第8卷 第3期 大气科学 Vol. 8, No. 3
1984年9月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Sept., 1984

沃尔什函数在暴雨洪水长期预报分析中的初步应用

马益三
（四川省水文总站岷江分站）

提要

沃尔什函数是只取+1和-1二值跳变的完备正交函数系，用于分析和处理数字信号，仅涉及加减法运算，具有储量小，计算速度快等优点，且特别适用于有序矩形数字波，它的许多特点是比较吸引人的．为了将这一函数恰当地引到长期水文、气象预报的分析中来，以提高精度，本文即以岷江五通桥站年最大暴雨洪水流量的长期预报为例，进行了初步的分析和尝试，效果基本良好，可供基层台站参考．

在长期水文、气象预报分析中，一个比较重要的手段是对随机时间序列在时域中的周期性和在频域中的波动结构进行分析，然而当前采用的多是正(余)弦函数系、傅里叶级数及其变换等方法，将随机时间序列分解为许多不同频率的正弦和余弦分量，从而在时域和频域中对其进行分析和处理．这些方法对于连续波形是比较好的，但对于通常多属离散取样的水文、气象序列所组成的矩形数字波形来说，则由于其收敛较慢，往往需要用很多项数才能逼近原波形，所以有时效果不太理想，且计算复杂，储存量过大，不便于手工操作．那么除此以外，是否有更具普遍性、且应用也较直接和简便的完备正交函数系可供应用呢？1923年美国应用数学家约瑟夫·沃尔什（J. L. walsh）所提出的二值跳变的沃尔什函数系就是这类函数系之一，它的许多特点是非常吸引人的，值得注意．

沃尔什函数系同样是完备的正交函数系，是非正弦的，但在许多方面与正(余)弦函数相类似，它仅取用+1和-1两个数值，在应用上是很简便的，且内容丰富．所以近一、二十年来，随着数字技术的迅速发展，它在电讯中已得到重视和应用，同时在光学、地质勘探、计算机等领域也已开始引用作为图象处理、模式识别、函数逼近的主要方法进行新的研究．在这些研究工作的启示下，为能将这一方法尽快地、恰当地引入到长期水文、气象预报的分析中来，为基层台站(缺乏电算条件)的分析工作多探寻些新的方法以提高精度，作者以岷江五通桥站年最大暴雨洪水流量的长期预报为例，引用沃尔什函数进行了初步的分析和尝试，步骤是：首先通过沃尔什变换得出序列的列率函数与谱值，从而识别出主要的平均波动周期，然后试行将主要周期的列率分量作为随机变量，进行回归分析，并以其外延值作回归计算得出预报值．从效果看，基本上是好的，故现简要介绍如下．

1982年4月19日收到，12月13日收到修改稿．

一、基本资料

岷江五通桥站为干流控制站，集水面积 12.6 万平方公里，其年最大流量常能反映长江上游川西地区年最大一次暴雨量的多少．该站实测年最大流量序列自 1941 年起至 1981 年，共 41 年，多年平均 176（10^2 秒立方米，以下均采用此单位），变幅 96—362，离均差 57.8，灾害性洪水级 $\geqslant 240$，1981 年曾发生特大洪水流量 264．为检验引用方法与处理技巧的可预报性，分析资料截至 1980 年．

二、离散沃尔什变换系数的计算

1. 沃尔什函数

此函数是只取 $+1$ 和 -1 两个幅值的完备正交函数系，和正(余)弦函数相似，需要给定两个自变数：时间变量 θ 和序数 n，常用符号 $Wal(n,\theta)$ 表示，其定义式很多[2]，比较简便的是指数表达式：

$$Wal(n,\theta)=(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{P-1}\theta_k\cdot g(n)_k} \tag{1}$$

式中 θ 为归一化时间变量，若正交区间为(t_a,t_b)，时基为 $T=t_b-t_a$，则 $\theta=\frac{t}{T}$．为简便计，正交区间常数 $[0,1)$，即 $0\leqslant\theta<1$．θ_k 为 θ 的二进表示式中小数点后第 k 位的数值，$\theta_k\in\{0,1\}$．

