

不等距差分格式的计算紊乱问题

曾庆存 李荣凤

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文用物理分析方法研究不等距差分格式和大小网格相配套的格式中存在的计算紊乱问题,指出在一般情况下,当扰动由粗网格进入细网格时,在粗网格一侧将产生二倍格距的寄生伪反射;若扰动由细网格进入粗网格,在细网格一侧也产生上述的寄生伪反射;而且当振动频率较高(“超高频条件”^[1])时,波动能量几乎全部变为寄生伪反射波,产生严重的计算紊乱。因此设计计算格式时,必须注意避免形成“超高频条件”。文中还比较了三种构造不等距差分格式的方法:(a)坐标变换法(b)加权平均法(c)Isaacson法。指出:当不出现超高频条件且波长 $>6\delta$ 时,三法都可给出较小的寄生伪反射率,而以(b)法为最优。但当波长较短且无超高频条件时只有(b)法才能给出较小的寄生伪反射率。

一、引 言

现代数值预报工作中的一个趋势是使用大小网格配套的方法,利用大格距网格预报大范围形势,而小格距网格则只用来作局部地区的比较精细的预报。这种方法的优点是显而易见的,它可以兼顾大形势和局部天气系统,同时不致因考虑了后者而过分增大了计算量。但也存在着一些问题,主要的是两套网格交界的地区,必须在计算上作一些处理,这样一来就形成了一些“计算边界条件”,常常会产生计算紊乱即寄生波现象。如果处理不好,甚至会使预报丧失实用意义。所以交界区的计算方法值得深入研究。

必须指出,上述大小网格配套的方法其实是一般的不等距(甚至是不规则的)网格的一种特殊情况。自从有限元方法发展起来,不等距网格在计算力学中广泛采用,当然它也可以在气象问题中得到应用。但在一般的不等距网格中,上述的计算紊乱问题仍然存在。这是因为差分方程在物理属性上总不可能和原来的物理问题完全一致。我们曾利用物理的观念十分清晰地揭露出差分格式产生计算紊乱的机理^[1]。Matsuno^[2]则利用反射率的概念分析边界的影响,得到很清晰的结果。在使用不等距网格时,差分格式又具有沿空间为不均匀的属性,这又进一步使它带来一些新的问题。

本文将应用物理分析的方法讨论不等距网格中所特有的寄生波问题,同时指出克服它的一些方法。

二、几种不等距差分法

为了简单明确地揭示不等距网格产生寄生波的机理, 我们这里将只讨论一维空间中的问题。设沿 x 轴布网格点 x_j , 并设网格点向两边伸至无穷, 即 $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 此时, 最基本的问题是如何计算网格点上的微商 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j$ 。今给出下列三种最简单的方法:

1. 坐标变换法

我们^[3]曾提出用坐标变换的方法, 将不等距网格化为等距网格, 这些方法后来在工作中得到了广泛的应用^[4]。今引入新坐标 $\xi = \xi(x)$, 使在这新坐标中网格为等距的。记 $\xi_j = \xi(x_j)$ 。取 $\xi_{j+1} - \xi_j = \delta\xi$ 为常数。在新坐标中用中央差来计算微商, 就有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j \approx \frac{\beta_j}{2\delta\xi} (F_{j+1} - F_{j-1}) \quad (1)$$

其中 β_j 为 $\frac{d\xi}{dx}$ 在点 j 上的值。于是将不等距网格中具有常系数的问题, 化为在等距网格中具有可变系数的问题了。

2. 加权平均法

先用单向差分分别逼近左微商和右微商, 而后取其加权平均值算作该点的微商的近似值, 即取^[5]

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j \approx \alpha_j \frac{F_j - F_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} + (1 - \alpha_j) \frac{F_{j+1} - F_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (2)$$

$$0 \leq \alpha_j \leq 1$$

系数 α_j 可以依赖于 j , 它可以由经验来选定, 也可以通过某些理论方法来确定。例如, 设函数在 x_j 附近用抛物线逼近, 其系数由 F_{j-1} , F_j , F_{j+1} 三点确定, 由此直接算出 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j$ 即得 (2) 式右端, 而

$$\alpha_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}}$$

3. Isaacson 法^[6]

这种方法由 Isaacson 首先提出, 只适用于分段为等距网格的情况。为简单起见, 今取有格距为 δx_- 和 δx_+ 的两套网格, 只在 $x = 0$ (取为 x_0) 处重叠, 其分布如图 1

