

试论正压原始方程的计算稳定性

倪允琪

(南京大学气象系)

提 要

本文讨论了正压原始方程的差分方程的计算稳定性问题,指出该方程具有两类不同的计算稳定性条件,它们分别与重力波的强度和速度有关。本文还分析了引起非线性计算不稳定的原因,并认为抑制非线性计算不稳定问题可归结为抑制重力波强度不随积分步次的增长而不断增大的问题。

一、前 言

正压原始方程的数值计算遇到的最大困难是非线性方程的计算不稳定问题。这种计算不稳定无法用缩小时间步长或空间步长加以克服。这一现象首先由 N. Phillips^[1] 提出讨论, A. Arakawa^[2]、Lilly^[3]、A. Grammeltriedt^[4] 等对这一问题作了进一步研究。他们指出,由于用有限波谱去描述无限波谱的非线性相互作用项,引起波长为 2—4 个格距的短波虚假增幅,这种增幅的不断积累,造成小尺度波动能量的“爆发性”增长,以致引起数值计算的不稳定。又指出,控制这种计算不稳定问题可归结为抑制 2—4 个格距的短波分量连续增长的问题,并提出了一系列确保计算稳定的办法。

但是,我们在用正压原始方程作台风路径预告的实践中发现:第一,虽然采用了总能量守恒的计算方案^[5],但在数值积分的最初几个步次中,即在台风中心邻域产生有规则分布的强烈短波,这种不稳定短波与台风强度有明显的关系;第二,最易产生不稳定短波的地方为台风中心邻域、急流附近、低纬地区以及预告域的边界处;第三,同一计算方案采用适合于模式的平衡风压场作为初始场和采用不平衡的风压场作为初始场的计算稳定性大不一样,前者稳定,后者容易产生不稳定短波。上述现象都难于用 Phillips 等人的理论加以解释。而且,至今很少研究这类非线性差分方程数值解的收敛性问题,这就涉及到这些数值解是否真是微分方程的近似解。由此可见,继续研究正压原始方程的差分方程的计算稳定性和收敛性问题,进一步揭露产生这种不稳定的机制对于设计原始方程合理的计算方案有重要意义。

二、正压原始方程的差分方程的收敛性与稳定性

具有自由表面、无粘性、二维流体的运动方程和连续方程可以写为

1979年8月15日收到修改稿。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{i=1}^d A_i(\mathbf{u}, X) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + a(\mathbf{u}, X) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}(X, 0) = \mathbf{u}_0(X)$$

且 $-\infty < x_i < \infty$, $0 \leq t \leq 1$, $d = 2$, $\mathbf{u}$ 是矢量, 写为

$$\mathbf{u} = (u, v, \phi)^T \quad (2.2)$$

而

$$A_1 = - \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 \\ \phi & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_2 = - \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & \phi & v \end{pmatrix},$$

$$a = - \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad (2.3)$$

其中 u, v, ϕ 和 f 均为气象上常用符号, (2.1) 式是一组拟线性双曲型偏微分方程组,

(2.1) 式中的时间、空间导数采用中心差逼近, 令

$$\mathbf{u}^n = (u_{j,k}^n, v_{j,k}^n, \phi_{j,k}^n, u_{j,k}^{n-1}, v_{j,k}^{n-1}, \phi_{j,k}^{n-1})^T \quad (2.4)$$

其中 j, k 分别为 x, y 方向格点序数, n 为时间层数. 这样, 便得到 Strang^[6] 曾研究过的拟线性双曲型方程组(2.1)式的差分方程, 即

$$\mathbf{u}^{n+1} = \varphi(\mathbf{u}^n, X, \Delta t) \quad (2.5)$$

首先假定 (2.5) 式和 (2.1) 式是相容的. Strang 指出, 只要 (2.1) 式中的 $\mathbf{u}, A_i, a$ 和 (2.5) 式中的 φ 有足够高阶连续导数存在, 那么, 就有

$$U(X, t, \Delta t) = \mathbf{u}(X, t) + \sum_{m=1}^r (\Delta t)^m \mathbf{u}_m(X, t) \quad (2.6)$$

并满足

$$U(X, t + \Delta t, \Delta t) = \varphi(U(X, t, \Delta t), X, \Delta t) + O[(\Delta t)^{r+1}] \quad (2.7)$$

其中 $\mathbf{u}_m$ 称为基本误差项.