$n=0,1,2\cdots\cdots\leqslant(2^P-1)$——$n$ 值反映函数在正交区间 $[0,1)$ 过零的次数(只计左端点)，相当于振频，P 取正整数，当 n 为偶数时，过零次数为 n，当 n 为奇数时，过零次数为 $n+1$．

$g(n)$ 为 n 值的格雷码，$g(n)_k$ 为此格雷码的第 k 位数值，$g(n)_k\in\{0,1\}$．

2. 沃尔什矩阵

若将沃尔什函数的定义（正交）区间 $[0,1)$ 等分为 $N=2^P$(P 取正整数)，则子区间(时隙)的宽度为 $\frac{1}{2^P}$，并以每个子区间左端点的取样值作为代表值，即得离散沃尔什函数，约定符号为 $Wal(n,\theta^i)$，其中 θ^i 取 $0,1,2,\cdots\cdots(N-1)$，相当于时隙的序号．

沃尔什矩阵即为由 $Wal(n,\theta^i)$ 所组成的 $N=2^P$ 阶方阵，常以 $[Wal_{2^P}]$ 表示．经作者实践，这一矩阵若利用如下沃尔什函数的主要性质进行排列计算，则十分方便．

(1) 归一化正交性

$$\int_0^1 Wal(n,\theta)\cdot Wal(m,\theta)d\theta=\begin{cases}0 & \text{当 } n\neq m\\ 1 & \text{当 } n=m\end{cases} \tag{2}$$

(2) 乘法定理

$$Wal(n,\theta)\cdot Wal(m,\theta)=Wal(n\oplus m,\theta) \tag{3}$$

式中⊕为模 = 加法运算符号.

(3) 比例性

$$Wal(2^i n, \theta) = Wal(n, 2^i \theta) \tag{4}$$

式中 i 为整数,这一性质表明 $Wal(2^i n, \theta)$ 在区间 $[0, 1)$ 的图形,可通过 $Wal(n, \theta)$ 的图形沿 θ 轴压缩 2^i 倍得到.

(4) 对称性

$$Wal(n, \theta) = Wal(\theta, n) \tag{5}$$

3. 沃尔什级数与离散变换

由于沃尔什函数系是一完备的归一化的正交函数系，因此也可将平方可积函数 $f(\theta)$ 展开成沃尔什级数. 设 $f(\theta)$ 的定义区间为 $[0, 1)$，即 $f(\theta)$ 是以 1 为周期的函数,则 $f(\theta)$ 可展成如下沃尔什级数:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot Wal(n, \theta) \qquad n = 0, 1, 2 \cdots \tag{6}$$

其中

$$a(n) = \int_0^1 f(\theta) \cdot Wal(n, \theta) d\theta \tag{7}$$

应用此式可以对复杂的周期函数进行综合,所取项数愈多，逼近程度愈好，在满足一定均方误条件下,所取项数可尽量减少。

由证明可知,当周期函数的周期趋于无穷大时，它也即变成了非周期函数，所以沃尔什级数可过渡为沃尔什变换。离散沃尔什变换就是从有限沃尔什级数演变而来，它主要用于满足一定条件下的非周期函数的分解。 若对 (6) (7) 两式中的 $f(\theta)$、$Wal(n, \theta)$ 在定义区间 $[0, 1)$ 离散取样 $N = 2^p$ 次，并以 $f(\theta^j)$、$Wal(n, \theta^j)$ 表示各离散点的样值，以 $w(n)$ 代替 $a(n)$，同时对 (7) 式采用数值积分求解,则得离散沃尔什变换式:

$$w(n) = \frac{1}{N}\sum_{\theta^j=0}^{N-1} f(\theta^j) \cdot Wal(n, \theta^j) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots (N-1) \tag{8}$$

相应地,可将(6)式改写为离散沃尔什逆变换式:

$$f(\theta^j) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \cdot Wal(n, \theta^j) \qquad \theta^j = 0, 1, 2, \cdots\cdots (N-1) \tag{9}$$

(8)、(9) 两式尚可写成如下矩阵式:

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} [Wal_{2^P}] \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} = [Wal_{2^P}] \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(N-1) \end{bmatrix} \tag{11}$$

这一矩阵形式使用起来很方便，(10)，(11) 两式除一个尺度因子 $\frac{1}{N}$ 以外，是完全等同的，且只含有加减运算，故对于离散的矩形波来说，明显地优于傅里叶变换式.