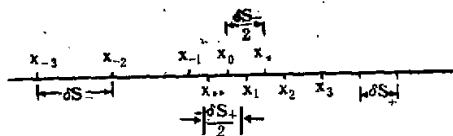


图 1

当 $|j| \geq 2$ 时都用中央差, 即取

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j \approx \frac{1}{2\delta s_-} (F_{j+1} - F_{j-1}) & (j \leq -2) \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j \approx \frac{1}{2\delta s_+} (F_{j+1} - F_{j-1}) & (j \geq 2) \end{cases} \quad (3)$$

以及

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{-1} \approx \frac{1}{2\delta s_-} (F_* - F_{-2}) \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 \approx \frac{1}{2\delta s_+} (F_2 - F_{**}) \end{cases} \quad (4)$$

这里 F_* 和 F_{**} 分别为 F 在两个辅助点 x_* 和 x_{**} 上的值, 在[6]中引入了计算边界条件, 他取函数及其微商在 x_0 上的某种“连续性”, 以此来消去 F_* 和 F_{**} , 即取:

$$\begin{cases} \frac{(F_* + F_{-1})}{2} = \frac{(F_1 + F_{**})}{2} \\ \frac{(F_* - F_{-1})}{\delta s_-} = \frac{(F_1 - F_{**})}{\delta s_+} \end{cases} \quad (5)$$

或即

$$\begin{cases} F_* = \frac{2}{1+b} F_1 - \frac{1-b}{1+b} F_{-1} \\ F_{**} = \frac{1-b}{1+b} F_1 + \frac{2b}{1+b} F_{-1} \end{cases} \quad (5)'$$

$$b = \frac{\delta s_+}{\delta s_-}$$

三、波动方程的不等距差分格式

我们取最简单的波动方程为例

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mu^2 \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (6)$$

其中 μ^2 为常数. 为简单起见, 取 $x > 0$ 和 $x < 0$ 分别有格距为 δs_+ 和 δs_- 的两套网格. 当用 Isaacson 法时就用图 1 的网格, 若用坐标变换法或加权平均法时, 网格点分布如图 2

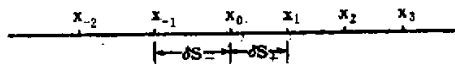


图 2

将上节所述的各种差分法应用于(6), 且为简单起见, 我们仍然保留时间微分形式, 这样在等距格网区域内我们仍可以应用中央差, 于是有:

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dt} = -\frac{\beta_+}{2\delta s} (\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \\ \frac{d\phi_j}{dt} = -\mu^2 \frac{\beta_+}{2\delta s} (u_{j+1} - u_{j-1}) \end{cases} \quad (j \geq J) \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dt} = -\frac{\beta_-}{2\delta s} (\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \\ \frac{d\phi_j}{dt} = -\mu^2 \frac{\beta_-}{2\delta s} (u_{j+1} - u_{j-1}) \end{cases} \quad (j \leq -J) \quad (8)$$

其中 $\beta_+ = \delta s / \delta s_+$, $\beta_- = \delta s / \delta s_-$, δs 为某个常数(例如可取为 δs_- , 或者对坐标变换法来说取 $\delta s = \delta \xi$, 而 $\delta \xi$ 为常数, 当然也可取 $\delta \xi = \delta s_-$) 对于坐标变换法及加权平均法有 $J=1$, 而对于 Isaacson 法则有 $J=2$.

