

非静力平衡大气中的斜压惯性不稳定

许 秦 周晓平

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文研究在具有水平和垂直切变的平行基本流场中的二维非静力平衡扰动,扰动沿基本流方向不变。对于基本流呈线性切变的情况得到无穷空间初值问题解,并讨论了不稳定判据及不稳定环流发展的定向特征。对于基本流场非线性切变情况得到广义能量守恒方程并将前者的讨论结果推广。对于边界及湍流耗散的影响作了简单考察并定性讨论了有关中尺度强对流的某些问题。

一、引 言

天气学分析表明有一些中尺度对流暴雨多发生在对流层中出现急流的情形下,特别是在中空或低空出现暖湿急流的时候,强风暴的观测还进一步表明这些中尺度强对流运动常具有重力惯性波的特点,尤其在飑线天气中波列还明显地与基本气流方向近平行,也就是说飑线的移动方向大致与基本气流方向垂直^[1]。因此可以把这类飑线中尺度强对流看作是在垂直于基本水平气流铅直面内传播的二维扰动。为了从理论上探讨这类中尺度强对流天气现象和它的触发机制,我们将用具有水平和垂直切变的平行基本流来模拟背景场,用横交于基本气流铅直面内的二维扰动来模拟中尺度强对流,研究其中的不稳定机制以及扰动发展的各种条件和特征。

在上述模型中涉及如下三种不稳定机制:一是与层结有关的浮力不稳定;二是与基本气流水平切变有关的惯性不稳定;三是与基本气流垂直切变有关的斜压不稳定。对于静止大气中的纯层结不稳定已有充分的研究^[2,3],对于静力平衡大气中纯惯性不稳定也已有总结^[4]。Stone^[5]用静力平衡模式研究了线性垂直切变的水平气流中的几种不稳定波,并且证明了在 $0.25 < Ri < 0.95$ 条件下*,只有当波动沿垂直于基本气流的水平方向传播时,才可获得最大的斜压不稳定增长率。最近 Emanuel^[6]用静力平衡模式在只考虑垂直方向湍流耗散的简化条件下,对层状区域中线性切变基本气流上的惯性斜压临界不稳定环流作了对变分方程的数值求解,并用所得到的环流型来解释某些中尺度强对流。但是实际中尺度强对流,特别是其中上升气流的运动是高度非静力平衡的,而目前对于非静力平衡斜压不稳定研究得还不够或没有引起足够的注意。周晓平、张可苏^[7]在研究重力惯性波的频谱、结构和传播特征时指出,静力平衡模型会产生虚假的高频重力波,夸大

1981年4月18日收到,7月17日收到修改稿。

* Ri 为里查逊数,按本文符号 $Ri = \rho N^2 / M^2$ 。

能量的传播速度,并部分歪曲低频波的结构。鉴于上述情况,本文用非静力平衡模式研究了斜压惯性不稳定,并将有关结论推广到基本风场非线性切变及层结参数为空间函数的情况,对于边界及湍流耗散的影响也作了考察。与静力平衡模式相比可以看到,不稳定扰动的发展形态因静力平衡假设而受歪曲,特别是当强不稳定时,这种歪曲是很大的。用非静力平衡的理论结果,可以对某些中尺度强对流型基本形态的形成和维持机制作出更合理的解释。

二、基本方程组

取基本场风速为 $\mathbf{V} = (0, \bar{v}(x, z), 0)$ 及基本场位温为 $\bar{\theta}(x, z)$, 两者近似满足热成风关系

$$f \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial x} \equiv M^2 = M^2(x, z) \quad (1)$$

其中 f 为柯氏参数, g 为重力加速度。若设扰动与 y 方向无关,则在 Boussinesq 近似下有如下二维扰动方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial w}{\partial t} - \theta = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u M^2 + w N^2 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

其中 λ 为示踪系数, $\lambda = 1$ 代表非静力平衡, $\lambda = 0$ 代表静力平衡, $(u, v, w) \equiv \bar{\rho}(u', v', w')$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(x, z)$ 为基本场的密度, p 为扰动气压, $\theta = \bar{\rho} g \theta' / \bar{\theta}$, 以上带撇号的均为扰动量,另外

$$g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \equiv N^2 = N^2(x, z) \quad (7)$$

N 为 Brunt-Väisälä 频率或浮力频率。

引入流函数

$$u = -\partial \phi / \partial z \quad w = \partial \phi / \partial x \quad (8)$$

由(1)–(5)可得

$$\left(N^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 M^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + F^2 \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

其中

$$F^2 = F^2(x, z) \equiv f(f + \partial \bar{v} / \partial x) = f z \quad (10)$$

F 是一种与基本场绝对涡度 Z 有关的惯性频率。

相应于(9)式的初值条件记为

$$\phi_0 = \phi_0(x, z) = \phi|_{t=0} = \int_{-\infty}^x w|_{t=0} dx \quad (11)$$

$$\phi_1 = \phi_1(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^x \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} dx \quad (12)$$

若考虑半无穷空间 $0 \leq z < \infty$ 则由 $w|_{z=0} = 0$ 知相应于 (9) 式的边界条件

$$\phi|_{z=0} = 0 \quad (13)$$

三、 N^2 、 F^2 及 M^2 皆为常数的情况

取 N^2 、 F^2 及 M^2 为常数, 考察 (9)、(11) 及 (12) 式的无穷空间初值问题。先对 t 作 Laplace 变换

$$\mathcal{L}\phi = \int_0^\infty \phi(x, z, t) e^{-st} dt = \bar{\phi}(x, z, s)$$