定义 $\mathbf{E}^n = U(n\Delta t) - \mathbf{u}^n$, (2.7) 式与 (2.5) 式相减, 并应用中值定理, 有

$$\mathbf{E}^{n+1} = \sum_{(\mu)} c_{(\mu)}^n e^{i\mu\theta} \mathbf{E}^n = c_n \mathbf{E}^n \quad (2.8)$$

其中 c_n 称为 φ 的一阶变分算子, $c_{(\mu)}^n$ 为雅可比矩阵, 即

$$c_{(\mu)}^n = \begin{pmatrix} \partial \varphi_1 / \partial u_{1\mu}^n & \partial \varphi_1 / \partial u_{2\mu}^n & \cdots & \partial \varphi_1 / \partial u_{6\mu}^n \\ \partial \varphi_2 / \partial u_{1\mu}^n & \partial \varphi_2 / \partial u_{2\mu}^n & \cdots & \partial \varphi_2 / \partial u_{6\mu}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial \varphi_6 / \partial u_{1\mu}^n & \partial \varphi_6 / \partial u_{2\mu}^n & \cdots & \partial \varphi_6 / \partial u_{6\mu}^n \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

上式中的 μ 为差分算子 φ 中所用到的网格序数, s 为 $\mathbf{u}^n$ 中的元素数.

Strang^[6] 证明了若 c_n 是 l_2 稳定的, 即

$$\left\| \prod_{i=1}^n c_i \right\| \leq K \quad (2.10)$$

其中 K 为有界常数. 那么, 对于充分小的 Δt 有

$$\max_x |E^n| \leq N(\Delta t)^{q+1} \quad (2.11)$$

其中 q 为计算精度的阶数。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有

$$u^n = U(n\Delta t) - E^n = u(X, n\Delta t) + O(\Delta t^q) \quad (2.12)$$

这表明, 差分方程(2.5)式的解收敛于微分方程(2.1)式的解。根据 Courant 和 Lax 存在性定理^[6]可以推论只要初值函数充分光滑, 则 u 、 A_i 和 α 必有足够高阶连续导数存在。而且, 此时 φ 有足够高阶连续导数存在的条件一般也能满足。

根据(2.9)式, (2.5)式中 φ 的一阶变分算子为

$$c_n = A - \sigma B D_x - \sigma c D_y \quad (2.13)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} A' & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma = \Delta t / \Delta x$, $D_x \alpha = \alpha_{j+1, K} - \alpha_{j-1, K}$, $D_y \alpha = \alpha_{j, K+1} - \alpha_{j, K-1}$, α 为任意变量, I 为单位阵, 而

$$A' = \begin{pmatrix} -\sigma D_x^M u_{j, K}^n & 2f_{j, K} \Delta t - \sigma D_y u_{j, K}^n & 0 \\ -2f_{j, K} \Delta t - \sigma D_x v_{j, K}^n & -\sigma D_y^M v_{j, K}^n & 0 \\ -\sigma D_x \phi_{j, K}^n & -\sigma D_y \phi_{j, K}^n & 0 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} u_{j, K}^n & 0 & 1 \\ 0 & u_{j, K}^n & 0 \\ \phi_{j, K}^n & 0 & u_{j, K}^n \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} v_{j, K}^n & 0 & 0 \\ 0 & v_{j, K}^n & 1 \\ 0 & \phi_{j, K}^n & v_{j, K}^n \end{pmatrix}$$

在 A' 中, $D = D_x u_{j, K}^n + D_y v_{j, K}^n$, M 为示踪符号。因此, 若 φ 是相容算子, 初值函数充分光滑, (2.13)式的 c_n 又是 l_2 稳定的, 则(2.5)式的解收敛于(2.1)式的解。