当用坐标变换法和加权平均法时要补上在点 $j=0$ 的预报方程, 它们可以写成下面的形式:

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = -\frac{1}{2\delta s} (\alpha_+ \phi_1 + \alpha \phi_0 + \alpha_- \phi_{-1}) \\ \frac{d\phi_0}{dt} = -\frac{\mu^2}{2\delta s} (\alpha_+ u_1 + \alpha u_0 + \alpha_- u_{-1}) \end{cases} \quad (9)$$

其中, 对于坐标变换法有:

$$\alpha_+ = -\alpha_- = \beta_0 \delta s / \delta \xi, \quad \alpha = 0.$$

β_0 为 $\beta(x) = d\xi/dx$ 在 $x=0$ 点的值, 一般可取作 $\beta_0 = 2\delta s / (\delta s_+ + \delta s_-)$. 以后我们总取 $\delta s = \delta \xi$. 对于加权平均法, 则有:

$$\alpha_+ = 2(1 - \alpha_0)\beta_+, \quad \alpha_- = -2\alpha_0\beta_-, \quad \alpha = 2[\alpha_0\beta_- - (1 - \alpha_0)\beta_+].$$

而 α_0 为 (2) 式中权重 α_j 在 $j=0$ 时的值 (当 $j \neq 0$ 时取 $\alpha_j = \frac{1}{2}$).

当用 Isaacson 法时要补上 $j = \pm 1$ 的方程, 应用 (4) 和 (5)' 式就有:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -\frac{\beta_+}{2\delta s} (\phi_2 - \phi_{**}) = -\frac{\beta_+}{2\delta s} \left(\phi_2 - \frac{1-b}{1+b} \phi_1 - \frac{2b}{1+b} \phi_{-1} \right) \\ \frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{\mu^2 \beta_+}{2\delta s} (u_2 - u_{**}) = -\frac{\mu^2 \beta_+}{2\delta s} \left(u_2 - \frac{1-b}{1+b} u_1 - \frac{2b}{1+b} u_{-1} \right) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{du_{-1}}{dt} = -\frac{\beta_-}{2\delta s} (\phi_* - \phi_{-2}) = -\frac{\beta_-}{2\delta s} \left(\frac{2}{1+b} \phi_1 - \frac{1-b}{1+b} \phi_{-1} - \phi_{-2} \right) \\ \frac{d\phi_{-1}}{dt} = -\frac{\mu^2 \beta_-}{2\delta s} (u_* - u_{-2}) = -\frac{\mu^2 \beta_-}{2\delta s} \left(\frac{2}{1+b} u_1 - \frac{1-b}{1+b} u_{-1} - u_{-2} \right) \end{cases} \quad (11)$$

我们还得设这两套网格各延伸至无限区域.

四、差分方程的解, 伪折射和伪反射

设自 $x \rightarrow -\infty$ 有一入射简谐波, 则

$$\begin{cases} u = A e^{im(x-\mu t)} \\ \phi = \mu A e^{im(x-\mu t)} \end{cases} \quad (12)$$

以相速 μ 沿 x 轴传播, 波数为 m . 但使用了不等距网格之后, (7) + (8) + (9) 或 (7) + (8) + (10) + (11) 一般地没有只沿一个方向传播的简谐波解, 这时有解

$$\begin{cases} u_j = (A_+ e^{ij\theta_+} + B_+ e^{-ij\theta_+} + C_+ (-1)^j e^{ij\theta_+} + D_+ (-1)^j e^{-ij\theta_+}) e^{-i\sigma t} \\ \phi_j = \mu (A_+ e^{ij\theta_+} - B_+ e^{-ij\theta_+} - C_+ (-1)^j e^{ij\theta_+} + D_+ (-1)^j e^{-ij\theta_+}) e^{-i\sigma t} \end{cases} \quad (13)$$

$$j \geq J-1$$

$$\begin{cases} u_j = (A_- e^{ij\theta_-} + B_- e^{-ij\theta_-} + C_- (-1)^j e^{ij\theta_-} + D_- (-1)^j e^{-ij\theta_-}) e^{-i\sigma t} \\ \phi_j = \mu (A_- e^{ij\theta_-} - B_- e^{-ij\theta_-} - C_- (-1)^j e^{ij\theta_-} + D_- (-1)^j e^{-ij\theta_-}) e^{-i\sigma t} \end{cases} \quad (14)$$

$$j \leq -J+1$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, 而 σ 为给定的频率, 这时 $\theta_{\pm}$ 分别由 (7) 和 (8) 式给出, 即

$$\theta_{\pm} = \sin^{-1}(\sigma \delta s / \mu \beta_{\pm}) \quad (15)$$

我们先设 $\sigma \delta s / \mu \beta_{\pm} < 1$ (关于不满足这条件的问题在 [5] 中讨论到). 并取反三角函数的主值, 即是 $|\theta_{\pm}| < \frac{\pi}{2}$. 而 $A_{\pm}, B_{\pm}, C_{\pm}, D_{\pm}$ 则为一些待定的常数.

