混合型平衡方程的数值解法

王 宗 皓
(中国科学院大气物理研究所)

齐 献 萼　齐 铁 山
(中国科学院计算技术研究所)

黎 光 清
(中央气象局气象科学研究所)

提　　要

本文提出数值求解混合型平衡方程的一种逐步变型—轮换—迭代方法．引进外迭代因子．实例计算表明，用这种方法解出的流函数反解出高度场无系统性降低和副热带高压减弱消失等现象．适合应用来提供我国低纬度地区的数值天气预报模式的初值．将平衡方程作为混合型方程求解，目前还是新的首次试验．

一、引　言

将平衡方程当成单纯的椭园型方程求数值解，由于实际上是椭园-双曲混合型方程，不得不脱离实际情况人为地处理非椭园型点，即使是加上某些技术措施也不能保证每个实例计算过程都收敛，从已发表的北半球范围的计算结果看出，由所求得的流函数场反求高度场有系统性降低现象．并且在中、低纬度的高压区，对实际高度场有严重的歪曲．从我们最初的试算情况看出，实况图中强大的副热带高压几乎全部消失．这对我国低纬度地区天气数值预报非常不利．因此，有必要重新考虑平衡方程的数值解法．

本文考虑到平衡方程在北半球的大部分区域虽然是椭园型方程，但实际上在不小的范围却是混合型方程这一事实，根据冯康先生的意见，提出一个“逐步变型”的方法，即先求出在整个北半球区域上椭园型条件成立时，平衡方程的数值解，作为第一近似，逐步求出混合型方程的数值解．在求解过程中采用轮换—迭代交替使用的二重迭代法．为了保证收敛性，引进外迭代收敛因子．

实例计算表明，应用上述方法，不仅能保证收敛，而且可以避免出现高度场系统性降低现象．基本上保持中纬度和付热带高压的本来强度．本文的试验工作在1965年完成的，在第二次全国计算数学会议上报告过．这次发表作了一些修改．求混合型平衡方程的数值解还是新的首试工作．

1978年8月26日收到．

二、平衡方程的主要性质

在尤拉直角坐标系中，平衡方程可以写成为

$$2J(u, v) + (fv)_x - (fu)_y = \Delta\phi, \tag{2.1}$$

式中 ϕ 为位势高度，f 为柯氏参数，$J(u, v)$ 为水平雅可比算符，u 和 v 为水平风速分量。在(2.1)式中如去掉风速的水平辐散，可以引进流函数 ψ，将(2.1)式改写为

$$f\Delta\psi + \nabla f \cdot \Delta\psi + 2m^2[\psi_{xx}\psi_{yy} - (\psi_{xy})^2] = \Delta\phi. \tag{2.2}$$

这里 m 为地图投影放大系数。

从一般非线性方程的分型条件[3]，推知(2.2)式为椭园形方程的条件是

$$f^2 + 2(\Delta\phi - \nabla f \cdot \nabla\psi) > 0, \tag{2.3}$$

当此条件不成立时，为双曲型方程。而且当椭园型条件(2.3)成立时，方程(2.2)对同一边界条件，有两个解[3]，我们可以只保留具有普遍意义的一个解，即满足 $\Delta\psi + f \geqslant 0$ 的解。将(2.2)写成

$$\Delta\psi = -\frac{f}{m^2} + \left\{\frac{f^2}{m^2} + \frac{2}{m^2}\Delta\phi + A^2 + B^2 + \frac{2}{m^2}\nabla f \cdot \nabla\psi\right\}^{1/2}. \tag{2.4}$$

式中

$$A = \psi_{xx} - \psi_{yy}, \quad B = -2\psi_{xy}.$$

方程(2.4)仍然是混合方程。其为椭园型仍需满足条件(2.3)。从理论上说来，椭园型条件(2.3)成立时，从(2.4)式一定可以求得实数值 $\Delta\psi$；椭园型条件(2.3)不成立，比如双曲型条件、只要方程(2.4)有解，$\Delta\psi$ 也必然是实数解。

北半球范围 500 毫巴实例计算表明，平衡方程确实是混合型方程，并且非椭圆型点是成片出现的。比如 1962 年 2 月 20 日 12 时 500 毫巴图上(图略)，可以看出低纬 15°N 附近大部分地区是 $f^2 + 2(\Delta\phi - \nabla f \cdot \nabla\psi)$ 负值区。由此看来，不顾实际情况，把平衡方程当作单一的椭圆型方程，在北半球范围内求解是不合理的，需要设法求出混合型平衡方程的数值解。