同样, 可以证明(2.5)式的计算稳定性。如果初值函数有误差 ρ_0 , (2.5)式的数值解为 $\tilde{u}_n$, 且满足

$$\tilde{u}_{n+1} = \varphi(\tilde{u}_n, X, t, \Delta t) \quad (2.14)$$

$$\tilde{u}_0 = u_0 + \rho_0$$

定义 $\rho^n = \tilde{u}_n - u^n$, (2.14)式减去(2.5)式, 应用中值定理, 得到类似于(2.8)式的误差方程, 并递推得到

$$\rho^{n+1} = \prod_{i=0}^n c_i \rho_0 \quad (2.15)$$

$$\text{若 } \left\| \prod_{i=0}^n c_i \right\| \leq K, \text{ 则 } \|\rho^{n+1}\| \leq K \|\rho_0\| \quad (2.16)$$

其中 K 为有界常数。

由于把差分方程解的有界性作为稳定性定义对非线性差分方程仍然适用。因此, 由(2.16)式看到, 若 φ 的一阶变分算子 c_n 是 l_2 稳定的, 则差分方程的计算也是稳定的。

比较上述收敛性和稳定性条件可以看到, 当正压原始方程的差分方程的解收敛于微分方程的解时, 则差分方程计算是稳定的; 反之, 差分方程计算是稳定的, 它的解不一定收敛于微分方程的解, 后者还依赖于初值函数的光滑性。

三、正压原始方程的差分方程的稳定性判据

如果 E^n 用二维的 Fourier 级数表示, 即

$$E^n = \sum_{\alpha, \beta} \hat{E}^z e^{i(\alpha x + \beta y)} \quad (3.1)$$

其中 α, β 分别为 x, y 方向上的波数, $\hat{E}^z$ 是与时间变量有关的振幅. φ 的一阶变分算子 c_n 也可写成

$$c_n = \sum_{j'=0}^2 A_{j'} e^{i(j'-1)\alpha} + \sum_{k'=0}^2 B_{k'} e^{i(k'-1)\beta} \\ = Q_F(A_{j'}, B_{k'}, \alpha, \beta) \quad (3.2)$$

设 λ 是 $A_{j'}, B_{k'}$ 中绝对值最大的特征值. 若 $A_{j'}, B_{k'}$ 是对称矩阵, 有 $\|A_{j'}\| \leq \lambda$ 和 $\|B_{k'}\| \leq \lambda$, 则 $\|Q_F(A_{j'}, B_{k'}, \alpha, \beta)\| \leq |Q_F(\lambda, \alpha, \beta)|$; 否则, $\|Q_F(A_{j'}, B_{k'}, \alpha, \beta)\| \geq |Q_F(\lambda, \alpha, \beta)|$. 因此, 对于对称矩阵 $A_{j'}, B_{k'}$ 来讲, $|Q_F(\lambda, \alpha, \beta)| \leq 1 + O(\Delta t)$ 是 $\|Q_F(A_{j'}, B_{k'}, \alpha, \beta)\| \leq 1 + O(\Delta t)$ 的充分条件; 否则, $|Q_F(\lambda, \alpha, \beta)| \leq 1 + O(\Delta t)$ 仅是 $\|Q_F(A_{j'}, B_{k'}, \alpha, \beta)\| \leq 1 + O(\Delta t)$ 的必要条件.

把(3.2)式改写为

$$Q_F(\lambda, \alpha, \beta) = \lambda \left\{ \left[\sum_{j'=0}^2 \cos(j'-1)\alpha + \sum_{k'=0}^2 \cos(k'-1)\beta \right] \right. \\ \left. + i \left[\sum_{j'=0}^2 \sin(j'-1)\alpha + \sum_{k'=0}^2 \sin(k'-1)\beta \right] \right\} \quad (3.3)$$

要使 $|Q_F^2|$ 在 $(0, \pi)$ 内不是增函数, 必须有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} |Q_F^2| \leq 0 \quad (3.4)$$

因此, 对(3.3)式求 $\frac{\partial}{\partial \alpha} |Q_F^2|$, 这样, 便得到

$$\cos \alpha + \cos \beta + 1 \geq 0 \quad (3.5)$$

(3.5)式表明当 α 在 $(0, \pi)$ 内和 β 在 $(0, \pi/2)$ 内或 α 在 $(0, \pi/2)$ 内和 β 在 $(0, \pi)$ 内, $|Q_F^2|$ 是不增的. 而 α 在 $(\pi/2, \pi)$ 内和 β 在 $(\pi/2, \pi)$ 内 $|Q_F^2|$ 有拐点, 但在这区间内 $|Q_F^2|$ 最大不超过 $2|\lambda|$. 根据上述分析, 得图 1.