得

$$(F^2 + s^2) \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + (N^2 + \lambda s^2) \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} - 2M^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial z} = s \bar{\Delta} \phi_0 + \bar{\Delta} \phi_1 = Q(x, z, s) \quad (14)$$

其中 $\bar{\Delta} = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 引入坐标变换

$$\begin{cases} \xi = x + \alpha z, & \alpha = M^2/(F^2 + s^2) \\ \zeta = \beta z, & \beta = \sqrt{(F^2 + s^2)(N^2 + \lambda s^2) - M^4}/(F^2 + s^2) \end{cases} \quad (15)$$

于是 (14) 化为

$$(F^2 + s^2) \beta^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \zeta^2} \right] = Q$$

此方程的全 (x, z) 空间解为

$$\bar{\phi}(\xi, \zeta, s) = - \iint_{-\infty}^{\infty} Q \cdot (F^2 + s^2)^{-1} \beta^{-2} \bar{K}_0(\xi, \zeta, \xi', \zeta') d\xi' d\zeta'$$

其中 $\bar{K}_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R}$, $R^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\zeta' - \zeta)^2$. 还原到 x, z 坐标得

$$\bar{\phi}(x, z, s) = - \iint_{-\infty}^{\infty} Q(x', z', s) \bar{K}_0(x, z, x', z', s) dx' dz' \quad (16)$$

其中格林函数

$$\bar{K}_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\ln \frac{F^2 + s^2}{s^2} - \ln \frac{b_1^2/r^2 + s^2}{s^2} - \ln r^2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \lambda s^2} \sqrt{\sigma_2^2 + s^2}} \quad (17)$$

其中

$$b_1^2 = F^2(x' - x)^2 + 2M^2(x' - x)(z' - z) + N^2(z' - z)^2 \quad (18)$$

$$r^2 = (x' - x)^2 + \lambda(z' - z)^2$$

$$\begin{cases} \sigma_{1,2}^2 = [F^2 + N^2 \pm \sqrt{(F^2 - N^2)^2 + 4M^4}]/2 & \text{当 } \lambda = 1 \text{ 时} \\ \sigma_1^2 = N^2 > 0, & \sigma_2^2 = F^2 - M^4/N^2 & \text{当 } \lambda = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (19)$$

格林函数 (17) 的 Laplace 反演是三个反演函数关于 t 的卷积

$$K_0 \equiv K_0(x, z, x', z', t) = \mathcal{L}^{-1} \bar{K}_0(x, z, x', z', t) = f_1^* f_2^* f_3 \quad (20)$$

其中

$$f_1 = \begin{cases} f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + s^2}} \right) = J_0(\sigma_1 t) & \text{当 } \lambda = 1 \text{ 时} \\ 1/N & \text{当 } \lambda = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$f_2 \equiv f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_2^2 + s^2}} \right) = J_0(\sigma_2 t)$$

$$f_3 \equiv f_3(x, z, x', z', t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R} \right) \\ = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{t} \left(\cos \frac{b_1}{r} t - \cos F t \right) - \delta(t) \ln r \right]$$

$\delta(t)$ 为单位脉冲函数。显然 $K_0|_{t=0} = 0$, 于是将 (16) 式作 Laplace 反演得本问题的解

$$\phi(x, z, t) = - \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{\Delta} \phi_0 \frac{\partial K_0}{\partial t} + \bar{\Delta} \phi_1 K_0 \right) dx' dz'$$

若取 $\bar{\Delta} \phi_0 = -A_0 \delta(x - x_0, z - z_0)$, $\bar{\Delta} \phi_1 = -A_1 \delta(x - x_0, z - z_0)$ 则有

$$\phi(x, z, t) = A_0 \frac{\partial K_0(x, z, x_0, z_0, t)}{\partial t} + A_1 K_0(x, z, x_0, z_0, t) \quad (21)$$

由此可讨论初值问题解的稳定性, 先看非静力平衡情况 $\lambda = 1$, 这时相应于 (21) 式的初始场为点涡环流扰动 $\phi_0 = \frac{A_0}{2\pi} \ln \frac{1}{r_0}$, $\phi_1 = \frac{A_1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_0}$, 这里 $r_0^2 = (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2$.

(1) 若 $N^2 < 0$, $F^2 > 0$ 则由 (19) 式知 $\sigma_2^2 < 0$, $\sigma_1^2 > 0$; 又由 (18) 式知当

$$|k| = |\lg \alpha| = \left| \frac{z_0 - z}{x_0 - x} \right| \quad (22)$$

足够大时 $b_1^2 < 0$, α 是离开初始涡点 (x_0, z_0) 的方位角。这时 f_3 为虚宗量 Bessel 函数, f_3 中包含有双曲函数, 当 t 足够大时, 它们都呈现指数增长。由于 $f_1 \neq 0$, 故 f_1, f_2 及 f_3 的卷积 K_0 及其导数 $\partial K_0 / \partial t$ 也都随 t 呈现指数增长。这表示初始扰动因浮力不稳定而发展, 可以证明 K_0 及 $\partial K_0 / \partial t$ 在 b_1/r_0 取得最大虚值的方向上随时间 t 增长得最快。当 $M^2 = 0$ 时, 在 $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ 的方向上 b_1/r_0 取得最大虚值, 这时扰动沿垂直方向优势发展, 扰动环流向竖直发展。