4. 实际计算

对随机时间序列 $\{f(\theta^i)\}$ 进行离散沃尔什变换分析时，要求 $\theta^i=0, 1, 2\cdots\cdots(N-1)$，$N=2^P$，$P$ 为正整数. 本文五通桥站的年最大流量共 41 年，故取用 1949 年至 1980 年 ($N=32$) 作为样本(见表 1 的第 2、3 项)是比较恰当的(也可取用 1948 年至

表 1

$\theta^i(n)$	年	$\frac{f(\theta^i)}{10^2}$	$w(n)$	$w^2(n)$	%	i	$P(i)$	拟合值	c_1	s_1	c_2	s_2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0	1949	253	176.06			0		281	+	+	+	+
1	1950	121	9.44	89.11		1	224.13	145	−	−	−	+
2	51	179	11.62	135.02	3.6	2	71.34	153	+	+	+	+
3	52	131	−8.38	70.22		3	249.44	117	−	+	−	−
4	53	142	1.06	1.12		4	6.62	155	+	−	+	−
5	54	170	−6.81	46.38		5	285.24	171	−	+	−	+
6	55	353	−14.25	203.06	5.3	6	△577.01	335	+	−	+	+
7	56	161	2.25	5.06		7	56.73	147	+	+	−	−
8	57	142	1.25	1.56		8	3.55	117	+	−	+	−
9	58	152	−6.25	39.06		9	83.66	125	−	−	−	−
10	59	230	15.69	246.18	6.5	10	493.44	245	+	+	+	−
11	1960	180	22.56	508.95	13.4	11	469.73	133	−	+	−	+
12	61	362	−8.25	68.06		12	107.12	299	+	−	+	+
13	62	130	−7.5	56.25		13	107.00	135	−	+	−	+
14	63	122	−0.69	0.48		14	112.54	119	−	−	+	−
15	64	140	−0.81	0.66		15	△624.26	159	−	+	−	+
16	65	117	−1.69	2.89		16	330.88	143	+	+	+	+
17	66	252	5.06	25.60				227	−	−	−	+
18	67	150	−7.62	58.06				159	+	+	+	+
19	68	165	−12.75	162.56	4.3			183	−	−	−	+
20	69	96	18.19	330.88	8.7			105	+	+	+	−
21	1970	118	20.19	407.64	10.7			181	−	−	−	−
22	71	114	7.88	62.09				141	+	+	+	−
23	72	161	−8.25	68.06				173	+	−	−	+
24	73	211	−6.25	39.06				255	+	−	+	−
25	74	182	−3.62	13.10				155	−	+	+	−
26	75	240	9.69	93.90				219	+	+	+	−
27	76	148	2.19	4.80				199	+	−	−	−
28	77	211	−10.38	107.74	2.8			181	−	+	+	+
29	78	145	16.00	256.00	6.7			145	+	+	−	+
30	79	186	19.19	368.26	9.7			181	+	−	+	+
31	1980	170	18.19	330.88	8.7			153	+	+	−	+
Σ				3802.69	80.5		3802.69		6	4	2	4

注：表内"+"号为+1，"−"号为−1. 下同.

表 2　沃尔什矩阵 [Wal_{32}] 表

θ	θi	n																													
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0.03125	1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
0.0625	2	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+
0.09375	3	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
0.125	4	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
0.15625	5	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
0.1875	6	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+
0.21875	7	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
0.25	8	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
0.28125	9	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−
0.3125	10	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+
0.34375	11	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
0.375	12	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
0.40625	13	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−
0.4375	14	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+
0.46875	15	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
0.50	16	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
0.53125	17	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−
0.5625	18	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+
0.59375	19	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
0.625	20	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+
0.65625	21	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−
0.6875	22	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+
0.71875	23	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
0.75	24	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
0.78125	25	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−
0.8125	26	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+
0.84375	27	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
0.875	28	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
0.90625	29	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−
0.9375	30	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
0.96875	31	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−

