G_k P_n^m(\mu)$ 乘上非线性项的富氏系数 $F^m(\mu_k)$, 沿纬圈求和, 即可得到非线性项的球面函数展开系数

$$F_n^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K G_k F^m(\mu_k) P_n^m(\mu_k) \quad (3.22)$$

在计算中, 若考虑南北半球是对称的, 则从南极到北极的积分可以换成两倍的由赤道到北极的积分。在 (3.22) 中, 相当于求和只在半球 $K/2$ 个纬圈上进行, K 是偶数。这样, 只需对 $n = m + 1, m + 3, \dots, m + J - 2$ 进行计算。J 为奇数, m 变化从 0 到 M 。图 1 表示的是对 $M = 6, J = 5$ 时的平行四边形截断, 横座标是水平方向波数, 纵座标是 Legendre 函数的阶。白色方格代表反对称分量, 黑色方格代表对称分量。即考虑对称情况时, 计算反对称分量只需在白色格子中进行。

四、计算结果

模式计算中, Legendre 系数 $P_n^m(\mu)$, 高斯座标 μ_k , 以及高斯权重 G_k 和 H_n^m 场都一次算好, 存放起来。

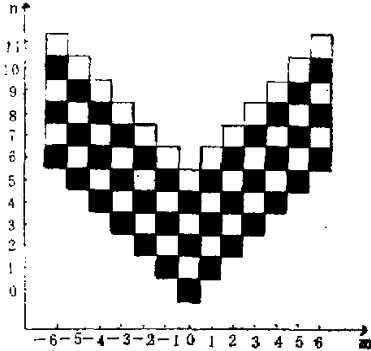


图1 平行四边形截断

首先用这个初值流函数 Ψ 场(取 $R=4$), 做富氏分析和球函数展开, 看一下高斯求积公式的精度。将 Ψ 场进行富氏分析, 得到富氏系数 Ψ_m^n , 然后用高斯求积公式(2.8)算出球面函数展开系数 Ψ_n^m , 再将这个 Ψ_n^m 乘上 P_n^m , 对 n 求和, 即用(2.6)式, 又求出富氏系数 Ψ_m^n 。将 Ψ_m^n 和 Ψ_m^{n*} 进行比较, 表2中给出了部分计算结果。从表中可以看到两次计算的富氏系数值差别是极小的, 这样的精度对我们的计算要求来讲是足够了。用 Ψ_m^n 和 Ψ_m^{n*} 进行富氏反变换, 得到的流函数场是完全一样的。

(4.1)式表示的正压无辐散气流自西向东移动, 波形不变, 相速度是 $9.6^\circ/\text{天}$ 。

用波数 $R=4$ (图2)稳定积分了36天以上。36天的预报图见图3, 可以看到系统自西向东移动形状不变, 根据预报算出的相速度也是 $9.6^\circ/\text{天}$, 和理论值一样。预报一天在6912机(每秒约13万次)上只需1分零7秒。

另外用波数 $R=8$ 也稳定积分了12天以上。上述的试验结果表明谱方法的计算精度高, 并且计算稳定。

第二种试验是FFT用64点, M 取20, J 取19, 高斯纬圈数从赤道到北极取26, 时间步长仍取1小时。考虑南北半球是对称的。用实际天气资料1978年3月25日12时500毫巴北半球高度资料(图4)作为初始场, 做了48小时的预报。初始资料给在每5个经纬度的交点上, 初始高度场输入后再插到高斯纬圈上去。预报结果输出时, 再反插回经、纬度格点上。流函数的计算简单地用

$$\Psi = gZ/\bar{f} \quad (4.3)$$

这里 g 是重力加速度, Z 是高度, $\bar{f}$ 取成 10^{-4}秒^{-1} 。48小时的预报结果(图5)和实况(图6)比较, 可以看到对于原初始场上新地岛上空以南的小槽越过它前面的高压脊, 在巴尔喀什湖一带发展成一个低槽, 这一发展过程趋势是报出来了, 但强度比实况深。而原在贝湖的低压槽东移减弱, 预报也是东移减弱, 但移速偏慢约十个经度。对低纬度系统, 菲律宾北部的副高48小时以后是发展的, 预报副高的发展强度过强, 其它一些系统如大西洋东岸和日本东面的低槽等预报的振幅增长较大。由于预报模式只是简单的正压涡度方程,