(2) 若 $F^2 < 0$, $N^2 > 0$ 则不难分析有与上述对称的情况。初始扰动因惯性不稳定而发展。当 $M^2 = 0$ 时, 扰动沿水平方向优势发展, 扰动环流向偏平发展。

(3) 若 $N^2 > 0$, $F^2 > 0$ 则当 $|M^2|$ 超过某临界值 M_2^2 时, 可出现斜压不稳定, 这表现于 σ_2, b_1 可为虚值。由 (19) 式知 $\sigma_2^2 < 0$ 的条件是

$$|M^2| > F \cdot N \equiv M_2^2 \quad (23)$$

由 (18) 式知 $b_1^2/r_0^2 < 0$ 的条件是

$$-\pi/2 \leq \alpha_2 < \alpha < \alpha_1 \leq \pi/2 \quad (24)$$

其中 α_1, α_2 是 $b_1^2/r_0^2 \equiv F^2 \cos^2 \alpha + 2M^2 \cos \alpha \sin \alpha + N^2 \sin^2 \alpha = 0$ 的两个实根

$$\lg \alpha_{1,2} = k_{1,2} = -M^2/N^2 \pm \frac{\sqrt{M^4 - F^2 N^2}}{N^2} \quad (25)$$

显然这首先要求 (23) 式成立, b_1/r_0 获得最大虚值的方位角 $\hat{\alpha}$ 是 $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{b_1^2}{r_0^2} \right) = 0$ 的根之一

$$\lg \hat{\alpha} = \hat{k} = \frac{N^2 - F^2}{2M^2} - \frac{\sqrt{(N^2 - F^2)^2 + 4M^4}}{2M^2} \quad (26a)$$

此时 $\max(-b_1^2/r_0^2) = -\sigma_1^2$. (26a) 就是斜压不稳定扰动环流优势发展的方向.

对于静力平衡模式 $\lambda = 0$, 可作类似的分析. 当 $N^2 < 0$ 时, 无物理意义. 当 $F^2 < 0$ 时可得与上述 (2) 一致的结论, 但惯性不稳定扰动发展的具体形式不同. 当 $M^2 \neq 0$ 时, 同样可导出斜压不稳定临界条件 (23), 但是相应的最优增长方向却是

$$\lg \alpha = k = -M^2/N^2 = \left. \frac{dx}{dx} \right|_{\hat{\sigma}} \quad (\text{等熵面斜率})$$

可见在静力平衡模式中扰动的发展形态受到歪曲, 最优增长方向的坡度偏大于实际值 (与 (26b) 比较). 另外分析 (20) 式中函数 f_3 的增长指数可得静力平衡在 f_3 中的伪放大指数系数

$$\sqrt{\frac{b_1^2}{(x - x_0)^2}} / \frac{b_1^2}{r_0^2} = |\sec \alpha| \geq 1, \quad \alpha_2 < \alpha < \alpha_1$$

对于 $f_2 = J_0(\sigma_2)$ 也可证明

$$-\sigma_2^2|_{\lambda=1} \leq \frac{M^4 - F^2 N^2}{F^2 + N^2} \leq \frac{M^4 - F^2 \cdot N^2}{N^2} = -\sigma_2^2|_{\lambda=0}$$

注意到 (25) 式中 (α_2, α_1) 随 N^2 的变化, 不难看出当层结稳定度 ($N^2 > 0$) 下降并接近中性时静力平衡模式对 f_2 及 f_3 的增长率造成的伪放大效应急剧增大. 因此静力平衡模式总是产生虚假的高频波或夸大不稳定扰动的增长率. 这些伪效应是各向异性的, 对层结参数 ($N^2 > 0$) 的减小十分敏感, 结果会严重地歪曲扰动发展的形态.

斜压不稳定条件 (23) 可改写为

$$\left| \frac{dx}{dx} \right|_{\hat{\sigma}} = \left| \frac{M^2}{N^2} \right| > \frac{F}{N} = \frac{\text{惯性水平约束力}}{\text{层结垂直约束力}}$$

它的直观物理意义是等熵面坡度大于临界坡度 F/N . 另外 (23) 式还表明 $|F^2/M^2| < F/N < |M^2/N^2|$, 由 (26a) 不难证明

$$|F^2/M^2| < |\hat{k}| < |M^2/N^2| \quad (26b)$$

这表明斜压不稳定扰动最优发展方向坡度与临界坡度也是可比较的, 其偏差与 N, F 两种约束力的不对称程度及斜压不稳定强度有关. 当临界不稳定时, $|M^2| \rightarrow F \cdot N$, (26a) 及 (26b) 皆化为

$$\hat{k} = \lg \hat{\alpha} = -F^2/M^2 = -\text{sgn}(M^2)F/N = -M^2/N^2 = \left. \frac{dx}{dx} \right|_{\hat{\sigma}} \quad (26c)$$

四、 N^2 、 F^2 及 M^2 为空间函数的情况

考察 (2)–(6) 系统在 x, z 平面某域 G 中的守恒量, 从中分析不稳定条件. G 域取

两种选择: (1) G 域充分大, 当趋于边界时各扰动量趋于零. (2) G 域仅沿水平方向充分大并有上述性质, 在垂直方向的有限距离处有固壁下边界和自由上边界

$$w|_{z=0} = 0, (p - g\zeta)|_{z=H} = 0$$

ξ, ζ 分别代表线性扰动质点的水平与垂直位移. 于是有

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad w = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (27)$$

将 (27) 式代入 (3) 及 (5) 式, 积分后可得

$$v = - \left(Z\xi + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \zeta \right) \quad (28)$$

$$\theta = - (M^2 \xi + N^2 \zeta) \quad (29)$$

将 (28) 式代入 (2) 式后乘以 u , 将 (29) 式代入 (4) 式后乘以 w , 最后把这两个结果相加, 得能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} E = - \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (30)$$

其中 $E = T + W$ 为广义能量, $T = \frac{1}{2} (u^2 + w^2)$ 为动能, $W = \frac{1}{2} (N^2 \zeta^2 + F^2 \xi^2 + 2M^2 \xi \zeta)$ 为势能, 而 $\mathbf{B} = p(u, w)$, 其散度 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 为能量通量.

