

正压大气中扰动的演变

卢佩生 曾庆存

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文应用 WKBJ 方法研究正压准地转模式中扰动的演变过程, 提出扰动发展的判据应是扰动总能量和平均振幅同时增长。理论推导出: 正压扰动发展时波长变长, 衰减时波长变短。文中详细地讨论了基本气流为平直西风的情况, 得出急流南导波、急流北导波为发展型, 发展过程中槽线渐趋南北指向; 急流北导波、急流南导波为衰减型, 槽线日渐趋于东西向。文中还讨论了基本气流为非平直气流情况, 指出所谓“超长波后退”过程在一些情况下是发展型槽东移和波长变长所致。

一、引 言

二维正压大气是最简单的大气模式, 但它可讨论高空槽脊等天气系统的许多动力学过程。Rossby^[1]首先用线性化方程求得槽线移动速度公式, 它反映了槽脊移动的基本特点。后来叶笃正^[2]进一步讨论了能量频散和上游效应等动力学过程, 得到了更深刻的结果。与[2]同时的是郭晓岚^[3]的工作, 讨论在正压基本气流上迭加的小扰动的稳定性问题, 得到在一定条件下小扰动发展——“正压不稳定”。此后还有大量工作讨论同一类型的问题。

在上述这类工作中, 都取基本气流是平直的(其中[3]取基本西风 $\bar{u}$ 随 y 而变)。这都是过于理想化的情况。为了在实际工作中得到有效的应用, 人们必须考虑基本气流的不均匀性, 像数值天气预报中的正压模式就是这样。不过, 解非线性方程是很困难的, 到目前为止, 人们还只能找到非常特殊和简单的特解, 数学上的困难妨碍着人们对正压扰动过程的物理本质的分析。为此, 叶笃正^[4]后来提出研究非平直气流情况下的小扰动过程, 这是非常值得研究的课题。在[4]中取基本气流是波状的, 得到了像新波激发等一些非常有趣的不同于平直气流情况下的过程。

在非均匀的基本气流情况下, 小扰动方程虽然仍是线性的, 但具有非常数的系数, 在一般情况下仍然难于求解。故自[4]以后, 研究结果不多。为了克服上述困难, 采取比较能适用于一般情况下的近似方法可能是合适的, 这样既可取基本气流具有任意的形式, 又能作较深入的物理分析, 从而可能进一步认识扰动的演变过程。在[5]中使用 WKBJ 方法讨论大气中快波和慢波的相互作用过程, 得到了一些有意义的结果。我们这里亦采用 WKBJ 方法处理[1]—[4]中的问题, 由此得到了关于扰动演变过程的更普遍的性质和一些比较方便的判据。

1979年3月6日收到初稿, 5月22日收到修改稿。

二、正压扰动方程

为简单起见,我们采用直角坐标中的正压准地转涡度方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi - \kappa\psi) + J(\psi, \Delta\psi) + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

这里的符号都是常见的: ψ 为流函数 ($\psi = f_0^{-1}\phi$, ϕ 为等压面的位势), $\beta = df/dy$, $\kappa = f_0/\bar{\phi}$, $\bar{\phi}$ 为平均位势, f_0 为标准纬度的科氏参数,等等. 引入特征量: T 为特征时间尺度, L 为特征水平尺度, $\Psi = f_0^{-1}\Phi$, Φ 为特征扰动位势, $U = \Psi/L$ 为特征速度. 将(1)化为无量纲方程:

$$\varepsilon' \frac{\partial \Delta\phi}{\partial t} + \varepsilon'' J(\phi, \Delta\phi) - \varepsilon' \mu^{-2} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

其中 ϕ 、 x 、 y 、 t 等已为无量纲量, Δ 和 $J(A, B)$ 亦为在无量纲变量 (x, y) 空间中的算子, 无量纲参数 ε' 等的定义为:

$$\varepsilon' = 1/\beta TL, \quad \varepsilon'' = U/\beta L^2, \quad \mu^{-2} = (L/L_0)^2, \quad (3)$$

而 $L_0 = \sqrt{\bar{\phi}/f_0}$ 就是由外部环境 ($\bar{\phi}$ 和 f_0) 所决定的水平尺度, 一般约为 3000 公里.