$2\pi\delta s_+/ \theta_+$ 和 $2\pi\delta s_- / \theta_-$ 分别是差分方程 (7) ($j \geq J$) 和 (8) ($j \leq -J$) 所对应的波长, 而 $\sigma\delta s_+ / \theta_+$ 和 $\sigma\delta s_- / \theta_-$ 则分别为其相速, A_- 的意义是自 $x \rightarrow -\infty$ 入射的波的波幅. A_+ 是透射到 $x > 0$ 区域的透射波波幅. B_+ 可称为自 $x \rightarrow +\infty$ 入射的入射波 (这里称之为“正常入射波”) 的波幅. 在本问题中, 为了和解 (12) 相对应, 自然我们要取 $B_+ = 0$, 于是 B_- 就可称作在 $x = 0$ 处反射到 $x < 0$ 区域的反射波波幅. 若 $x = 0$ 两边为等距网格, $B_- = 0$; 但若用不等距网格, 则 $x = 0$ 两边分别为不同的属性, 于是 $x = 0$ 成为不同介质的“界面”, 一般有 $B_- \neq 0$. 我们将称这种波为正常伪反射波. 含 $C_{\pm}, D_{\pm}$ 的是分别被 $C_{\pm} e^{ij\theta_{\pm}}$ 和 $D_{\pm} e^{-ij\theta_{\pm}}$ 所调制的波长为二个格距的寄生波, 它是纯粹由空间差分所引进, 和物理过程毫无共同之处. D_+ 可称为自 $x \rightarrow +\infty$ 入射的寄生伪入射波波幅, 在本问题中, 为了和解 (12) 相对应, 可设没有寄生伪入射, 取 $D_+ = 0$. 于是 D_- 就是寄生伪反射波波幅. 此外, C_- 和 C_+ 的项则是伴随而来的寄生伪入射 (自 $x \rightarrow -\infty$ 方向) 和寄生伪透射. 在本问题中还令 $C_- = 0$.

在二维或三维空间中, 不等距网格还将引起波射线方向改变, 于是透射波将变成折射波. 上述寄生伪透射就变为寄生伪折射了. (关于这一问题, 在 [5] 中讨论到).

为了使解 (13) 和 (14) 接合起来. 还需要使解满足 (9) 式或 (10) + (11) 式. 今先讨论前者, 这时因为 (13) 和 (14) 式当 $j = 0$ 也成立, 于是当 $j = 0$ 时由 (13) 和 (14) 式应给出同样的结果, 即必须有:

$$\begin{cases} A_+ + B_+ + C_+ + D_+ = A_- + B_- + C_- + D_- \\ A_+ - B_+ - C_+ + D_+ = A_- - B_- - C_- + D_- \end{cases}$$

或即

$$A_+ + D_+ = A_- + D_- \quad (16)$$

$$B_+ + C_+ = B_- + C_- \quad (17)$$

再将 (13) 和 (14) 式代入 (9) 式, 就得到:

$$\left(i \frac{2\sigma\delta s}{\mu} - \alpha\right) (A_+ + D_+) + \left(i \frac{2\sigma\delta s}{\mu} + \alpha\right) (B_+ + C_+)$$

$$= \alpha_+[(A_+ + C_+)e^{i\theta_+} - (B_+ + D_+)e^{-i\theta_+}] + \alpha_-[(A_- + C_-)e^{-i\theta_-} - (B_- + D_-)e^{i\theta_-}] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left(i\frac{2\sigma\delta_s}{\mu} - \alpha\right)(A_- + D_-) - \left(i\frac{2\sigma\delta_s}{\mu} + \alpha\right)(B_- + C_-) \\ &= \alpha_+[(A_+ - C_+)e^{i\theta_+} + (B_+ - D_+)e^{-i\theta_+}] \\ &+ \alpha_-[(A_- - C_-)e^{-i\theta_-} + (B_- - D_-)e^{i\theta_-}] \end{aligned} \quad (19)$$