由图 1 看到, 要在 $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi, \pi/2 \leq \beta \leq \pi$

或 $\alpha = \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ 区间内使 $|Q_F| \leq 1 + O(\Delta t)$, 必须有 $2|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t)$, 而 $|\lambda^A| = 2|\lambda^{A_1}| = 2|\lambda^{A_2}|$, 因此, 若

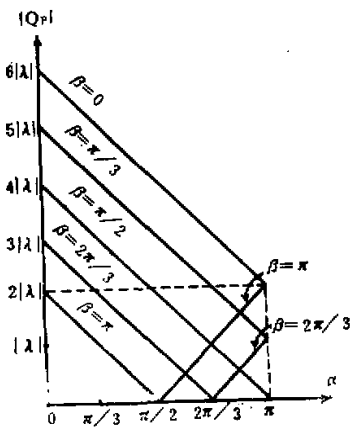


图 1

$$\begin{cases} |\lambda^A| \leq 1 + O(\Delta t) \\ |\lambda^B| \leq 1/2 + O(\Delta t) \\ |\lambda^C| \leq 1/2 + O(\Delta t) \end{cases} \quad (3.6)$$

成立时(其中 λ^A 、 λ^B 、 λ^C 分别为 A 、 B 、 C 的特征方程的特征根), 则 $|Q_p| \leq 1 + O(\Delta t)$.

分析 $|Q_p^2|$ 在 y 方向的变化(随 β 的变化)可以得到类似的结果.

在(2.17)式中, 矩阵 A 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} A' - \lambda^A I & I \\ I & -\lambda^A I \end{vmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

展开(3.7)式, 由于 $(2f_{i,k}\Delta t + \sigma D_y u_{i,k})(2f_{j,k}\Delta t + \sigma D_x v_{j,k}) \ll 2$, 因此, 有

$$\begin{cases} (\lambda^A)^2 + \sigma D \lambda^A - 1 = 0 \\ (\lambda^A)^2 - 1 = 0 \\ (\lambda^A)^2 + \sigma D^M \lambda^A - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

其中 $D^M = D_x^M u_{i,k}^* + D_y^M v_{j,k}^*$, $D = D_x u_{i,k}^* + D_y v_{j,k}^*$. 由(3.8-3)式得

$$\begin{aligned} \max |\lambda^A| &= \frac{1}{2} \sigma |D^M| + (\sigma^2 |D^M|^2 / 4 + 1)^{1/2} \\ &\approx 1 + |D_x^M| \Delta t \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 $D_x^M = \frac{1}{2\Delta x} (D_x u_{i,k}^* + D_y v_{j,k}^*)$. 由(3.8-1)式可以得到同样结果.

若设(2.10)式中的 $K = c$, 则有

$$|\max_i c_i| \leq e^{\Delta t/T} \approx 1 + \Delta t/T \quad (0 \leq n\Delta t \leq T) \quad (3.10)$$

由(3.6)式知道, 要使 $|Q_p| \leq 1 + O(\Delta t)$, 必须有 $\max |\lambda^A| \leq 1 + O(\Delta t)$, 而 $c_n = Q_p$, 比较(3.9)式与(3.10)式, 得

$$|D_x^M| \leq 1/T \quad (3.11)$$

对于大尺度系统的短期数值预报来讲, $O(T) \sim 10^5$ 秒, 所以 $|D_x^M| \leq 10^{-5}$ 秒 $^{-1}$. 这就表明, 对于大尺度系统的短期数值预报来讲, 在允许有误差有限增长条件下, 只要 $|D_x^M| \leq 10^{-5}$ 秒 $^{-1}$, 则矩阵 A 的范数小于等于 $1 + O(\Delta t)$. 又表明影响解的收敛性和计算稳定性的散度不仅有连续方程中的散度项 D , 而且还有运动方程中自身非线性相互作用项中的 D^M . 这充分揭示了方程中的非线性项对解的收敛性和计算稳定性的影响.