表 2 雷氏系数 ψ^m 和 ψ^{m*} 在不同高纬纬圈 μ_k 上的值

μ	ψ^m	$m=0$	$m=2$	$m=4$	$m=6$	$m=8$
μ_1	ψ^m	-0.123 380 652 8×10^4	-0.601 661 172 7×10^{-4}	0.615 049 876 2×10^7	0.401 514 509 $\times 10^{-2}$	0.187 683 105 4×10^{-2}
	ψ^{m*}	-0.123 380 652 9×10^5	-0.600 146 448 8×10^{-2}	0.615 049 876 2×10^7	0.400 358 509 $\times 10^{-2}$	0.186 929 143 0×10^{-2}
μ_2	ψ^m	-0.369 399 332 9×10^4	-0.175 808 657 3×10^{-2}	0.179 755 652 8×10^4	0.117 388 678 1×10^{-1}	0.543 212 890 6×10^{-2}
	ψ^{m*}	-0.369 399 330 5×10^4	-0.175 593 087 3×10^{-1}	0.179 755 652 8×10^4	0.117 399 047 $\times 10^{-1}$	0.543 281 229 8×10^{-2}
μ_{12}	ψ^m	-0.310 981 306 6×10^3	-0.345 356 799 5×10^{-2}	0.314 350 864 1×10^6	0.172 181 952 5×10^{-3}	0.000 000 000 0
	ψ^{m*}	-0.310 981 306 1×10^3	-0.331 495 004 $\times 10^{-3}$	0.314 350 862 4×10^6	0.116 221 030 5×10^{-3}	0.131 718 765 2×10^{-4}

$\mu_1 = 0.038\ 724\ 175$, $\mu_2 = 0.116\ 084\ 070$, $\mu_{12} = 0.977\ 259\ 949$

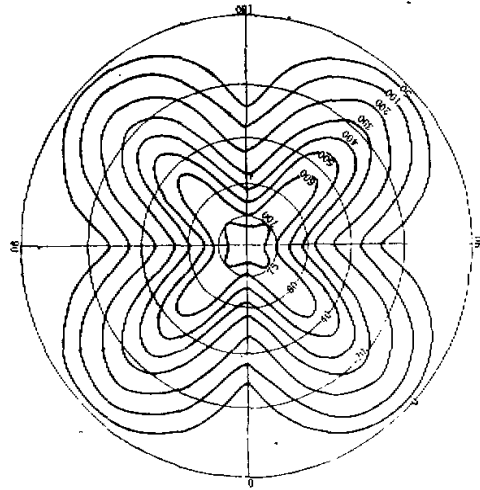


图 2 波数 $R=4$ 流函数初值(单位: $4 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$)

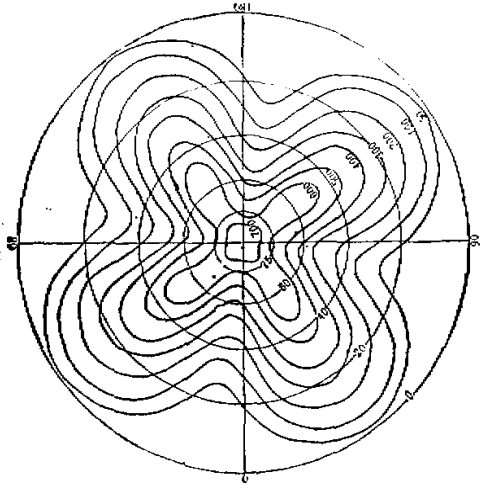


图 3 波数 $R=4$ 流函数第 36 天预报(单位: $4 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$)

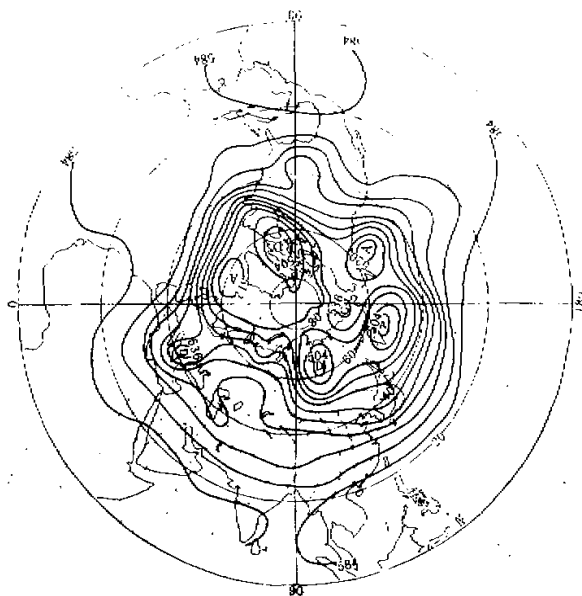


图4 1978年3月25日12时
500 mb 高度场(初始场)

