

用二维 Fourier 级数展开的 涡度方程截断数值试验

陈 雄 山

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

不计热源及不计摩擦消耗的情况下,对非线性正压涡度方程进行二维 Fourier 变换,微商是在谱空间中计算,乘积是在物理空间中计算,使用快速 Fourier 变换,对天气实例做了七天的数值预报.从数值试验中看到:若只预报三、四天则初值的 Fourier 级数中取舍第 15 个波对预报图所产生的影响还是不大的.假如只预报一天则非线性涡度方程的自由度取到第 14 个波所产生的截断误差也是不大的,若预报二天以上则其截断误差会迅速增大.

一、引 言

在数值预报中对非线性方程求数值积分总是在有限个自由度下进行的.在差分方法中选取有限个格点数,在谱方法中选取有限个波数.但是这样做所造成的截断误差到底有多大,还是缺少定量的认识.

对非线性正压涡度方程进行二维 Fourier 变换,微商是在谱空间中计算,乘积是在物理空间中计算.对初值及方程采用不同的截断会得到不同的预报结果.我们需要了解非线性正压涡度方程长时间数值积分后截断误差对预报图的影响程度.现在就针对这个问题用实际的天气图作为初值进行有控制的数值试验.

二、谱 模 式

非线性正压涡度方程可写成

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g}{f} \nabla^2 z + f \right) - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{f} \nabla^2 z + f \right) = 0 \quad (2.1)$$

其中 z 为 500 毫巴等压面高度, g 为重力加速度, $f = 2\Omega \sin \varphi$ 为地转参数, Ω 为地球自转角速度, φ 为纬度, $\bar{f}$ 是地转参数的空间平均值.

二维 Fourier 变换则可写成

1978年10月19日收到.

$$z(j, k) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} Z(l, m) e^{i \frac{2\pi}{N}(lj+mk)} \quad (2.2)$$

$$(j = 0, 1, \dots, N-1 \quad k = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$Z(l, m) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(j, k) e^{-i \frac{2\pi}{N}(lj+mk)} \quad (2.3)$$

$$(l = 0, 1, \dots, N-1 \quad m = 0, 1, \dots, N-1)$$

其中 z 为 500 毫巴等压面高度, Z 为对应的 Fourier 系数, $i = \sqrt{-1}$, N 为点数.

容易求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}(j, k) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} i \frac{2\pi}{Nd} \bar{l} Z(l, m) e^{i \frac{2\pi}{N}(lj+mk)} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(j, k) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} i \frac{2\pi}{Nd} \bar{m} Z(l, m) e^{i \frac{2\pi}{N}(lj+mk)} \quad (2.5)$$

$$\nabla^2 z(j, k) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{2\pi}{Nd} \right)^2 \cdot (-\bar{l}^2 - \bar{m}^2) Z(l, m) e^{i \frac{2\pi}{N}(lj+mk)} \quad (2.6)$$

其中 d 为网格距, $\bar{l}$ 的取法按下列规则:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } 0 \leq l < \frac{N}{2} \text{ 时, } \quad \bar{l} &= l \\ \text{当 } l = \frac{N}{2} \text{ 时, } \quad \bar{l} &= 0 \\ \text{当 } \frac{N}{2} < l \leq N-1 \text{ 时, } \bar{l} &= l - N \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$\bar{m}$ 的取法同 $\bar{l}$.

我们选用二维 Fourier 变换, 取正方形范围, x 方向及 y 方向取相同的波数. 预报范围为接近北半球范围 (见图 1), 正方形的四个角接近赤道, 中心为北极点, x 向及 y 向取周期边界条件. 我们这里的波数是指 x 向 (或 y 向) 在两边界之间所出现的波动的个数, 其含意与在一个纬圈上的波数并不一样. 现在相邻两格点间的距离取 540 公里, x 向及 y 向各取 32 个点, 则第 14 个波的波长是 1234.3 公里, 第 15 个波的波长是 1152 公里.