在 G 域上积分 (30) 式得

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{E} + \bar{pE}) = 0 \quad (31)$$

或

$$\bar{E} + \bar{pE} = E_0 \text{ (不变量)}$$

其中

$$\bar{E} = \iint_G E d\tau + \bar{p}$$

$$\bar{pE} = \iint_G \nabla \cdot \mathbf{B} d\tau = \begin{cases} 0, & \text{选择 (1)} \\ \frac{1}{2} g \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2|_{x=H} dx, & \text{选择 (2)} \end{cases}$$

在 (31) 式中 $\bar{pE} \geq 0$, $\bar{E} = \frac{1}{2} (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) > 0$, 只有 $\bar{\eta} = \frac{1}{2} (\widetilde{N^2 \zeta^2} + \widetilde{F^2 \xi^2} + 2 \widetilde{M^2 \xi \zeta})$ 可取负值. 现对几种情况讨论如下:

(1) 若 $N^2 \geq 0$, $F^2 \geq 0$ 及 $M^2 = 0$ 则 $\bar{\eta} \geq 0$. 由 (31) 式可知 $\bar{\xi}^2$, $\bar{\eta}^2$, $\widetilde{N^2 \zeta^2}$ 及 $\widetilde{F^2 \xi^2}$ 等各项皆小于 $2E_0$, 扰动不可能无限增长, 基本场是稳定的.

(2) 若 $N^2 \leq 0$, 但 $N^2 \neq 0$, 则 $\bar{\eta}$ 中第一项 $\widetilde{N^2 \zeta^2} < 0$. 当 $|\zeta/\xi|$ 足够大时总可使 $\bar{\eta} < 0$, 于是 $\bar{E}$ 和 $\bar{\eta}$ 就可分别趋于正、负无穷大, 同时保持 (31) 式守恒. 这时广义能量守恒, 但物理上的扰动能量不守恒并且可以取得任意大的值. 可见当浮力不稳定时, $|\zeta/\xi|$ 大的扰动优势发展, 故环流向垂直方向发展. 若取单调增长的环流扰动, 记平均增长率为 $\bar{\sigma}$.

则动能 $\bar{E}$ 中的 $\bar{\eta}^2 = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 = \bar{\sigma}^2 \bar{\xi}^2$ 与势能 $\bar{\eta}$ 中的 $\widetilde{N^2 \zeta^2} = \bar{N}^2 \bar{\xi}^2$ 这两项在扰动发展中应正

负相当,故由(31)式可得 $\sigma^2 \leq |\bar{N}^2|$.

(3) 同理可知,若 $F^2 \leq 0$, 则 $|\xi/\zeta|$ 大的扰动有惯性不稳定发展优势,并且 $\sigma^2 \leq |\bar{F}^2|$.

(4) 考虑 $N^2 \geq 0$, $F^2 \geq 0$ 并且 F^2 、 N^2 仅在 G 域中缓变,而 $M^2 \neq 0$ 的情况. 记 $W_1 = \frac{1}{2}(N\zeta + F\xi)^2$, $W_2 = (M^2 - N \cdot F)\zeta\xi$, $W_3 = \frac{1}{2}(N\zeta - F\xi)^2$, $W_4 = (M^2 + N \cdot F)\zeta\xi$, 易证 $\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \bar{w}_3 + \bar{w}_4$. 于是

(i) 当 $\bar{\mu}^2 - \widetilde{N \cdot F} > 0$ 时, 若 $\zeta/\xi \simeq -\bar{F}/\bar{N}$, 则 $\bar{w}_2 < 0$, 且 $|\bar{w}_1| \ll |\bar{w}_2|$, 故 $\bar{w} < 0$, 这表示不稳定.

(ii) 当 $\bar{\mu}^2 + \widetilde{N \cdot F} < 0$ 时, 若 $\zeta/\xi \simeq \bar{F}/\bar{N}$, 则 $\bar{w}_4 < 0$, 且 $|\bar{w}_3| \ll |\bar{w}_4|$, 故亦有 $\bar{w} < 0$.

(iii) 当 $|\bar{\mu}^2| < \widetilde{N \cdot F}$ 时, 若 $\zeta\xi < 0$, 则 $\bar{w} > \bar{w}_1 > 0$; 若 $\zeta\xi > 0$, 则 $\bar{w} > \bar{w}_3 > 0$, 故恒有 $\bar{w} > 0$.