我们所要讨论的对象是迭加于长波和超长波上的扰动, 因此又可取 $T = LU^{-1}$, 于是 $\varepsilon' = \varepsilon''$, 并且还可合适地选取 U 和 L , 这样可使 $\varepsilon' = 1$. 此外, 对于相当于长波一类的系统来说, 还有 $0(\mu^{-2}) \leq 0(1)$, 于是(2)简化成:

$$\frac{\partial \Delta\phi}{\partial t} + J(\phi, \Delta\phi) - \mu^{-2} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

今设

$$\phi = \bar{\phi}(x, y, t) + \phi'(x, y, t), \quad (5)$$

其中 $\bar{\phi}$ 和 ϕ' 分别是基本流场和扰动流场. 自然 $\bar{\phi}$ 应满足(4), 即

$$\frac{\partial \Delta\bar{\phi}}{\partial t} + J(\bar{\phi}, \Delta\bar{\phi}) - \mu^{-2} \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

但不必取 $\bar{\phi}$ 为常定.

对于 ϕ' 的演变过程, 取线性化方程:

$$\frac{\partial \Delta\phi'}{\partial t} + J(\bar{\phi}, \Delta\phi') + J(\phi', \Delta\bar{\phi}) - \mu^{-2} \frac{\partial\phi'}{\partial t} + \frac{\partial\phi'}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

ϕ' 还应满足初条件

$$\phi'(x, y, 0) = \phi'^{(0)}(x, y), \quad (8)$$

其中 $\phi'^{(0)}(x, y)$ 为给定的已知函数.

三、演变过程

当我们研究某些特定的天气系统的短期变化过程时, 常可把注意力集中于这些天气

系统自身的结构以及其附近流场的特点, 不必考虑距离过于遥远的地区的流场结构。于是我们可选取合适的参数, 用波包来描写这些天气系统, 即取

$$\phi^{(0)}(x, y) = R_\varepsilon(A^{(0)}(x, y)e^{i\theta(x, y, 0)\varepsilon^{-1}}), \quad (9)$$

$$\phi'(x, y, t) = R_\varepsilon(A(x, y, t)e^{i\theta(x, y, t)\varepsilon^{-1}}). \quad (10)$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$ 为小参数(其意义见后), A 为扰动的振幅函数, $\theta\varepsilon^{-1}$ 为波动的位相函数, 而扰动沿 x 和 y 方向的局地波数 m' 和 n' 以及局地瞬时频率 σ' 则为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\varepsilon \partial x} = m' = \varepsilon^{-1}m, \\ \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\varepsilon \partial y} = n' = \varepsilon^{-1}n, \\ \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\varepsilon \partial t} = \sigma' = \varepsilon^{-1}\sigma. \end{cases} \quad (11)$$

扰动槽脊的方向由曲线 $\theta(x, y, t) = \text{常数}$ 的位置决定。例如, 当 m' 和 n' 为常数时, 槽脊和 x 轴的夹角 α 就是

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha', \\ \lg \alpha' = \frac{n'}{m'} = \frac{n}{m}. \end{cases} \quad (12)$$

波长就是 $2\pi/\sqrt{m'^2 + n'^2}$, 而波动沿波射线(垂直于槽脊线)传播的移速 $C = \sigma'/\sqrt{m'^2 + n'^2}$.

设 ϕ' 的水平尺度比基本流场水平尺度要小得多(也只有讨论这种扰动, 将 ϕ 区分为 $\bar{\phi}$ 和 ϕ' 两部分才有实际的意义), 因此, 我们取 $\varepsilon \ll 1$. 当 $L \approx L_0$ 时, 相当于小扰动的波长为 3000 公里左右或更短。这样一来, 我们取 m, n, σ 的量级为 $O(1)$, 即位相 $\theta\varepsilon^{-1}$ 为在时间和空间上的“快变过程”。但设波长和振幅等为“缓变过程”, 即 A 对 (x, y, t) 的各级微商以及 m, n, σ 等亦为其自变量的缓变函数, 其量级亦为 $O(1)$. 此外, 自然要求基本流场为缓变函数, 即 $\bar{\phi}$ 的各级微商的量级为 $O(1)$, 否则不能保证 m, n, σ 为缓变过程(见公式(14)).