此外再加上上述的补充条件:

$$B_+ = D_+ = C_- = 0 \quad (20)$$

由(16)–(20)式就可得到:

$$\begin{cases} A_+ = (1 - \gamma)A_- \\ D_- = -\gamma A_- \\ B_- = C_+ = 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$1 - \gamma = \frac{2\alpha_- \cos \theta_-}{\left[i\left(\frac{2\sigma\delta_s}{\mu} - \alpha_+ \sin \theta_+ + \alpha_- \sin \theta_- \right) - \left(\alpha + \alpha_+ \cos \theta_+ - \alpha_- \cos \theta_- \right)\right]} \quad (22)$$

$(1 - \gamma)$ 可称为透射率。由(21)可见,在一般情况下,自 $x \rightarrow -\infty$ 入射的正常波只有 $(1 - \gamma)A_-$ 透射到 $x > 0$ 区域去,余下 γA_- 部分变成寄生伪反射波, γ 就是寄生伪反射率。与此同时,没有正常伪反射波和寄生伪透射波。

当采用 Isaacson 方法时,必须满足(10)+(11)式,由此得到四个方程,将它们和(20)式联立,仍旧得到(21)式,只不过 $1 - \gamma$ 具有下列形式:

$$1 - \gamma = 4b(1 + b) \cos \theta_- / (4b e^{i(\theta_+ + \theta_-)} - [iM e^{i\theta_+} - (1 + b) e^{i2\theta_+} + (1 - b) e^{i\theta_+}] [(1 + b) e^{i2\theta_-} - (1 - b) e^{i\theta_-} - iN e^{i\theta_-}]), \quad (23)$$

$$M = \frac{2\sigma(1 + b)\delta_s}{\mu\beta_+}, \quad N = \frac{2\sigma(1 + b)\delta_s}{\mu\beta_-}$$

当入射波不是发自 $x \rightarrow -\infty$,而是在 $x = -l'$ 处,问题比这要复杂些,这时不能取 $C_- = 0$,且有 $B_- \neq 0$ 和 $C_+ \neq 0$,即还有寄生伪入射和寄生伪透射波及正常伪反射波^[9]。

五、伪反射率

当用坐标变换法且取 $\beta_0 = 2\delta_s/(\delta_{s+} + \delta_{s-})$ 时,(22)式变得特别简单:

$$1 - \gamma = \frac{2 \cos \theta_-}{\cos \theta_+ + \cos \theta_-} \quad (24)$$

γ 为实数,且总有 $0 \leq \gamma \leq 1$ 。只当 $\delta_{s+} = \delta_{s-}$ 时, $\theta_+ = \theta_-$,此时方有 $\gamma = 0$ 。即若 $\delta_{s+} \neq \delta_{s-}$,总有寄生伪反射,但透射波没有位相改变。

若给定 δ_{s-} 和入射波波长 L ,则由 L 、 δ_{s-} 可算出 $\theta_- = 2\pi\delta_{s-}/L$ 和 $\sigma\delta_s/\mu\beta_- = \sin \theta_-$ 。于是当再给定 δ_{s+} 时, β_+ 以及 $\theta_+ = \sin^{-1}(\sigma\delta_s/\mu\beta_+)$ 亦可算出(今设 $\sigma\delta_s/\mu\beta_+ < 1$)。即 γ 为 L 、 δ_{s-} 和 δ_{s+} 的函数。今取 $\delta_s = \delta_{s-} = 0.1$,对于不同的 L 和 δ_{s+} ,按(24)式算得的 γ 如图 3 中的实线。

当用加权平均法时, (22) 式变为

$$1 - \gamma = \frac{2\alpha_0\beta_- \cos\theta_-}{\alpha_0\beta_- (1 + \cos\theta_-) - (1 - \alpha_0)\beta_+ (1 - \cos\theta_+)} \quad (25)$$