综合以上,可得与(23)式类似的不稳定条件

$$|\bar{\mu}^2| > \widetilde{N \cdot F} = M^2 \quad (32)$$

以及与(26c)一致的优势发展方向条件

$$\zeta/\xi \simeq -\text{sgn}(\bar{\mu}^2)\bar{F}/\bar{N} \simeq \hat{k} \text{ 当弱不稳定时} \quad (33)$$

若 M^2 , F^2 及 N^2 近似为常数, 则广义势能 W 达极小(负)值的方向也正是(26a). 在(32)、(33)式条件下, 由(31)式知 $-\bar{w} \simeq \bar{T} \gg E_0$ 或 $\bar{w}/\bar{T} \simeq 1$, 而 $\bar{w} \simeq \bar{w}_2$ 或 $\bar{w}_4$, 于是不难估计不稳定扰动增长率上限

$$\sigma \simeq \left[\frac{2|\bar{M}^2| - \widetilde{N \cdot F} |\bar{N \cdot F}|}{\bar{N}^2 + \bar{F}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \simeq \left[\frac{\bar{M}^4 - \bar{N}^2 \cdot \bar{F}^2}{\bar{N}^2 + \bar{F}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

五、边界及湍流耗散的影响

在上节可以看到无论 G 域是否有界, 得到的结果(32)、(33)式都不变, 这表明在无粘性条件下边界不影响上述结论. 另外取 $M^2 = 0$, 对半无穷空间初值问题(9)、(11)–(13)式可类似求解得到

$$\phi(x, z, t) = - \iint_{z \geq 0} \left(\Delta \phi_1 \frac{\partial K_1}{\partial t} + \Delta \phi_0 K_1 \right) dx' dz'$$

其中 $K_1 \equiv K_1(x, z, x', z', t)$ 是 $J_0(Ft)$, $J_0(Nt)$ 及 $\frac{1}{2\pi} \frac{1}{t} \cdot (\cos C_1 t - \cos C_2 t)$ 关于 t 的卷积, $C_1^2 = [F^2(x' - x)^2 - N^2(z - z')^2]/r_1^2$, $C_2^2 = [F^2(x' - x)^2 + N^2(z' + z)^2]/r_2^2$, $r_1^2 = (x' - x)^2 + (z' - z)^2$, $r_2^2 = (x - x')^2 + (z' + z)^2$. 将此解与无穷空间($M^2 = 0$)情况比较也可看到边界仅限制无粘性扰动环流的形状而不影响不稳定条件及优势发展方向. 然而在粘性和热扩散情况下, 边界的影响就变得重要了. 在实际大气中, 由于湍流耗散的阻尼和平滑作用, 以及不稳定区的有限性, 扰动环流并不能向无限细长发展, 而是取某种比例的形状发展, 也就是说最优增长模在发展形态中占主导. 设湍流动量及热量交换系数均为常数 ν , 于是只要将(2)–(6)中的 $\frac{\partial}{\partial t}$ 换为 $D \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta$, 就得到相应的

有湍流耗散的方程组 (2')—(6') (略)。现将坐标绕原点反时针旋转 φ 角, 得到新坐标 (ξ , η)

$$\begin{cases} x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ z = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \end{cases} \quad (35)$$

转角 φ 待定。相应的速度矢量变换为

$$\begin{cases} u = \hat{u} \cos \varphi - \hat{v} \sin \varphi \\ w = \hat{u} \sin \varphi + \hat{v} \cos \varphi \end{cases} \quad (36)$$

将 (35)、(36) 式代入 (8) 式得

$$\hat{u} = -\partial \psi / \partial \xi \quad \hat{v} = \partial \psi / \partial \eta \quad (37)$$

故流函数形式不变。将 (35)—(37) 式代入 (2')—(5') 式可得

$$(\lambda_1 \hat{D}^2 + \hat{N}^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \hat{M}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + (\lambda_2 \hat{D}^2 + \hat{F}^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (38)$$

其中 $\lambda_1 = \sin^2 \varphi + \lambda \cos^2 \varphi$, $\lambda_2 = \lambda \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right), \quad \hat{M}^2 = \frac{F^2 - N^2}{2} \sin 2\varphi + M^2 \cos 2\varphi$$

$$\hat{N}^2 = F^2 \sin^2 \varphi - 2M^2 \sin \varphi \cos \varphi + N^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (F^2 + N^2 - B)$$

$$\hat{F}^2 = F^2 \cos^2 \varphi + 2M^2 \sin \varphi \cos \varphi + N^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (F^2 + N^2 + B)$$

$$B = \frac{F^2 - N^2}{2} \cos 2\varphi + M^2 \sin 2\varphi$$

不难证明, 不稳定条件 (23) 等价于 $\hat{M}^2 > \hat{F}^2 \hat{N}^2$ 。选取 φ 使 $\hat{M}^2 = 0$, 即

$$\tan 2\varphi = \frac{-2M^2}{N^2 - F^2} \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4} \quad (39)$$

这时, ξ (当 $N^2 \geq F^2$ 时) 或 η (当 $N^2 < F^2$ 时) 恰为 (26a) 的 $\hat{x}$ 方向, 并且

$$B = -\operatorname{sgn}(N^2 - F^2) \sqrt{(N^2 - F^2)^2 + 4M^4} \quad (40)$$

此时 (38) 式简化为

$$(\lambda_1 \hat{D}^2 + \hat{N}^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}^2} + (\lambda_2 \hat{D}^2 + \hat{F}^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{z}^2} = 0 \quad (41)$$

取 ($\hat{x}$, $\hat{z}$) 中的矩形不稳定区, 设其边界具有光滑固壁性质

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad \text{在 } \hat{x} = 0, \quad \hat{H} \text{ 处} \quad (42)$$

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{z}^2} = 0 \quad \text{在 } \hat{z} = 0, \quad \hat{L} \text{ 处}$$