今应用 WKBJ 方法来求解本问题, 就是: 将 A 按小参数展开:

$$A(x, y, t) = \phi_0(x, y, t) + \varepsilon\phi_1(x, y, t) + \varepsilon^2\phi_2(x, y, t) + \dots \quad (13)$$

将(13)代入(10), 再代入(7), 并应用(12), 就得到含有 ε 的各幂次项的方程。令各幂次项的系数为零, 就得到描写相速 C 以及 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ 的演变过程的方程。

含 ε^{-3} 的项给出频率关系式:

$$\sigma = -(m\bar{u} + n\bar{v}), \quad (14)$$

其中 $\bar{u} = -\partial\bar{\phi}/\partial y$, $\bar{v} = \partial\bar{\phi}/\partial x$. (14) 式说明扰动以基本气流的风速传播。其实, 当波长较短时, 可略去 $\frac{\mu^{-2}\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}$ 项的作用, 于是 Rossby 公式退化为(14)。

含 ε^{-2} 的项给出:

$$\frac{\partial(m^2 + n^2)\phi_0}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)(m^2 + n^2)\phi_0 = 0. \quad (15)$$

下节我们将进一步分析此式。

四、扰动演变的一般规律性

利用 (11)、(14) 和 (15) 式就可推得关于扰动演变过程的一些重要规律性。

按 (14), 我们可以把 σ 看成 m 、 n 、 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 这四个变量的函数, 记作 $\sigma = \sigma(m, n, \bar{u}, \bar{v})$ 。

于是有 $\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} = -m$, $\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} = -n$ 。而群速度 $\vec{C}_g = C_{gx}\vec{i} + C_{gy}\vec{j}$ 则定义为:

$$C_{gx} = -\frac{\partial \sigma}{\partial m}, \quad C_{gy} = -\frac{\partial \sigma}{\partial n}.$$

在我们这里, 正好有 $C_{gx} = \bar{u}$, $C_{gy} = \bar{v}$ 。

利用 (11) 可得运动学上的关系式

$$\begin{cases} \frac{D_x m}{Dt} = -m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - n \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \\ \frac{D_x n}{Dt} = -m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - n \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \\ \frac{D_x}{Dt} \left(\frac{m^2 + n^2}{2} \right) = -m \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + n \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - n \left(m \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\frac{D_x}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + C_{gx} \frac{\partial}{\partial x} + C_{gy} \frac{\partial}{\partial y} \quad (17)$$

为随波(即随着波包)个别微商。不难通过直接验算推出 (16), 其中要注意到 $\partial m / \partial t = \partial \sigma / \partial x$ 等。(16) 第三式给出波长的变化, 而第一、二式则给出扰动轴线倾角随时间的变化。由此可见, 在非均匀气流情况下, 扰动波长和轴线的方向一般将随时间而变。

关于扰动是否发展和衰减, 可以从振幅 ϕ_0 和动能 $(m^2 + n^2)\phi_0\phi_0^*$ 这两方面来考察, 其中 ϕ_0^* 记 ϕ_0 的共轭复数。

扰动发展, 指的是扰动总能量增加, 故有

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{+\infty} (m^2 + n^2) \phi_0 \phi_0^* dx dy \begin{cases} > 0 & \text{扰动发展} \\ < 0 & \text{扰动衰减} \end{cases} \quad (18)$$

但往往有这样的情况: 总能量虽然增加了, 但扰动的区域增大(例如波长变长), 结果是能量分配到较广大的地区, 振幅反而变小, 于是从外表来看, 扰动反而变得不明显, 甚至好像还有所衰减。因此, 只按 (18) 式来判断有些不足之处。为此, 应再补加上另外的条件——振幅增长与否, 即:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi_0 \phi_0^* dx dy \begin{cases} > 0 & \text{扰动发展} \\ < 0 & \text{扰动衰减} \end{cases} \quad (19)$$