这时 γ 还依赖于 α_0 , 在给定 L 、 δs_- 和 δs_+ 情况下, 总可选合适的 α_0 , 使 $\gamma = 0$, 即可以消去寄生伪反射波。但是在给定 δs_+ 和 δs_- 情况下, 这 α_0 依赖于 L (或 σ), 因而我们也不可能通过选用一个 α_0 而消去所有波长的寄生伪反射。图 3 中的虚线是取 $\alpha_0 = \beta_- / (\beta_- + \beta_+)$ (即取抛物线逼近) 的 γ 值曲线。

按 (23) 式, 即采用 Isaacson 法算得的 $|\gamma|$ 如图 3 中的点线。应该指出, 由于这时 γ 为复数, 透射波还有位相改变。

$|\gamma|$ 愈小, 寄生伪反射率愈小, 格式愈合乎物理实质。从这一点看, 对于所有的波长和所有的网格距情况, 加权平均法(取合适的 α_0 值)为最优, 其次为 Isaacson 法, 再次为坐标变换法。

不过在 $L \geq 1$ (相当于波长大于 10 个网格距的波) 的范围内, 所有的格式都给出 $|\gamma| < 0.1$ 。因此, 即使使用坐标变换法也不致有大问题。但对于波长很短的波, 只有加权平均法才能给出好结果。

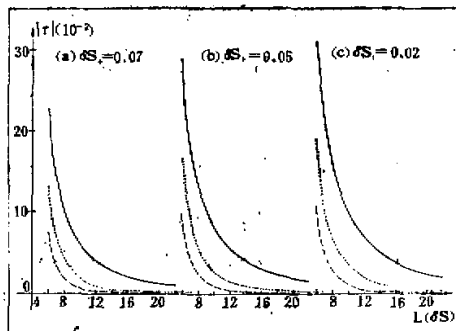


图 3 $\delta s_- = \delta s = 0.1$, 实线为坐标变换法, 虚线为加权平均法, 点虚线为 Isaacson 法

六、超高频条件

在 [5] 中曾指出, 在给定 σ 时, 如果 σ 过高, 波动方程 (6) 可能不具有波幅为常量的解。并称之为超高频状态。由于差分方程不能正确描述波长很短的(从而频率很高的)振动, 当应用差分法时超高频条件更易于达到。例如, 假若我们给定 δs_- 和 θ_- , 由此按 $\sigma\delta s_- / \mu\beta_- = \sin\theta_-$ 算出 σ , 总可以使 $\sigma\delta s_- / \mu\beta_- < 1$, 但当 $\delta s_+ > \delta s_-$ 且超过一定值时, 就可能使 $\sigma\delta s_- / \mu\beta_+ > 1$, 满足超高频条件, 从而在 $x > 0$ 一边没有简单波动形状的解, 这时有:

$$\begin{cases} u_i = (A_+ e^{ij\theta_+} + B_+ e^{ij\theta'_+} + C_+ (-1)^i e^{ij\theta_+} + D_+ (-1)^i e^{ij\theta'_+}) e^{-i\sigma i} \\ \phi_i = \mu(A_+ e^{ij\theta_+} + B_+ e^{ij\theta'_+} - C_+ (-1)^i e^{ij\theta_+} - D_+ (-1)^i e^{ij\theta'_+}) e^{-i\sigma i}, \quad j \geq J-1 \end{cases} \quad (26)$$

其中

$$\begin{cases} \theta_+ \equiv \frac{\pi}{2} - i \ln \rho_+, & \rho_+ \equiv \frac{\sigma\delta s_-}{\mu\beta_+} + \sqrt{\left(\frac{\sigma\delta s_-}{\mu\beta_+}\right)^2 - 1} > 1 \\ \theta'_+ \equiv \frac{\pi}{2} - i \ln \rho'_+, & 0 < \rho'_+ \equiv \frac{\sigma\delta s_-}{\mu\beta_+} - \sqrt{\left(\frac{\sigma\delta s_-}{\mu\beta_+}\right)^2 - 1} < 1 \end{cases} \quad (27)$$

而 $j \leq -J+1$ 的解仍如 (14) 式。

在 (26) 式中, 含 A_+ 、 B_+ 的项是波长为四倍格距 δs_+ 的波动, 但其振幅各为 $(\rho_+)^j$ 及 $(\rho'_+)^j$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $(\rho_+)^j \rightarrow \infty$; $(\rho'_+)^j \rightarrow 0$ 。含 C_+ 和 D_+ 的项则是被调制了的波长为

二格距的波,载波为四倍格距的变幅波 $e^{i\theta_+}$ 和 $e^{i\theta'_+}$. 可见,所有这些波都具有明显的寄生波的性质.