(41)、(42) 式有解

$$\psi \sim e^{-i\omega t} \sin \frac{n\pi \hat{x}}{\hat{H}} \sin \frac{k\pi \hat{z}}{\hat{L}} \quad (43)$$

其中正整数 n 、 k 分别为 $\hat{x}$ 、 $\hat{z}$ 方向的环流圈个数或波数, ω 为复频率

$$-i\omega = \left[-\frac{\hat{N}^2 k^2 + \hat{F}^2 m^2 n^2}{k^2 + m^2 n^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \nu [n^2 m^2 + k^2] \left(\frac{\pi}{\hat{L}} \right)^2 \quad (44)$$

其中 $m = \hat{L}/\hat{H}$, 使 $\sigma = I_m \omega = R_c(-i\omega) > 0$ 的模 (k, n) 有不稳定增长, 而使 $\sigma > 0$ 达极大值 $\max \sigma$ 的模 (k_A, n_A) 有极优增长。不难看出只有当

$$-\hat{F}^2 \geq -\hat{F}_c^2 \equiv \min_n \frac{1}{m^2 n^2} \left[\nu^2 (1 + m^2 n^2)^3 \left(\frac{\pi}{\hat{L}} \right)^4 + \hat{N}^2 \right] k_A = 1 \quad (45a)$$

或

$$-\hat{N}^2 \geq -\hat{N}_c^2 \equiv \min_k \left(\frac{m}{k} \right)^2 \left[\nu^2 \left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right)^3 \left(\frac{\pi}{\hat{H}} \right)^4 + \hat{F}^2 \right] n_A = 1 \quad (45b)$$

时才可能有不稳定增长。现讨论几种情况:

(1) 大气中常见的斜压不稳定情况是较弱的 ($0 < M^4 - F^2 \cdot N^2 \ll F^2 \cdot N^2$) 并且处在稳定层结 ($N^2 \gg F^2 > 0$) 中。这时由 (39) 式可知 $\varphi = \alpha$, 即 (39) 式的环流轴与最优增长方向一致。由 (38) 式得 $\hat{N}^2 \simeq N^2$ 于是由 (45a) 可知强的稳定层结对湍流耗散条件下的斜压不稳定扰动有相当的抑制作用, 而且只有在足够尺度 $\hat{L}$ 和 $\hat{H} = \hat{L}/m$ 的斜压不稳定区中, 扰动才容易发展。

(2) 对于大气中常见的惯性不稳定 ($0 < -F^2 \ll N^2$) 作类似分析可以得到类似上述的一些结论:

(3) 对于大气中层结不稳定, 分析 (45b) 式可知大气中较强的惯性稳定度 ($F^2 < 10^{-7}$ 秒 $^{-2}$) 对湍流条件下层结不稳定扰动的抑制作用是较弱的, 但是扰动的发展要求不稳定层有足够的厚度。

利用 (41) 式还可以对 (26a) 式作出直观解释。取特殊情况 $\hat{W} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$, (41) 式可化为

$$(\lambda_2 \hat{D}^2 + \hat{F}^2) \hat{u} = 0 \quad (46)$$

这正是沿 $\hat{x}$ 方向平行运动的有阻尼振动方程。最不稳定的运动方向是使 $\hat{F}^2/\lambda_2$ 取极大负值的方向。注意到 $\hat{F}^2/\lambda_2 = \beta_1^2/r$, 在 $\lambda = 1$ 时这个方向正是 (26a) 式。可见 (26a) 式还代表斜压不稳定势能梯度方向, 它与边界和湍流耗散的影响是两回事, 尽管后者能使扰动呈现各种复杂的形态, 但产生斜压不稳定扰动的主导因素却是前者。

由 (46) 式不难得到, 湍流耗散条件下增长率上限的估计

$$\sigma = [-\sigma_1^2]^{\frac{1}{2}} - \nu \left(\frac{\pi}{\hat{H}} \right)^2 \quad (47)$$

其中 σ_1^2 如 (19) 式所示, $\hat{H}$ 代表沿 $\lg \varphi = \hat{k}$ 方向充分长的不稳定区厚度 (即沿垂直于 φ 方向的宽度)。在实际计算中可根据不稳定区的形状而选取适当的 $\hat{H}$ 值 (或采用 (47) 式, 并选取适当的 $\hat{H}$ 、 $\hat{L}$ 值)。在 $\nu = 0$ 及弱不稳定条件下, (47) 式就化为 (34) 式。

六、应用与讨论

1. 关于中尺度强对流的触发问题

Emanuel^[8] 最近研究过惯性斜压不稳定对飚线的触发机制, 他是用临界不稳定条件

$\frac{\eta}{f} Ri \equiv \frac{F^2 \cdot N^2}{M^4} < 1$ (其中 $\eta = f + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$, $Ri = N^2 / \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2$) 来进行讨论的。事实上显著的超临界斜压惯性不稳定区早在飚线发生前几小时,甚至十几小时(参见图1)就已形成,到飚线发生时,不稳定区已发展到相当的强度和尺度(参见图2)。