应该指出, 只按 (19) 式作判断也是片面的。因为往往有局地振幅增大而能量反而变小的情况, 这时事实上是扰动能量被基本气流吸收的过程, 只不过扰动占有的区域变小(例如

波长变短),使得扰动集中到很小的地区之内,粗看起来好像扰动明显地增长了起来*,但这是不能持久的,随着扰动能量进一步被吸收,最终是扰动衰减下去。从上面分析可见,判断扰动是否增强,应同时利用(18)和(19)式。

现在我们来判断正压扰动的发展问题,注意到 $C_{gx} = \bar{u}$, $C_{gy} = \bar{v}$, 而且 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$, (15) 式又可写成:

$$\frac{D_g}{Dt} [(m^2 + n^2)\phi_0] = 0. \quad (20)$$

由此还可推得:

$$\frac{D_g}{Dt} [(m^2 + n^2)e_0] = 0, \quad (21)$$

其中 $e_0 = (m^2 + n^2)\phi_0\phi_0^*$ 是单位面积上的动能, $(m^2 + n^2)e_0$ 是涡度平方。最终就有:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{+\infty} (m^2 + n^2)e_0 dx dy = 0, \quad (22)$$

其意义是扰动的总涡度平方守恒。也可以写成总能量改变公式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{+\infty} e_0 dx dy = - \iint_{-\infty}^{+\infty} e_0 \frac{D_g}{Dt} [\ln(m^2 + n^2)] dx dy, \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi_0\phi_0^* dx dy = - \iint_{-\infty}^{+\infty} 2\phi_0\phi_0^* \frac{D_g}{Dt} [\ln(m^2 + n^2)] dx dy. \quad (24)$$

由(23)和(24)式可见:若在演变过程中波长变长 $\left(\frac{D_g}{Dt} [\ln(m^2 + n^2)] < 0\right)$, 则按(18)和(19)式判断,均有扰动发展,反之,扰动衰减。由此推得正压扰动演变过程的一般规律性:

扰动发展时伴随着波长变长,

扰动衰减时伴随着波长变短。

重力-惯性波的演变过程正好与此相反^[9],由此也可以看到快波(重力-惯性波)和慢波在物理性质上是很不相同的。

五、平直基本气流上的扰动

若基本气流是平直的,还可简单地按扰动轴线的指向作出判断。

先讨论一下槽脊的方向。不妨取 $m \geq 0$, 则有: $n > 0$ ——槽脊线由西北方向伸向东南方; $n < 0$ ——槽脊线由东北向指向西南方。为简单起见,我们将套用螺旋波的术语^[6],称前者为导波(或导槽和导脊),而后者为曳波(或曳槽和曳脊)。其实,当进一步考虑到地球曲率的影响时,例如考虑地图投影放大率随空间的变化,则平面 (x, y) 上的直线

* 就局部地区短期天气预报而言,扰动能量向某局部地区集中,也常造成局地强烈天气现象,因而也是有意义的。不过我们这里讨论的是扰动发展的全局问题,因而不能只注意局地现象。

在球面上就是曲线了,因而由西北向东南倾斜的直线就具有导式螺旋的特性了.

若基本气流为西风,即 $\bar{v} = 0$, 则由 (16) 得到:

$$\frac{D_g}{Dt} \left(\frac{m^2 + n^2}{2} \right) = -mn \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (25)$$

$$\frac{D_g}{Dt} \lg \alpha' = - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (26)$$

于是推得:

a. 在急流南区 $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} > 0 \right)$, 导波发展, 波长变长, 轴线渐趋南北方向; 曳波衰减, 波长变短, 轴线渐趋东西指向(扰动被吸收, 变成平直气流).

b. 在急流北区 $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} < 0 \right)$, 导波衰减, 波长变短, 轴线更加倾斜(扰动被吸收, 变成平直气流); 曳波发展, 波长变长, 轴线渐趋南北方向.