和(四)类似,也可以求出具有寄生伪透射和寄生伪反射的解. 令 $j=0$, 由(14)和(16)式得到:

$$C_+ + D_+ = B_- + C_- \quad (28)$$

$$A_+ + B_+ = A_- + D_- \quad (29)$$

此二式代替了(16)和(17)式,而代替(18)+(19)式的,则是:

$$\begin{aligned} i \frac{2\sigma\delta s}{\mu} (A_+ + B_+ + C_+ + D_+) = & \{ \alpha_+ [(A_+ + C_+)e^{i\theta_+} + (B_+ + D_+)e^{i\theta'_+}] \\ & + \alpha(A_+ + B_+ - C_+ - D_+) + \alpha_- [(A_- + C_-)e^{-i\theta_-} - (B_- + D_-)e^{-i\theta'_-}] \} \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \frac{2\sigma\delta s}{\mu} (A_+ + B_+ - C_+ - D_+) = & \{ \alpha_+ [(A_+ - C_+)e^{i\theta_+} + (B_+ - D_+)e^{i\theta'_+}] \\ & + \alpha(A_+ + B_+ + C_+ + D_+) + \alpha_- [(A_- - C_-)e^{-i\theta_-} + (B_- + D_-)e^{-i\theta'_-}] \} \quad (31) \end{aligned}$$

再补入 $A_+ = C_+ = 0$, 则得 γ 由下式确定,

$$1 - \gamma = \frac{2\alpha_- \cos \theta_-}{i \left(\frac{2\sigma\delta s}{\mu} - \alpha_+ \rho'_+ + \alpha_- \sin \theta_- \right) - (\alpha - \alpha_- \cos \theta_-)} \quad (32)$$

只要 $1 - \gamma \approx 0$, 在 $x > 0$ 区域有减幅寄生伪透射. 但若 $\gamma = 1$, 则在 $x > 0$ 区域没有任何波动, 入射波全部转化为 $x < 0$ 区域的寄生伪反射, 在 $x < 0$ 一边计算紊乱现象则是严重的. 因此在设计格式时一定要注意不使超高频条件出现. 实际计算也得出超高频条件出现时均有 $|\gamma| = 1$ (图略).

七、数值积分结果

为了验证上述各节的理论结果, 我们作了下列数值试验, 它能更好地反映出实际计算过程所出现的现象.

将(7)–(11)再对 z 作差分, 例如(7)取作:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = -\frac{\beta_+}{2\delta s} (\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) \\ \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\delta t} = -\frac{\beta_+ \mu^2}{2\delta s} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \end{cases}$$

但取边界条件如下:

$$\begin{cases} u_{j-1}^{n+1} = A_- \cos \left[\theta_- (j_- + 1) + \frac{\pi}{2} - \sigma(n+1)\delta t \right] \\ \phi_{j-1}^{n+1} = \mu A_- \cos \left[\theta_- (j_- + 1) + \frac{\pi}{2} - \sigma(n+1)\delta t \right] \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} u_{j+1}^{n+1} = 0 \\ \frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^n}{\delta t} = -\mu^2 \frac{\beta_+}{\delta s} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}) \end{cases} \quad (34)$$

其中 $J_- < 0$, $J_+ > 0$ 为两常数, $\sigma = \frac{\sin^{-1}(L)}{\delta t}$,

$$L = -1 + \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{\beta_- \delta t}{\delta s} \right)^2 \sin^2 m \delta s, \quad m = \frac{\theta_-}{\delta s_-}$$

用 (33) 式模拟 $x \rightarrow -\infty$ 入射条件, 而由 (34) 式将会在 x_{J_+} 处引起反射 (但消去了寄生伪反射^[5]).