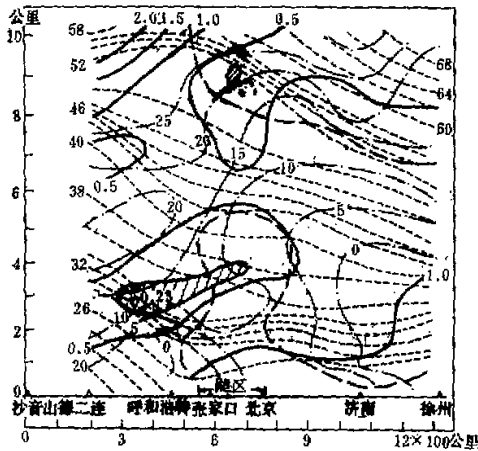


图1 1975年6月5日08时剖面图(阴影示出不稳定区).实线为 $F \cdot N - |M|^2$ (10^{-4}秒^{-2}),粗虚线为湿度露点差线(5°C),点断线为风速垂直于剖面分量(米/秒),虚线为位温线($^\circ\text{C}$)

$|\sigma| \sim 0.7 \times 10^{-4} \text{秒}^{-1}$, e 倍增长时间为4小时。这个区域附近的空气都一致地以10米/秒左右的速度向右推移,未来七小时大致可达飚区。在不稳定区下游不远处是高湿度区(图中粗虚线是温度露点差为 5°C 的等值线),具有潜在的不稳定能量。在二连、呼和浩特一带,1.5~2公里处的空气层以10米/秒左右的速度东南移,与上层气流基本一致。而在张家口和北京一带2公里以下的气层却移动缓慢或略有西北向移动。因此未来发展趋于使上述斜压不稳定区与低层高湿度区相接。在此区域的西北部(格点值)不稳定扰动的最优增长方向按(26a)及(26b)式对于 $N^2 > F^2$ 情况计算为

$$0.92 \times 10^{-2} = |F/N| < |k| < |M^2/N^2| = 1.0 \times 10^{-2}$$

在区域的东南部分层结稳定度下降,故最优增长方向斜率会显著增大。因此斜压不稳定扰动环流大致沿等熵面伸入低空高湿度区就可能是触发飚线的主要因素。

另外两个例子是1974年8月6日及1975年7月29日北京地区大范围暴雨,这两次大暴雨前08时天气图中在北京一带的600—500mb层次上都出现了较强的斜压惯性不稳定区。前者不稳定区的特点是大范围的弱稳定层结(北京、张家口、太原及邢台一带600—500mb层平均 $N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\Delta \theta}{\Delta z}$ 值为 $0.4 \times 10^{-4} \text{秒}^{-2}$,特别是北京上游的张家口 N^2 值最小为 $0.15 \times 10^{-4} \text{秒}^{-2}$)与较大范围的水平风强垂直切变及负涡度水平切变(北京、张家口向南一带几百公里范围的600—500mb层中平均 $M^2 = f \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta z}$ 值达 $7 \times 10^{-7} \text{秒}^{-2}$, $\Delta \bar{v} / \Delta z$ 达

因此我们认为在考察这类可能的触发机制时,不仅要注意临界条件(23),而且还应注意最不稳定增长的方向(参见(26a—c))此外还要估计不稳定的强度(即(46)中的 F^2)以及相应的增长率(参见(34)、(46)及(47)式)。下面用本文的理论结果来考察一些实例。

图1给出1975年6月5日张家口到北京一带发生飚线前七小时的剖面图,在飚区西北侧直至上游二百公里的3~4公里低空有一个显著的斜压不稳定区($N \cdot F - |M|^2 < 0$)。由(34)式可估计不稳定区西北部(格点值)无粘性扰动增长率

$-0.5 \times 10^{-4} \text{秒}^{-1}$ 即 $F^2 \approx 0.5 \times 10^{-8} \text{秒}^{-2}$) 形成较大范围的斜压惯性不稳定区。在这个区域中有可能产生由南向北下伸的不稳定扰动, 扰动的无粘性 e 倍增增长时间为 4 小时, 实际情况是当日白天开始有小雨, 夜间 20 时以后发生大暴雨。后一个例子不稳定区的特点是较小范围的弱不稳定层结 (北京 600—500 mb 层中 $N^2 \approx -1.3 \times 10^{-5} \text{秒}^{-2}$) 与水平风的强垂直切变及强负涡度水平切度 ($M^2 \approx 17.3 \times 10^{-7} \text{秒}^{-2}$, $F^2 \leq 10^{-9} \text{秒}^{-2}$) 形成很强的联合 (层结、惯性、斜压) 不稳定。这一局地不稳定层的上、下风向相反, 这使不稳定扰动有可能在这里持续发展并触发暴雨。取通常的湍流系数 $\nu \approx 10^2 \text{米}^2/\text{秒}$, 由 (47) 式可估计扰动的 (有粘性) 增长率为 $0.9 \times 10^{-3} \text{秒}^{-1}$, e 倍增增长时间为 0.3 小时, 这样强的联合不稳定已达到触发暴雨的程度。实际情况也是当日白天就发生了大暴雨。这些例子表明这类暴雨临近发生时联合不稳定强度会迅速增强, 这些特点对于这类暴雨的短期或超短期预报可能是有用的。

2. 一类与斜压不稳定有关的中尺度强对流型——湿斜压惯性不稳定环流型

观测表明有一类中尺度强对流有图 2 的基本形态, 并且常常处于斜压惯性不稳定背景场中。可以认为这种中尺度对流也有类似条件不稳定的特点, 即上升气流区域的平均层结参数 N_w^2 小于下沉气流区域的平均层结参数 N_d^2 。取与风场切变有关的另外两个参数, 在两个区域中都一样, 由对流层中平均情况可估计 $|M^2| \approx \left| f \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right| \sim 10^{-7} \text{秒}^{-2}$,