1979 年，1947 年至 1978 年等样本，连续分析演变周期的稳定性）．

沃尔什变换系数 $w(n)$ 的计算，采用（10）矩阵式，其中的矩阵 [Wal_{32}]，作者引用（1）—（5）式计算排列如表 2（此表可通用）．由于 [Wal_{32}] 是对称、正交的，采用（10）式计算 $w(n)$，$n=0,1,2\cdots31$，是十分简便的（仅作 $32\times31=992$ 次加减），结果如表 1 的第 4 项．

三、谱系数的计算与周期识别

1. 沃尔什功率谱

频谱分析的目的在于分析随机序列的功率密度在频率上的分布情况，从而在频域中识别其波动结构．与傅里叶功率谱相类似，在沃尔什分析中也可进行列率谱分析，对于离散沃尔什变换，可定义其功率谱为下式：

$$\left.\begin{aligned} &P(0)=w^2(0)\\ &P(i)=w^2(2i-1)+w^2(2i) \qquad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots\left(\frac{N}{2}-1\right)\\ &P\left(\frac{N}{2}\right)=w^2(N-1) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式中 i 为列率，定义为在时基 T 内平均变号(过零)次数的一半，可用下式表示(在 $Wal(n,\theta)$ 中 $T=1$)：

$$\begin{aligned} &i=\frac{n}{2} && \text{当 } n=2i \text{ 为偶数时}\\ &i=\frac{n+1}{2} && \text{当 } n=2i-1 \text{ 为奇数时} \end{aligned} \tag{13}$$

需要注意的是 $\sqrt{P(i)}$ 并不代表序列的振幅谱，因为它没有圆函数中的相加定理[1-2]．

2. 实际计算

根据已算得的变换系数 $w(n)$，采用(12)式可以十分方便地计算出沃尔什功率谱系数 $P(i)$，如表 1 第 7、8 项．作出 $P(i)\sim i$ 谱图，可考察序列波动的组合结构，本文主要用作主要周期的识别．根据列率定义(13)式，序列的平均波动周期(τ)可用下式表示：

$$\tau=\frac{T}{i}=\frac{2T}{n} \text{ 或 } \frac{2T}{n+1} \tag{14}$$

识别周期的方法可采用方差检验法，检查每个谱值方差贡献的大小，其统计量为：

$$\begin{aligned} F_i&=\frac{\dfrac{P(i)}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}{\left[\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N/2}P(i)-\dfrac{P(i)}{2}\right]\cdot\dfrac{1}{N-2-1}}\\ &=\frac{P(i)}{\sum\limits_{i=1}^{N/2}P(i)-P(i)}\cdot\frac{N-2-1}{2}\\ &\text{(自由度为 2, } N-2-1) \end{aligned} \tag{15}$$

本文检验计算如表 3．

由此可以看出序列在 0.10 显著水平下的主要平均周期为 2.133 …… 年与 5.33…… 年，其次为 3 年左右．这与以往采用其它方法分析的结果大体一致，而这一方法要快得多，且较准确．

表 3

i	15	6	10	11	16	5	3	1
F_i	2.84	2.59	2.16	2.04	1.38	1.18	1.02	0.91
显著水平 α	0.10	0.10	0.20	0.20				
周期 τ(年)	2.133…	5.33…	3.2	2.9	2.0	0.4	10.66	32.0

四、原序列的拟合

计算出沃尔什变换系数 $w(n)$ 以后，可根据方差比检验原理[4]计算出其各个方差贡献的百分比，如表 1 第 6 项，在此约定 $\geqslant 2.8\%$ 的均可作为主要系数选用（累计百分比为 80.5%）则可选出 11 个 $w(n)$，以此作为代表，应用(11)式作沃尔什逆变换计算，可得出原序列的拟合值，见表 1 第 9 项，若以实测变幅的 15%（即 39.9）作为许可差检查，则拟合合格率为 84.4%，精度是较好的.

至于直接应用拟合序列的外延值作为预报的问题，十分明显其必要条件应该是：第一，32 年周期较显著，第二，位移 32 年的自相关系数也较显著. 前已计算本序列 32 年周期的 $F_i = 0.91$（见表 3），不够显著，但结合 1949 年以前的资料计算自相关系数 $R(32) = 0.76$，在 0.01 信度下是显著的，因此可试作外延对比如表 4，从已有实测数值来看，两者基本符合.