作为例子, 我们取 $\varepsilon = 0.3$, 而初始扰动取为:

$$\phi^{(0)} = \frac{-1}{2} e^{-(x'+y')} \cos \frac{x \pm y}{0.3}, \quad (27)$$

(在余弦中取 $x + y$ 则为导槽, 取 $x - y$ 则为曳槽). 基本气流取为:

$$\begin{cases} \bar{\phi} = -y - e^{+2(y-0.4)} & (\text{急流北区}), \\ \bar{\phi} = -y + e^{-2(y+0.4)} & (\text{急流南区}), \end{cases} \quad (28)$$

或

$$\begin{cases} \bar{\phi} = e^{-2(y+0.25)} + \text{常数} & (\text{急流北区}), \\ \bar{\phi} = -e^{+2(y-0.25)} + \text{常数} & (\text{急流南区}). \end{cases} \quad (29)$$

由 (27) 和 (28) 或 (29) 式迭加而成的流场 $\phi = \bar{\phi} + \phi^{(0)}$ 如图 1—5. (28) 式代表基本气流较强(扰动相对较弱), 而 (29) 式则相当于扰动较强的情况. 图 1 和图 2 取 (28) 式, 其余取 (29) 式. 图中实线为等高线, 虚线为大风区内等风速线. 考虑到实际大气中扰动已比较强时才具有曳波的形式, 故对曳波我们只给出相应于 (29) 式的图形.

图 1—5 可以看作是一些天气范式(图 5 和 J. Bjerknes 的疏散槽很相一致). 实际天气图在细节上和这些范式会有许多不同; 取不同的基本气流形式或者不同的扰动形式(例如不同的 $\frac{n}{m}$), 也会有不同的细节, 但基本点是一致的. 就是:

a. 急流南导槽(脊)为发展型, 槽线等高线愈往南愈稀疏; 大风区在槽后, 和槽线大体平行, 风速愈往北愈强.

b. 急流北导槽(脊)为衰减型, 槽线等高线愈往北愈稀疏; 大风区位于槽线西南端附近.

c. 急流南曳槽(脊)为衰减型, 槽线等高线愈往南愈稀疏; 大风区在槽前, 大体上和槽线平行, 风速愈往北愈强.

d. 急流北曳槽(脊)为发展型, 槽线等高线愈往北愈稀疏; 大风区位于槽线东南端附近.

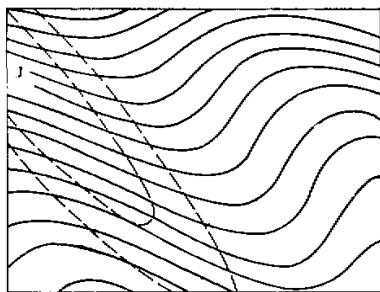


图 1. 急流南导槽(发展)

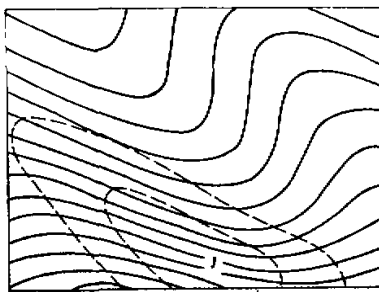


图 2. 急流北导槽(衰减)

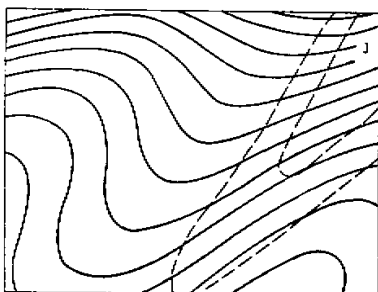


图 3. 急流南导槽(衰减)

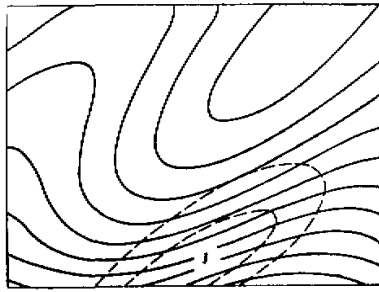


图 4. 急流北导槽(发展)