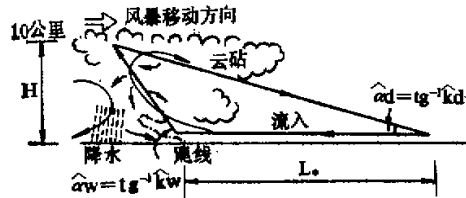


图 2 一类中尺度强对流型的结构

$F^2 = f \left(f + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \approx f^2 \sim 10^{-8} \text{秒}^{-2}$ 。上升气流区域中有强的斜压不稳定 $N_w^2 \ll M^4/F^2$ 。因此 $M^4 > (N_w^2 - F^2)^2$, 由 (26a) 式可得

$$\hat{k}_w = \text{tg} \hat{\alpha}_w \sim -\text{sgn}(M^2) \cdot 0(1)$$

可见上升气流不是垂直的 (如静力平衡模式所得到的那样), 而是以明显的角度 (45° 左右) 向等熵面一侧倾斜。倾斜的上升气流有利于将降水质点从上升气流中分离出去, 从而防止降水质点在上升气流中造成冷却效应, 使上升气流易于维持。下沉气流散布在较大范围的弱或接近斜压不稳定的区域中。按上述 $M^2 \sim 10^{-7} \text{秒}^{-2}$, $F^2 \sim 10^{-8} \text{秒}^{-2}$, 由 (26c) 式可得

$$\hat{k}_d = \text{tg} \hat{\alpha}_d = -F^2/M^2 \sim -\text{sgn}(M^2) \times 0.1$$

若取对流层厚度 $H = 10$ 公里, 则可估计图 2 环流型的水平尺度为

$$L = (1/\hat{k}_d - 1/\hat{k}_w)H \sim 1 \times 10^2 \text{公里}$$

这与观测的量级一致。沿着三角形底边 L 的补偿气流可以把较大范围 (百公里宽) 边界层中的水汽汇聚起来, 使这种中尺度强对流得以维持和发展。

这种环流型对基本场产生热力正反馈。环流下沉支造成的绝热增暖和降水区造成的蒸发冷却有利于在中低层加强基本场原有的水平温度梯度, 使热成风 (垂直于图 2 断面)

垂直切变加强,于是环流和基本气流同时得以发展。这与观测到的强降水常与急流增强相伴随的特点^[1]也是一致的。热力正反馈建立的强垂直切变气流在右侧产生负涡度水平切变,使惯性稳定度下降,同时湿层结稳定度也是在环流上升支的右侧更低,因此基本场中最强的不稳定区总是偏在上升气流的右侧,从而使风暴环流(与基本场强气流区一起)不断右移进入新的水汽环境,得到更长时间的持续发展。

以上讨论使我们看到:大气中的斜压惯性不稳定常在某些层次上具有中尺度的水平范围,因此可以激发起持续的向水平扩展的不稳定扰动,而不至于像单纯的层结不稳定那样容易被填塞掉;在有利的水汽条件下这类不稳定扰动环流有可能通过热力正反馈爆发成一类具有湿斜压惯性不稳定环流型特征的中尺度强对流或暴雨;足以触发暴雨或在暴雨临近发生时的强斜压惯性不稳定一般都有较弱的层结相配合,这时静力平衡模式产生的歪曲是严重的,在衡量不稳定的强度及其空间方向特征时应采用非静力平衡的结果(如(34)、(47)和(26a)式取 $\lambda = 1$)。

结 语

本文用非静力平衡模式研究了具有切变和层结的平行气流斜压惯性不稳定性,并用得到的理论结果讨论了一类中尺度强对流及暴雨的触发和维持问题。实际发生的如飑线一类强对流只是准二维结构的,它在第三维方向上表现出的一些特征(如只有几百公里的尺度、与基本气流常有一不大的交角等)可能与基本场大幅度变化的空间结构、第三维方向上的内重力惯性孤立波的机制及非对称斜压(见文献[5])不稳定机制等因素有关。这是有待进一步研究的问题。

本文得到蔡则怡、李志楠等同志的帮助,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] 陶诗言等,中国之暴雨,科学出版社,1980.
- [2] 巢纪平、周晓平积云动力学,科学出版社,1963.
- [3] 大气所模拟实验组,非静力平衡层结大气中的重力惯性波与惯性对流,大气科学,第二卷第一期,1978.
- [4] 曾庆存,数值天气预报的数学物理基础,464—471,科学出版社,1980.
- [5] Stone, P. H., J. A. S. P. 390, 1966.
- [6] Emanuel, K. A., Inertial Stability and Mesoscale convection systems, Part I, 1979.
- [7] 周晓平、张可苏,非静力平衡模式中重力惯性波的频谱结构和传播特征,第二次全国数值预报会议文集,科学出版社,1980.
- [8] Emanuel, K. A., Inertial stability and Mesoscale convective systems, 11th conference on severe local storms, 1979.

BAROCLINIC INERTIAL INSTABILITY IN THE NON-STATIC EQUILIBRIUM ATMOSPHERE

Xu Qin Zhou Xiao-ping

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the stability of two-dimensional symmetric perturbations to a non-static stratified basic flow with vertical and horizontal shear is investigated. For a linear sheared basic flow the whole space initial-value problem is solved, from which the instability criterion and preferential growth direction are deduced. For the non-linear sheared basic flow similar results are derived from the generalized energy equation. The influence of viscosity and boundaries is analyzed and some inferences about mesoscale severe convection are discussed.