初始条件取作:

$$\begin{cases} u_j^0 = A_- \cos \left[\theta_- (j+1) + \frac{\pi}{2} \right] \\ \phi_j^0 = \mu A_- \cos \left[\theta_- (j+1) + \frac{\pi}{2} \right] \end{cases} \quad (j \leq 0) \quad (35)$$

$$u_j^0 = \phi_j^0 = 0 \quad (j \geq 0)$$

初始场 u_j 如图 4a, 图 4b 为不存在超高频条件的情况, 图 4c、d 为存在超高频条件的情况, 入射波全部转化为寄生伪反射, 出现了计算紊乱现象. 图 4e、f、g 都是入射波由细网格进入粗网格, 但还不是超高频情况, 图 4e 是伪反射率较小, 寄生伪反射不明显. 图 4f、g 是伪反射率较大, 可以看出寄生伪反射波在细网格一侧逐步向远处传播.

由这些图可以看到, 它们和理论分析是完全一致的.

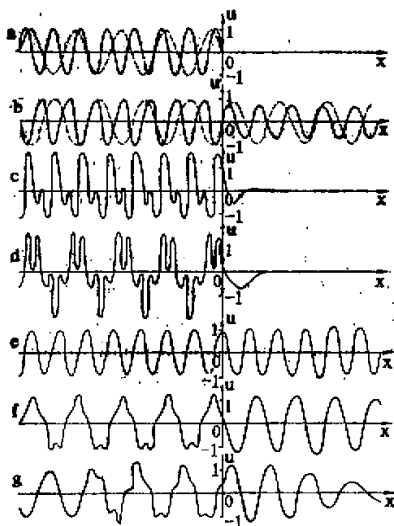


图 4 $\delta s_- = \delta s = 0.1$

a: 实线 $L = 6\delta s$, 虚线 $L = 10\delta s$, $T = 0$; b: $\delta s_+ = 0.05$, $T = 404\delta t$; c: $L = 6\delta s$, $\delta s_+ = 0.2$, $T = 404\delta t$; d: $L = 10\delta s$, $\delta s_+ = 0.4$, $T = 404\delta t$; e: $L = 6\delta s$, $\delta s_+ = 0.105$, $T = 404\delta t$; f: $L = 10\delta s$, $\delta s_+ = 0.15$, $T = 404\delta t$; g: $L = 10\delta s$, $\delta s_+ = 0.15$, $T = 104\delta t$.

参 考 文 献

- [1] 曾庆存, 大气科学, 二卷三期, 181—191, 1978.

- [2] Matsuno, T, *Journ. Meteor. Soc. of Japan*, 44, No. 2, 1966.
- [3] 曾庆存, 不等距差分格式的构造 (1965) (未刊).
- [4] 曾庆存, 季仲贞, 袁重光, 第二次全国数值天气预报会议论文集, 科学出版社, 1980.
- [5] 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 第二卷, 科学出版社, 即将出版.
- [6] Isaacson, E, *Commun. Pure, Appl. Math.*, 14, 381—389, 1961.

ON THE COMPUTATIONAL CHAOS IN THE FINITE DIFFERENCE SCHEMES WITH NON-UNIFORM GRIDS

Zeng Qing-cun, Li Rong-feng

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

The problems of computational chaos in the finite difference schemes with non-uniform grids or with two sets of grids matching each other are investigated by using the physical analytic method. It is concluded that false reflective waves with wavelength of 2 grid-sizes are generated in the area with gross grids as the disturbances propagate from the gross grids to the fine grids; on the other hand, if the incident wave comes from the area with fine grids false reflective waves are generated in the area with fine grids and if its frequency exceeds the critical value (so-called "the ultra high frequency condition"), and almost all the wave energy is reflected as the false reflective wave, thus results in serious computational chaos. Therefore, caution must be taken to avoid "the ultra high frequency condition" in the design of computational scheme.

In this paper, a comparison has been made among the three methods for design of non-uniform grid schemes, i.e. (a) the method of coordinate transformation, (b) the method of weighted averaging, and (c) Isaacson method. It is indicated that under the condition of non-existence of "the ultra high frequency condition" all three methods give only small false-reflectivity with the best result obtained by using (b) if the wavelength is longer than 6 Δs , on the other hand, a small false-reflectivity can be obtained only by using (b) if the wavelength is very short.