以 (2.2)——(2.6) 式代入涡度方程 (2.1), 以时间差分代替时间微分得到涡度方程的谱模式. 微商是用公式 (2.4) 及 (2.5) 计算. 非线性乘积项的计算是由 Fourier 系数变换到格点值, 相乘后再变换成 Fourier 系数, 其中正反 Fourier 变换都使用了快速 Fourier 变换 (FFT). 自从 1965 年 Cooley and Tukey^[1] 发表 FFT 的论文以来已有好多 FFT 的版本, 其计算量大小也不一样. Andrews^[2] 的 FFT 计算量比较小, 但我们在 Jagadeesen^[3] 的流程图基础上, 用固定的格点数 N , 对计算方案经过进一步简化, 使用计算量更小的 FFT 计算方案^[4,5]. 时间差分使用中央差分, 并使用数值预报中常用的“三步法”起步计算.

数值计算中的数据如下: $g = 9.8$ 米 $\cdot$ 秒⁻², $Q = 7.29 \times 10^{-5}$ 秒⁻¹, $\bar{f} = 10^{-4}$ 秒⁻¹, $d = 5.4 \times 10^5$ 米, $\Delta t = 3600$ 秒.

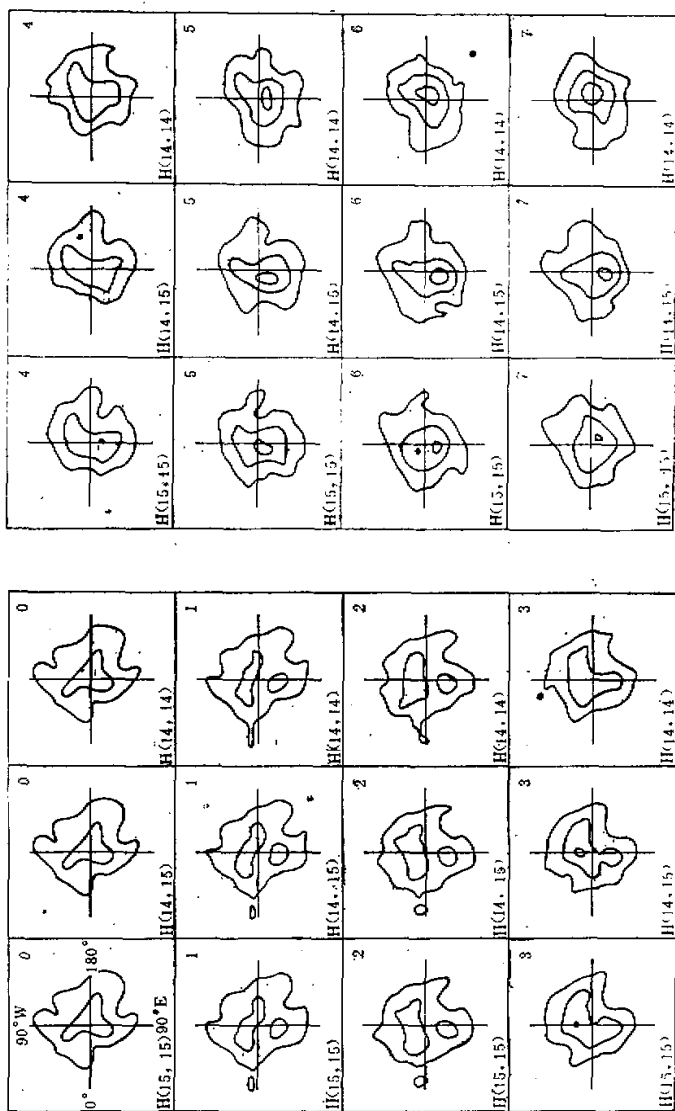


图1 正压涡度方程北半球500毫巴高度场第0—7天预报图

三、试验结果

不计热源及不计摩擦消耗的情况下,对上述正压涡度方程谱模式用实际天气图——1975年4月19日12世界时北半球500毫巴高度场作为初值预报七天。所得的结果见图1,其中每一个正方形中右上角的数字表示预报天数,左下角括号内第一组数字表示初值所取到的波数,第二组数字表示方程所取到的波数。如 $H(14, 15)$ 表示初值取到14个波,方程取到15个波。图1中每一个正方形最外围的曲线为500毫巴高度场5520米等值线,其内的曲线为5200米等值线,再其内的曲线为4880米等值线。