人们一直认为非椭圆型点的出现，与实测气象资料中存在水平辐散有关联。事实可能并非如此，试以确无水平辐散，而又是平衡方程的准确解[4]

$$\psi(x, y) = -Uy + 2B\cos(px + qy), \tag{2.5}$$

和相应的位势高度场

$$\phi(x, y) = f\psi - 2BUq\sin(px + qy) + \frac{1}{2}U\beta y^2, \tag{2.6}$$

代入椭圆型条件(2.3)的左端，可以得到

$$\begin{aligned} &f^2 + 2(\Delta\phi - \nabla f \cdot \nabla\psi) \\ &= f^2 - 4fB(p^2 + q^2)\cos(px + qy) > 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

式中 $f = f_0 + \beta y$，$\beta = U(p^2 + q^2)$，p 和 q 分别表示 x 和 y 方向的波数，U 为基本气流，B 为扰动强度。由(2.7)式看出椭圆型条件成立与否，主要决定于扰动强度 B，扰动波长和柯氏参数 f 随纬度的变化。

三、混合型平衡方程的逐步变型迭代解法

将(2.4)式离散化

$$\begin{cases}\Delta\psi_0 = F_0(\psi,\phi,f)\\ \psi|_{边值} = \mathring{\psi}\end{cases} \tag{3.1}$$

并将变型条件写成为

$$Z_0 = \frac{f_0^2}{2} + \frac{m^2}{h^2}\Delta\phi > -\varepsilon_i \tag{3.2}$$

$$i = 0, 1, \cdots, N \qquad \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_N$$

此处，h 为格宽.

$$F_0(\psi,\phi,f) = -\frac{h^2 f_0}{m_0^2} + \left\{\frac{2h^4}{m_0^4}\left(\frac{f_0^2}{2} + \frac{m_0^2}{h^2}\Delta\phi\right) + \Lambda^2 + C\right\}^{1/2}$$

$$\Delta\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0$$

$$\Lambda^2 = \left(\sum_{i=1}^{4}\psi_i - 4\psi_0\right)^2 + (\psi_1 + \psi_3 - \psi_2 - \psi_4)^2$$

$$-(\psi_5 + \psi_7 - 2\psi_0)(\psi_6 + \psi_8 - 2\psi_0),$$

$$C = -\frac{h^2}{m_0}\left\{\sum_{i=1}^{4}(f_i - f_0)(\psi_i - \psi_0)\right\}.$$

其中“0”表示计算点，$i = 1,2,3,4$ 分别表示“0”点的左右和上下的格点. $i = 5,6,7,8$ 表对角顶点格点. 变型参数 ε_i 是给定的正数，当 ε_i 增大时，平衡方程由单一的椭园方程逐渐变为混合型方程. ε_i 的下限 ε_0 和上限 ε_N 可以近似估计，其数量级为

$$\varepsilon_0 \sim O(\nabla\psi\cdot\nabla f) = 10^{-4}\ (1/小时)^2$$

$$\varepsilon_N \sim O(f^2) = 10^{-2}\ (1/小时)^2.$$

我们实际计算选择如下四个 ε_i 是适宜的

$$\varepsilon_0 = 0.6\times 10^{-3},\ \varepsilon_1 = 0.3\times 10^{-2},\ \varepsilon_2 = 10^{-2},\ \varepsilon_3 = 0.3\times 10^{-1}.$$

称满足方程(3.1)和不等式

$$Z > -\varepsilon_N$$

的解为混合型平衡方程的近似解. 求近似解的计算过程可以分为两大步骤:

(a) 逐步变型

处理 Z 场使得对于依次序给定的 ε_i 成立不等式

$$Z > -\varepsilon_i,\ i = 0, 1, 2, \cdots N,\ \varepsilon_{i-1} < \varepsilon_i$$

处理 Z 场的方法不是唯一的，可用与[1]中类似的方法：当 $Z_0 < 0$ 时，令

$$Z_0' = 0,\ Z_j' = Z_j - \frac{1}{4}|Z_0|,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

式中带撇项表示经法处理后的 Z 值. 经过这样处理后，我们就得到一个 Z 场序列

$$Z^{(0)},\ Z^{(1)},\ \cdots Z^{(N)}.$$

其中 $Z^{(i)}$ 对应处理到

$$Z > -\varepsilon_i$$

时的Z场．现将逐步变型过程综述如下：

1，以 $Z^{(0)}$ 代替差分方程(3.1)右端 $F(\psi,\phi,f)$ 中的 $Z=\frac{f^2}{2}+\frac{m^2}{h^2}\triangle\phi$，以地转近似