表 4

年	1941	42	43	44	45	46	47	48	1981
外 延	255	155	219	199	181	145	181	153	281
实 测	166	141	194	130	204	123	177	244	264

五、预报方法的探讨

据现有研究表明：建立在正（余）弦函数系基础上的谐波分析与谱分析用于时间序列分析的主要目的在于研究和识别其周期与波动组合特性，直接用于预报尚有一定的困难[3]. 沃尔什分析同样如此，前面提到的两个外延预报的必要条件，在多数情况下也是难以满足的. 但是通过主要周期的分析以后，常可与回归分析相结合，应用于长期预报，本节即从这一思路出发，进行一些初步的探讨和研究.

1. 沃尔什偶函数和奇函数

类似三角函数中的 cos 和 sin 一样，沃尔什函数也有偶、奇之分. 结合(13)定义式考虑，当 $n = 2i$ 时，$Wal(n, \theta)$ 对于 $\theta = 0$ 与 $\frac{1}{2}$ 为偶对称，当 $n = 2i - 1$ 时，则为奇对称，定义式如下:

$$\left.\begin{array}{ll} Wal(0,\theta)=Cal(0,\theta) & \\ Wal(2i,\theta)=Cal(i,\theta) & \text{偶函数} \\ Wal(2i-1,\theta)=Sal(i,\theta) & \text{奇函数} \end{array}\right\} \tag{16}$$

2. 广义沃尔什函数

前面在定义沃尔什函数 $Wal(n,\theta)$ 时，是将 n 限制在取正整数 2^P，θ 限制在 $[0,1)$ 区间内的. 但若将非周期函数 $f(\theta)$ 作沃尔什分析时，常需用到 $Wal(\mu,\theta)$，其中 μ 可以取为正、负实数，θ 可以取为 $(-\infty,\infty)$，因此有必要将沃尔什函数的定义予以推广，经推导[2]可得出如下定义式：

$$Cal(\mu,\theta)=\prod_{r=-\infty}^{\infty} Cal(1,\mu_{-r}2^{-r}\theta) \tag{17}$$

μ 为正实数，$\mu_{-r}\in\{0,1\}$，$-\infty<\theta<\infty$.

$$Sal(\mu,\theta)=\begin{cases}-Cal(\mu,\theta) & -\infty<\theta<0\\ Cal(\mu,\theta) & 0<\theta<\infty\end{cases} \tag{18}$$

μ 为正二进无理数.

$$Sal(\mu,\theta)=Cal(g2^{-M},\theta)\cdot Sal(2^{-M},\theta) \tag{19}$$

μ 为正二进有理数，$\mu=\dfrac{g+1}{2^M}$，其中 g 为偶数，M 为整数，$-\infty<\theta<\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} Cal(-\mu,\theta)=Cal(\mu,\theta)\\ Sal(-\mu,\theta)=-Sal(\mu,\theta)\end{array}\right\} \tag{20}$$

这一广义定义是包括原定义的，当 μ 为二进有理数时，$Cal(\mu,\theta)$ 和 $Sal(\mu,\theta)$ 都是周期函数，其周期为 2^M，当 μ 为二进无理数时，则不是周期函数. 例如应用 (17) 与 (19) 式计算 $Cal\ (2.75,\theta)$ 的结果分别列成表 5 与表 6.

表 5　应用(17)式计算 $Cal\ (2.75,\theta)$

θ	0	0.1818	0.3636	0.5454	0.7272	0.9090	1.0909	1.2727	1.4545	1.6363	1.8181	2.000
$Cal(1,2\theta)$	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+
$Cal(1,0.5\theta)$	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+
$Cal(1,0.25\theta)$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−
$Cal(2.75,\theta)$	+	−	−	−	+	−	+	−	+	+	+	−

表 6　应用(19)式计算 $Sal\ (2.75,\theta)$

	0	0.2222	0.4444	0.6666	0.8888	1.1111	1.3333	1.5555	1.7777	2.000
$Cal(1,2\theta)$	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+
$Cal(1,0.5\theta)$	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+
$Sal(1,0.25\theta)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−
$Sal(2.75,\theta)$	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−