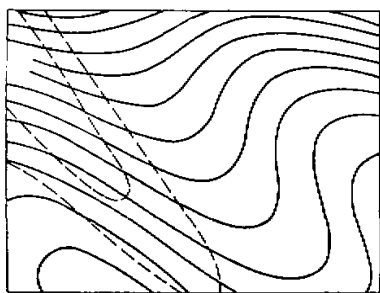


图 5. 急流南导槽(扰动较强)

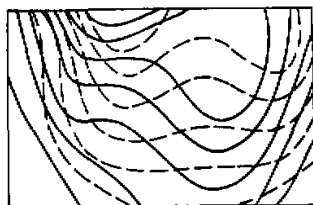


图 6. 迭加于大槽后的发展型导槽

由于(27)–(29)式在几何学上的对称性质, 由图1–5可以立即获得关于脊的天气范式, 只需将纸上下倒置即可(即将 (x, y) 转置为 $(-x, -y)$)。这样, 图1和图2分别对应于衰减型和发展型脊(注意: 大风区在脊前方), 而图3和图4分别对应于发展型和衰减型脊(注意: 大风区在脊后)。此外, 如将纸翻过来看, 则导波变成了曳波, 反之亦然, 例如图3变成了图5。

除图2外, 上列天气范式在天气图中常可找到, 由理论分析所得的演变特性和实际经验亦相符合。但图2在实际天气图中不常见到, 而且实际上导槽大都是发展的, 其原因在于此时斜压过程起作用, 温度平流效果使槽得到发展。

六、非均匀基本气流上的扰动

只要能数学式子描述非均匀基本气流, 则按第四节的公式亦可方便地讨论扰动演变的特点。不过, 由于小扰动的尺度较小, 也可以按[5]所建议的那样, 把空间分区, 在每一区内基本气流可看作是平直的, 注意到 $\rho \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 项在讨论扰动 ϕ_0 的发展时不起作用, 因此可以把 x 轴指向基本气流的方向, 从而甚至可以简单地应用上节的结果来进行讨论。

作为例子, 我们讨论在大槽后迭加上一个小槽的演变过程, 这是最常见的情况。如果小槽具有急流南导槽的样子, 它将发展、东移, 槽线加深加宽, 最后发展成一大槽, 取代原来的大槽。不论直接应用第四节的理论还是应用第五节的结果进行计算, 结果都如此。如果对这种形势的天气图进行波谱分析, 我们将看到超长波在向西“后退”, 即所谓“超长波后退”, 但是造成这种表面上后退的原因正好是扰动的发展、槽线加宽和东移。图 6 就是这种过程的一个概要图。其中虚线为发展后的形势。

叶笃正同志和作者就本工作进行过多次有益的讨论, 谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] Rossby, C.G., *J. Mar. Res.*, 2, 38—55, 1939.
- [2] Yeh, T. C. (叶笃正), *J. Meteor.*, 1—16, 1949.
- [3] Kuo, H. L. (郭晓岚): *J. Meteor.*, 1949.
- [4] 叶笃正, 气象学报, 34 No.1, 1964.
- [5] 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 科学出版社, 1979.
- [6] 巢纪平、叶笃正, 大气科学, 1 卷, 2 期, 1977.

ON THE EVOLUTION PROCESS OF DISTURBANCES IN THE BAROTROPIC ATMOSPHERE

Lu Pei-sheng Zeng Qing-cun

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

The evolution process of disturbances in the barotropic atmosphere is investigated by WKB method. It is suggested that the criterion of developing perturbation should be the growth both of its total energy and mean amplitude. It is shown by the theoretical analysis that the developing perturbations stretch its wavelength with time, and the damping ones shorten its wavelength.

If the basic current is purely zonal, the “leading waves” in the southern region of the jetstream and the “trailing waves” in the northern region are developing, and the axis (trough or ridge) tends to be N-S direction; While the leading waves in the northern region of the jetstream and the trailing waves in the southern region are damping ones, its axis tends to be W-E direction. The cases of nonzonal basic current are also discussed. It is concluded that some processes of “retrogradation of ultralongwave” are in fact due to the eastly propagation of developing and broadening trough.