$$\psi=\phi/\bar{f}$$

做初始近似，$\bar{f}$ 为 f 在 30°N 处的值．用下述的轮换—迭代程序求出近似解 $\psi^{(0)}$；

2，以 $Z^{(1)}$ 代替差分方程(3.1)右端 $F(\psi,\phi,f)$ 中的 Z，以 $\psi^{(0)}$ 为初始近似，用下述的轮换—迭代程序求出近似解 $\psi^{(1)}$；以此类推，可求出一串近似解序列：

$$\psi^{(0)},\ \psi^{(1)},\ \cdots,\ \psi^{(N)}$$

如此得到的 $\psi^{(N)}$ 作为混合型平衡方程的近似解．

(b) 轮换—迭代

由内—外迭代过程组成，外迭代过程是

$$\begin{cases}\triangle\psi_0^{(n+1)}-A\psi_0^{(n+1)}=F_0(\psi^{(n)},\phi,f)-A\psi_0^{(n)}\\ \psi^{(n+1)}|_{边值}=\mathring{\psi},\ n=0,1,2,\cdots\end{cases}\tag{3.4}$$

内迭代过程是逐步超松弛程序

$$\begin{aligned}\overset{\nu+1}{\psi}{}_0^{(n+1)}&=\overset{\nu}{\psi}{}_0^{(n+1)}+\alpha[\overset{\nu}{\psi}{}_1^{(n+1)}+\overset{\nu}{\psi}{}_2^{(n+1)}+\overset{\nu+1}{\psi}{}_3^{(n+1)}+\overset{\nu+1}{\psi}{}_4^{(n+1)}\\&\quad-4\overset{\nu}{\psi}{}_0^{(n+1)}-A\overset{\nu}{\psi}{}_0^{(n+1)}-F_0(\psi^{(n)},\phi,f)+A\psi_0^{(n)}]\\ \nu&=0,1,2,\cdots\end{aligned}\tag{3.5}$$

其中 A 为外迭代收敛因子，α 为松弛因子．

四、外迭代因子的选择

上述两大步骤，实际上是逐步变型—轮换—迭件的三重迭代过程．α 由一般办法选择．下面讨论 A 的选择方法．为此假定计算区域已变换成为单位正方形区域．

一般说来，通过内迭代不能精确求出 $\psi^{(n+1)}$，代入外迭代过程中应有余差 e^n，因此外迭代过程实质上是

$$\triangle\psi_0^{(n+1)}-A\psi_0^{(n+1)}=F_0(\psi^n,\phi,f)-A\psi_0^{(n)}+e_0^n,$$

令 $\zeta^n=\psi^{(n+1)}-\psi^{(n)}$，则有

$$\begin{cases}\triangle\zeta_0^{(n)}-A\zeta_0^{(n)}=\sum\limits_{j=0}^{8}\dfrac{\partial F^*}{\partial\psi_j}\zeta_0^{(n-1)}-A\zeta_0^{(n-1)}+e_0^n-e_0^{n-1},\\ \zeta_0^{(n)}|_{边值}=0\end{cases}\tag{4.1}$$

式中 $\partial F^*/\partial\psi_j$ 表示 $\partial F^*/\partial\psi_j$ 在 $(\psi_j^{(n)},\psi_j^{(n-1)})$ 之间取的中值，写成矩阵形式

$$W\cdot\zeta^{(n)}=(M_n-AI)\zeta^{(n-1)}+e^n-e^{n-1},\tag{4.2}$$

这里 I 为单位矩阵，W 为系数矩阵，M 为以 $\partial F^*/\partial\psi_j$ 组成的矩阵[8]，ζ^n，e^n 为列向量．用 $\|\ \|_2$ 表 L_2 模，于是由(4.2)有

$$\|\zeta^n\|_2\leqslant\|W^{-1}\|_2\|M_n-AI\|_2\|\zeta^{n-1}\|+\|W^{-1}\|_2(\|e^n\|_2+\|e^{n-1}\|_2),\tag{4.3}$$

若存在 $0<Q<1$ 使

$$\|W^{-1}\|_2\|M_n-AI\|_2\leqslant Q<1,$$

则轮换一迭代过程是收敛的．实际上，若内迭代误差满足（这总是可以做到的）[6]

$$\|e^n\|_2 \leqslant \frac{1}{1+Q}\|W^{-1}\|_2^{-1} Q^{n+1}$$

则由(4.3)式可以得到

$$\|\zeta^n\|_2 \leqslant Q^n\|\zeta^0\|_2 + nQ^n \tag{4.4}$$

注意到 $Q<1$，故有

$$\|\zeta^n\|_2 \to 0, \text{ 当 } n\to\infty.$$

已知 $\|W^{-1}\|_2 = \left(A + 8\sin\frac{\pi h}{2}\right)^{-1}$，因此为了求出符合所述要求的 Q，主要问题在于估计 $\|M_n - AI\|_2$.