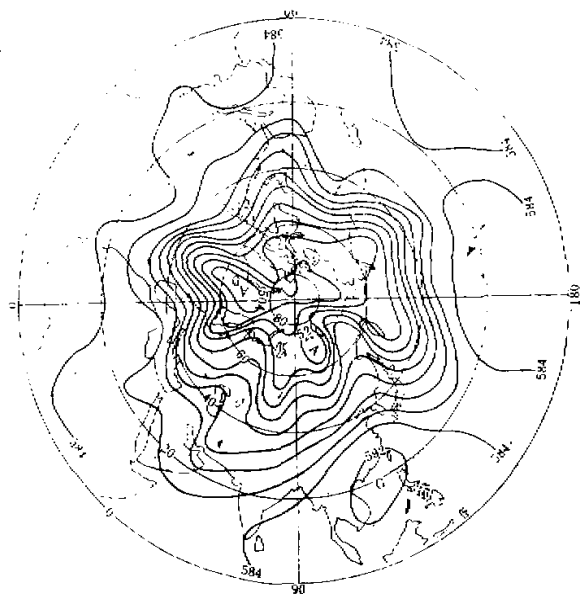


图5 预报1978年3月27日12时500mb高度场

初值的选取又过于简单,初值和预报过程中的分辨率也还不够高等,都影响了预报效果,这些方面正在进一步改进之中。

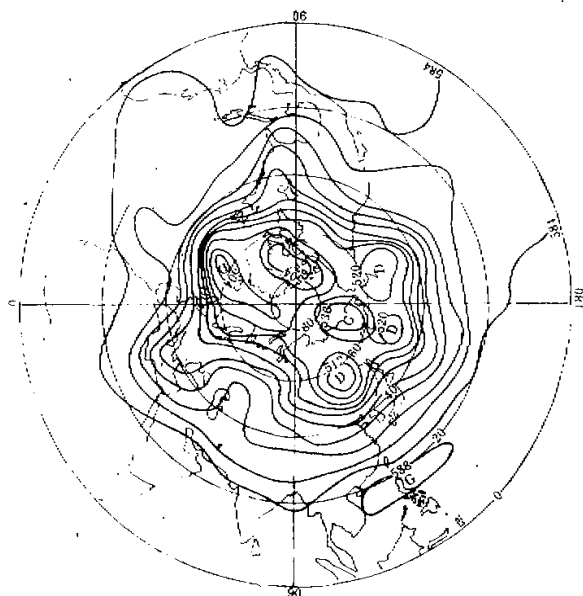


图6 1978年3月27日12时500mb高度场(实况)

参 考 文 献

- [1] Cooley, J. W., and Tukey, J. W., *Math. Comput.*, **19**, 297—301, 1965.
- [2] Orszag, S. A., *J. A. S.*, **27**, 890—895, 1970.
- [3] Machenhauer, B., and Rasmussen, E., Repot No. 3, University of Copenhagen, In Institute for Teoretisk Meteorologi, 1972.
- [4] Eliassen, E., Machenhauer, B. and Rasmussen, E., Repot No. 2, University of Copenhagen, Institute for Teoretisk Meteorologi, 1970.
- [5] Jagadesan, M. Proc. IEEE 13th. Midwest Symposium on Circuit Theory, 7—8. May 1970.
- [6] 陈雄山, 平流方程的数值研究, 大气科学, **3**, 109—119, 1979.
- [7] Phillips, N. A., *Mon. Wea. Rev.*, **87**, 333—345, 1959.

SPECTRAL MODEL OF THE VORTICITY EQUATION (SPHERICAL HARMONICS) USING THE FAST FOURIER TRANSFORM

Chin Ru-nan¹

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the barotropic vorticity equation expanded with spherical harmonics is integrated. The discrete Fourier Transform of the variables is computed with the FFT of fixed points.

The results of the experiments with analytical initial data show that the spectral method is accurate and stable. The results of the prediction with actual weather data show that the spectral model can predict the movement and the development of the main weather systems.