B 矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} B' - \lambda^B I & 0 \\ 0 & -\lambda^B I \end{vmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

C 矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} C' - \lambda^C I & 0 \\ 0 & -\lambda^C I \end{vmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

由(3.12)与(3.13)式分别求得 λ^B 、 λ^C , 根据(3.6)式, 得到

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_{i,k} |U_{i,k}^* \pm \sqrt{\phi_{i,k}^*}|} \quad (3.14)$$

其中 $U_{i,k}^*$ 是 $u_{i,k}^*$ 和 $v_{j,k}^*$ 的合成风矢.

上述分析清楚表明,要使差分方程(2.5)式计算稳定,必须同时满足 $|D_t^M| \leq 10^{-5} \text{ 秒}^{-1}$ 和(3.14)式。我们把 $|D_t^M| \leq 10^{-5} \text{ 秒}^{-1}$ 称为非线性差分方程的第一类稳定性条件;而把(3.14)式称为非线性差分方程的第二类稳定性条件。显然,第一类稳定性条件与 $\Delta t, \Delta x$ 无关,而仅依赖于旋转正压大气运动的散度绝对值的大小。叶笃正等^[4]指出,大气运动的散度与地转偏差成正比,而地转偏差的大小又与由它激发出来的重力波的强度成正比。由此,可以推论,第一类非线性计算稳定性判据与重力波强度有密切关系;第二类非线性计算稳定性条件与 $\Delta t, \Delta x$ 选择有关,而 $\Delta t, \Delta x$ 选择与重力波速度有关,因此,第二类非线性稳定性判据与重力波速度有密切关系。

四、非线性计算稳定域的性质与特点

若差分方程(2.5)式计算是稳定的,而且它的解收敛于微分方程(2.1)式的解,则差分方程的解具有微分方程解的性质和特点。因此,我们可以研究微分方程解的性质和特点来说明收敛于这类微分方程解的差分方程解的性质和特点。

为简单起见,假定 u, v 中仅是 x, t 的函数,这样把(2.1)式改写为

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u+2c) = fv \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u-2c) = fv \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right] v = -fu \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $c = \sqrt{\phi}$,其它均为常用符号。

(4.1)式可以写为普遍形式:

$$U_t^K + \alpha U_x^K = D^K(U(x^K, t)) \quad (4.2)$$

$$U_0^K(x) = G^K(x, 0) \quad (4.3)$$

其中 α 为特征线斜率。

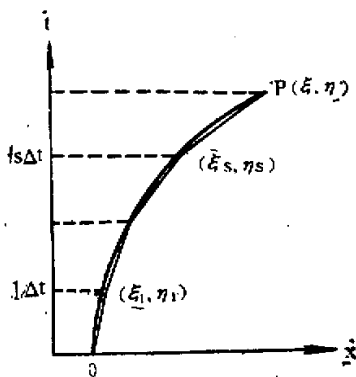


图 2

Courant 和 Lax^[5]证明(4.2)式在 $G^K(x), D^K$ 具有一阶连续导数,并满足 Lipschitz 条件,则在 x 轴邻近 $|x-x_0| < a, t \geq 0$ 的上半平面适当的邻域内存在唯一的解,而且这解满足初始条件(4.3)式,并有满足 Lipschitz 条件的连续一阶导数。因此,可以设

$$\begin{cases} |\alpha| \leq r; |\alpha_x| \leq r/\Delta; \\ |u_{0x}| = D_0; |v_{0x}| = \zeta. \end{cases} \quad (4.4)$$

其中 $\Delta = |x_1 - x_2|$ 。

为了近似积分(4.1)式,用纵坐标间隔为 Δt 的折线来逼近特征线 PO ,如图2。亦就是说,假定在 Δt 时段内特征线斜率不变。这样,(4.1)式沿

斜率为 $(u + c)$ 的特征线积分可以写为:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\Delta t} + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} + \cdots + \int_{s\Delta t}^{\eta} \right) d(u + 2c) = \int_0^{\eta} D^K(U(x^K, t)) dt \\ \therefore & \alpha(\Delta t) = \alpha(0), \alpha'(\Delta t) = \alpha(2\Delta t), \cdots \alpha'(s\Delta t) = \alpha(\eta) \\ \therefore & u(\xi, \eta) = u(x^K(0; \xi, \eta)) - \int_0^{\eta} D^K(U(x^K, t)) dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