由 $F(\psi^{(n)}, \phi, f)$ 的具体表达式，可知M中每一行最多有九个非零元素[7]，当 h 充分小时，不计 h^2 项，它们分别是

$$\begin{cases} \partial F^*/\partial\psi_0 \doteq \dfrac{1}{2}\{\quad\}^{-\frac{1}{2}}(-4\Delta\psi) \\ \partial F^*/\partial\psi_1 \doteq \dfrac{1}{2}\{\quad\}^{-\frac{1}{2}}(4\partial^2\psi/\partial x^2) \doteq \partial F^*/\partial\psi_3 \\ \partial F^*/\partial\psi_2 \doteq \dfrac{1}{2}\{\quad\}^{-\frac{1}{2}}(4\partial^2\psi/\partial y^2) \doteq \partial F^*/\partial\psi_4 \\ \partial F^*/\partial\psi_5 \doteq \dfrac{1}{2}\{\quad\}^{-\frac{1}{2}}(-\Delta\psi - 2\partial^2\psi/\partial x\partial y) \doteq \partial F^*/\partial\psi_7, \\ \partial F^*/\partial\psi_6 \doteq \dfrac{1}{2}\{\quad\}^{-\frac{1}{2}}(-\Delta\psi + 2\partial^2\psi/\partial x\partial y) \doteq \partial F^*/\partial\psi_8. \end{cases} \tag{4.5}$$

这里$\{\quad\}^{-1/2}$表(3.1)式右端 $F(\psi, \phi, f)$ 中的根号项提出 h^2 出后的倒数． 下面利用近似式(4.5)估计模

$$\|M_n - AI\|_2.$$

将 M_n 分解为

$$M_n^{(2)} = \{\cdots, \partial F^*/\partial\psi_5, \cdots, \partial F^*/\partial\psi_6, \cdots, \partial F^*/\partial\psi_7, \cdots, \partial F^*/\partial\psi_8, \cdots\}$$

$$M_n^{(1)} = M_n - AI - M_n^{(2)}.$$

用分离变量法可以算出 $M_n^{(1)}$ 的特征值，从而得到

$$\|W^{-1}\|_2\|M_n - AI\|_2 \leqslant \left(A + 8\sin^2\frac{\pi h}{2}\right)\cdot\max(|a - A| + |b|) = G(A)$$

其中

$$a = 2\{\quad\}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\cos p\pi h + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\cos q\pi h - (1 + \cos p\pi h\cos q\pi h)\Delta\psi\right)$$

$$b = 4\{\quad\}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y},$$

$G(A) < 1$ 的充分必要条件为对某一

$$(p_0, q_0) \in \left[1, \cdots, \frac{1}{h} - 1\right]\left[1, \cdots, \frac{1}{h} - 1\right]$$

成立条件

$$A > \frac{a + b - 8\sin^2\frac{\pi h}{2}}{2}, \quad a > b - 8\sin^2\frac{\pi h}{2} > 0.$$

十分明显，当 $A = a$ 时，$G(A)$ 达到极小值。从 a 的表达式可以看出，分子的量级为 $O(\Delta\psi)$，即相对涡度的量级；而分母的量级为 $O(f)$。因此，可估计出量级关系

$$a \sim O\left(\frac{\Delta\psi}{f}\right) = 10^{-1}.$$

数值试验，发现 $A = 0.14$，收敛情况最好。

参　考　文　献

[1] Shuman, F. G., *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 85 329—332, 1957.
[2] Miyakoda, K., Technical Report of the Japan Meteorological Agency, Vol. 10 1960.
[3] Courant, R. and Hilbert, D., Method of mathematical Physics, Vol. 11.
[4] 叶笃正，气象学报，Vol. 34 No.1, 1964.
[5] 廖洞贤，张耀科，科学技术报告，计算数学的研究，2—13，1964.
[6] Douglas, J. Jr., *Numer. Math.* Vol. 3, 92—98, 1961.
[7] Bolin, B. *Tellus* Vol. 7. 27—49, 1955.
[8] 王宗皓，中国科学院地球物理研究所论文集(二). 科学出版社，1963.

A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE BALANCE EQUATION OF MIXED TYPE

Wang Zong-hao
(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)
Qi Xian-e　　Qi Tie-shan
(Institute of Computational Technology, Academia Sinica)
Li Guang-qing
(Central Meteorological Service)

Abstract

In this paper, a numerical method for solving the mixed type balance equation is proposed. The procedure is to run cyclic scans and iterations with successive transformation of the types. In order to test its accuracy, the balance equation is solved inversely to get inverted geopotential field from stream functions obtained. No systematic error in geopotential field is observed, which suggests that the method could be used in low latitudes.