注：表内"+"号为+1，"−"号为−1

3. 实际计算

(1) 本序列经沃尔什谱分析后得出主要平均周期为5.33…年与2.133…年，由于它们的序数都不是正整数(n)，而是二进无理数(μ)，因此，必须改用(17)—(20)式中的有关定义式计算其广义沃尔什函数 $Wal(\mu,\theta)$，这些函数是可以缘其周期外延的，但都不能组成正交矩阵，也无法引用(10)、(11)式进行沃尔什变换计算．但若将广义沃尔什函数 $Wal(\mu,\theta)$ 视作预报因子，将沃尔什级数(6)式视作回归模型，进行回归分析，则属合理、可行．结合定义式(16)，可将(6)式改写为如下回归方程：

$$f(\theta)=a(0)Cal(0,\theta)+\sum_{1}^{k}[a_c(i)Cal(i,\theta)+a_s(i)Sal(i,\theta)] \tag{21}$$

式中 k 为选取周期的个数，$a(0)$、$a_c(i)$、$a_s(i)$ 为回归系数．

(2) 主要周期5.33……年与2.133……年的广义沃尔什偶、奇函数(列率最大的)共有4组，编号(只是为了书写简便)如下：

$$\begin{aligned} c_1&: Cal(2.66\cdots,\theta)=Wal(5.33\cdots,\theta)\\ s_1&: Sal(2.66\cdots,\theta)=Wal(4.33\cdots,\theta)\\ c_2&: Cal(1.066\cdots,\theta)=Wal(2.133\cdots,\theta)\\ s_2&: Sal(1.066\cdots,\theta)=Wal(1.133\cdots,\theta)\end{aligned}$$

这些函数均可应用(17)或(18)式计算(具体方法可参见前面的举例)，结果如表1的第10—13项．

(3) 将 c_1、s_1、c_2、s_2 四组变量视作预报因子，将五通桥站年最大流量的距平值视作预报对象，应用(21)式作回归分析，则求回归系数的标准方程组的矩阵式为：

$$\begin{bmatrix} 32 & 6 & 4 & 2 & 4\\ 6 & 32 & 2 & 16 & -2\\ 4 & 2 & 32 & 2 & 4\\ 2 & 16 & 2 & 32 & -6\\ 4 & -2 & 4 & -6 & 32\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a(0)\\ a_c(1)\\ a_s(1)\\ a_c(2)\\ a_s(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 430\\ -340\\ 594\\ 552\end{bmatrix}$$

用逆矩阵法求解得回归系数，经整理得出预报年最大流量 $\widehat{f(\theta)}$ 的回归方程为：

$$\begin{aligned}\widehat{f(\theta)}=173&+6Cal(2.66\cdots,\theta)-15Sal(2.66\cdots,\theta)\\ &+22Cal(1.066\cdots,\theta)+24Sal(1.066\cdots,\theta)\end{aligned}$$

经应用方差分析法检验此回归方程的效果，在 $\alpha=0.10$ 水平上是显著的．将其中 Cal、Sal 函数外延，计算1981年的预报值为：

$\widehat{f(\theta)}_{81}=173+6+15+22+24=240$(特大洪水级)实测为264，是合格的．

参考文献

[1] (美) K. G. 比彻姆著，常迥译，沃尔什函数及其应用，科学出版社，1980.
[2] 胡征、樊昌信编著，沃尔什函数及其在通信中的应用，人民邮电出版社，1980.

[3]　黄嘉佑编，《气象统计预报试用教材》，北京大学.
[4]　马益三，随机时间序列加法模型的分析和应用，四川省水文总站岷江分站(油印本)，1980.

THE APPLICATION OF WALSH FUNCTION TO LONG-RANGE FORECAST OF STORM FLOOD

Ma Yisan

(Mingjiang River Branch, Main Hydrological Station of Sichuan Province)

Abstract

Walsh function, a jump function of giving +1 or −1 only, is a complete system of orthogonal function and is often used for analyzing and treating some digital signals. It has such advantages as concerning with addition and subtraction only, needing less memories and having faster rate of operation as used in computation. Especially, it is appropriate for the sequence computing of rectangular wave with digit. All these characteristics are attractive. In order to introduce this function into long-range forecast in hydrology and meteorology, a preliminary trial has been carried out for the long-range forecast of maximum storm flood at Wutongqiao station of the Mingjiang River. The test shows the result of trial is satisfactory.