同理,有

$$c(\xi, \eta) = c(x^K(0; \xi, \eta)) + \int_0^{\eta} D^K(U(x^K, t)) dt \quad (4.6)$$

(4.5)式与(4.6)式等号两端相加,得

$$u(\xi, \eta) + c(\xi, \eta) = u(x^K(0; \xi, \eta)) + c(x^K(0; \xi, \eta)) \quad (4.7)$$

若(4.1)式沿斜率为 $(u - c)$ 的特征线积分,并作上述同样运算,又有

$$u(\xi, \eta) - c(\xi, \eta) = u(x^K(0; \xi, \eta)) - c(x^K(0; \xi, \eta)) \quad (4.8)$$

(4.7)和(4.8)式表明,在假定 Δt 时段内特征线斜率不变的条件下,最大重力波速 $\max |u_i^n \pm c_i^n|$ 不随积分步次的增长而增大。可见,第二类非线性计算稳定域只要根据初值确定以后,在整个积分时段内是一常量。

(4.5)式对 ξ 求导数,得

$$\begin{aligned} u_{\xi}(\xi, \eta) &= u_{0x}(x^K(0; \xi, \eta))x_{\xi}^K - \int_0^{\eta} \sum_{v=1}^3 D_{\xi}^K v G_x^v x_{\xi}^K dt \\ &= u_{0x}(x^K(0; \xi, \eta))x_{\xi}^K + \int_{\eta}^0 f \frac{v_{0x}}{u_{0x}} u_{0x} x_{\xi}^K dt \end{aligned}$$

上式等号两端取绝对值,(4.4)式代入,得

$$|u_{\xi}| \leq |u_{0x}| \cdot |x_{\xi}^K| \cdot \left(1 + \frac{f\zeta_0}{D_0} \delta \right) \quad (4.9)$$

其中 $\delta = \eta$ 。

根据特征线斜率定义,先对 t 积分,然后对 ξ 求导,即能得 x_{ξ}^K 的估计式:

$$\max |x_{\xi}^K| \leq (1 - \delta r / \Delta)^{-1} \quad (4.10)$$

(4.10)式代入(4.9)式,有

$$|u_{\xi}| \leq \left(1 + \frac{f\zeta_0}{D_0} \delta \right) (1 - \delta r / \Delta)^{-1} |u_{0x}| \quad (4.11)$$

如果不考虑 f 随 ν 的变化,则有

$$f\zeta_0 = \nabla_h \cdot (-f\mathbf{k} \wedge \mathbf{V}_{0h})$$

其中 ∇_h 为水平倒三角算子, $\mathbf{k}$ 为铅直方向单位矢, $\mathbf{V}_{0h}$ 为初始水平风矢。由散度方程表明, $\nabla_h \cdot (-f\mathbf{k} \wedge \mathbf{V}_{0h})$ 即是柯氏力分布不均匀引起的散度变化项,记为 D'_{0x} ,因此,(4.11)式又写为

$$|u_{\xi}| \leq (1 + D'_{0x} \delta / D_0) (1 - \delta r / \Delta)^{-1} |u_{0x}|$$

或

$$|u_{\xi}| \leq A_K |u_{0x}| \quad (4.12)$$

由(4.11)与(4.12)式看到, A_K 始终大于 1. 这表明 (4.1) 式的解函数的空间导数最大可增大到初值函数空间导数的 A_K 倍.

由于 u 、 v 仅是 x 和 z 的函数, 则有 $|D_z| = |u_z|$ (或 $|u_x|$), (4.12) 式又可理解为旋转正压大气运动的散度随积分步次的增长而增大, 这就意味着重力波的强度随积分步次的增长而不断增强, 当增强到第一类稳定域不满足时即导致计算不稳定. 我们又知道, 重力波的强度与地转偏差成正比, 而 $|u_z|$ 的大小与 $|u_{0z}|$ 成正比, 由此可以推论, 凡初始地转偏差比较大的地方, 例如急流附近、台风邻域、低纬地区以及有限预告域边界处等都比较容易出现计算不稳定. 同样, 不平衡的初始风压场在数值积分时激发出强烈重力波也对计算稳定性产生不利影响. 由(4.12)式又看到, 影响 A_K 的最主要的因子是特征线斜率梯度(特征线呈辐合、辐散的程度)和由于柯氏力分布不均匀引起的散度变化率.