1. 初值的截断试验。 在数值预报中初值总是在有限个自由度的情况下给出的。对输入的全场1024点的北半球500毫巴高度场用二维Fourier级数展开,并选取不同的截断波数。图1中左面一列的预报结果 $H(15, 15)$ 表示初值的二维Fourier级数取到第15个波,而中间一列的预报结果 $H(14, 15)$ 表示初值的二维Fourier级数取到第14个波。把这两种初值的二维Fourier系数变回到格点上的数值后,其差别是不大的,全场1024个格点上两者相差20米的点数只有4个,而相差10米的点数也只有173个,其余格点上的数值都是相同的。这种差别一般是在读数误差之内。现在要问在初值上的这种细微差别,对无热源及无摩擦消耗的非线性涡度方程谱模式进行时间积分时影响到底有多大?在图1中看到,时间积分到三、四天两者的差别还不显著,但再预报下去两者的差别越来越显著。在第七天的预报图上, $H(15, 15)$ 的低压中心在 130°E ,但 $H(14, 15)$ 的低压中心却在 80°E ,中心强度也强得多。

2. 方程的截断试验。 在数值预报中变数的自由度总是有限的。非线性涡度方程在有限个自由度的情况下进行数值积分所产生的截断误差对所预报的高度场形势到底有多大的影响是我们所关心的问题。在同样的初值条件下,比较方程取到第15个波的预报结果 $H(14, 15)$ 与方程取到第14个波的预报结果 $H(14, 14)$,即比较图1中的中间一列及右面一列的预报结果。看到在非线性涡度方程中截去第15个波与不截去第15个波所得到的预报结果是很不一样的。在第一天的预报图上两者比较一致,但在第二天的预报图上两者已出现差异,在以后几天的预报图上差异越来越大。在第七天的预报图上 $H(14, 15)$ 的低压中心在 80°E ,而 $H(14, 14)$ 的低压中心却在 180°E ,连大形势也不一样了。假如只预报一天,则非线性涡度方程的自由度取到第14个波所产生的截断误差是不大的,若预报二天以上则其截断误差会迅速增大,到第七天方程取到第14个波所产生的截断误差的影响已足够大到所预报的槽脊位置已失去其预报意义。

参 考 文 献

- [1] Cooley, J. W. and Tukey, J. W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, 19, 295—301, 1965.
- [2] Andrews, H., A high-speed algorithm for the computer generation of Fourier transforms. *IEEE trans. on computers*, C-17, 373—375, 1968.
- [3] Jagadeesan, M., n -dimensional fast Fourier transform. *Proc. IEEE 13th Midwest Symposium on Circuit Theory*, III.2.1—III.2.8, 1970.
- [4] 陈雄山, 平流方程的数值试验, *大气科学*, 3, 109—119, 1979.

- [5] 陈雄山, 非线性 Korteweg-de Vries 方程的高精度数值解法, 第二次全国数值预报会议论文集, 科学出版社, 1979.

TRUNCATION EXPERIMENTS IN VORTICITY EQUATION EXPANDED IN TWO-DIMENSIONAL FOURIER SERIES

Chen Xiong-shan

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

In the absence of the heat sources and the friction, the non-linear barotropic vorticity equation in terms of two-dimensional Fourier series is integrated to 7 days using real weather data. The derivatives are evaluated in the spectral domain and the non-linear terms are evaluated in the grid-point domain. In the calculation the fast Fourier transform is used. In the numerical experiments. It is shown that the integrations using the initial data with or without the 15th components of Fourier series do not show significant differences during the 4 days integration. The truncation errors in the non-linear vorticity equation with the truncated wave number of 14 are not significant up to 1 day integration, but the truncation errors grow rapidly after 2 days integration.