综上所述, 第一类非线性稳定域完全取决于重力波强度, 而重力波的强度随积分步次的增长而不断增强. 因此, 经过若干步次的数值积分, 第一类计算稳定域必然遭到破坏; 而第二类非线性计算稳定域具有与线性计算稳定域类似的特点, 在 Δt 选定后, Δt 完全取决于重力波速.

五、非线性计算不稳定的抑制

目前, 为了使正压原始方程的差分方程计算稳定, 通过各种类型的平滑算子或对高频波具有阻尼作用的差分方案直接抑制虚假短波的增长. 这些方法有以下三个问题需要研究:

第一, 正压原始方程的一个好的计算方案不仅要求计算稳定, 而且要求其差分方程的解收敛于微分方程的解. 目前, 这方面的研究比较少. 因此, 单纯强调计算稳定是不够的.

第二, 计算稳定严格讲并不仅仅指短波而言, 短波误差的增长破坏了气象图象的真实性, 而长波误差的增长破坏了气象图象的正确性. 因此, 单纯考虑短波误差的增长是不够的, 只有同时考虑长波误差对计算结果的影响才能完整地解决预告精度和由此产生的可预告性的长度问题.

第三, 有的计算方案表面上抑制了短波的增长, 实际上也抑制了地转偏差的产生, 影响了系统的发生、发展和消亡的预告, 使原始方程模式的计算结果并不比地转或准地转模式来得好.

可见, 上述方案虽然能得到计算稳定的效果, 但在理论上仍存在问题. 根据我们对计算稳定性分析, 认为可以把抑制非线性不稳定问题归结为控制重力波强度不随积分步次的增长而不断增大的问题. 因此, 我们可以设想尽量少依靠差分格式来抑制重力波的发展. 众所周知, 大气运动中存在着两个基本过程, 即演变过程和适应过程. 演变过程通过非线性平流不断激发出地转偏差; 适应过程通过重力波的频散, 把有限空间地转偏差的能量频散到整个空间, 使不平衡现象消失. 我们模拟旋转正压大气中的演变过程和适应过程的上述物理特性, 提供满足第一类稳定性条件的“初值”, 从而完成非线性差分方程的数值计算. 这样既保留对大气运动有重要作用的高频波动(在模式中时时产生, 时时消

灭),又抑制非线性计算不稳定的发展。这是一条值得探索的途径。这一问题将另文详细讨论。

在工作过程中得到南京大学气象系金汉良、伍荣生老师以及中国科学院大气物理研究所王宗皓老师的指导,在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] Phillips, N. A., An example of non-linear computational instability, The atmosphere and the sea in motion, Bort Bolin, ed., Rockefeller Institute Press, New York, 1959.
- [2] Arakawa, A., *J. Computational Physics*, 1, 119—143, 1966.
- [3] Lilly, D. K., *Monthly Weather Review*, 93, No. 1, 1965.
- [4] Grammeltradt, A., *Monthly Weather Review*, 97, No. 5, 384—404, 1969.
- [5] 上海台风研究协作组, 预告西太平洋台风路径的正压原始方程, 1974年台风会议文集, 上海人民出版社, 87—96.
- [6] Strang, G., *Numerische Mathematik*, 6, 37—46, 1964.
- [7] 叶笃正, 李麦村, 大气运动中的适应问题, 科学出版社, 1965.
- [8] Courant, R. and Lax, P., *Communications on pure and applied mathematics*, 2, 255—273, 1949.

ON THE COMPUTATIONAL STABILITY OF THE BAROTROPIC PRIMITIVE EQUATIONS

Ni Yun-qi

(Department of Meteorology, Nanking University)

Abstract

In this paper, using the strang's convergence theory on the non-linear difference equations, the important problem of the computational stability for the difference equations of the barotropic primitive equations is discussed. It is pointed out that there are two kinds of computational stability conditions for difference equations of non-linear barotropic primitive equations, which are associated with the intensity and the velocity of the gravity wave. The cause of the computational instability of the difference equations of the barotropic primitive equations is analysed. It is pointed out that the problem of restraining the computational instability is a matter of controlling the increase of the intensity of the gravity wave with the time integration steps.