第8卷 第4期 大气科学 Vol. 8, No. 4
1984年12月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Dec., 1984

旋转球面上行星波的共振相互作用

李贤琅
(成都气象学院)

提 要

本文从球面非线性位涡方程出发，应用多重尺度法导出了三波共振的耦合方程．求得非线性耦合方程的通解可以用椭圆函数表示，因而扰动的能量及其变化是有界的．同时，还探讨了共振三波组的守恒律以及共振激发过程中能量的转换．指出在一定的初始条件下，非线性相互作用是可逆的；且就纬向波数谱而言，大波数模态的初始扰动能量在共振激发过程中可以完全转化为较小波数模态的能量．并揭示了旋转大气中非线性行星波动的孤立子性质．

一、引 言

近年来，大气波动非线性相互作用的研究日益受到重视．在 β 平面近似下，Longuet-Higgins 和 Gill[1] 讨论了三波共振相互作用，伍荣生[2]研究了三波共振与能量变化．一般而言，非线性效应将使波形发生突陡变化，即不再是简谐波；另一方面，大气作为色散性介质将使色散关系与振幅相耦合而抑制波形的破坏．如何处理大气波动间的非线性相互作用，无论从理论上还是应用上来说都是一个值得探讨的课题．

本文不用 β 平面近似，直接从球面非线性位涡方程出发，应用多重尺度法导出了三波共振的耦合方程，求得非线性耦合方程的通解．同时，还探讨了三波共振组的守恒律以及一定条件下共振激发过程中能量的转换，改进了文献[1]和[2]的结果．从而在一定程度上揭示了旋转大气中行星波动演变的机制．

二、基本方程

正压大气中，行星尺度流场的变化可以由球面上的非线性位涡方程描述：

$$a^2\frac{\partial}{\partial \hat{t}}\hat{\nabla}_s^2\hat{\psi}+\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\nabla}_s^2\hat{\psi}-\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\nabla}_s^2\hat{\psi}\right)+2\Omega\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\lambda}=0 \tag{1}$$

式中符号一如常用．

引入特征时间尺度 Ω^{-1} 和特征空间尺度 a，则有

$$\hat{t}=\Omega^{-1}t \qquad \hat{\psi}=a^2\Omega\psi \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得无量纲位涡方程

1982年12月1日收到，1983年3月26日收到再改稿．

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_s^2\phi + J(\phi, \nabla_s^2\phi) + 2\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi = 0 \tag{3}$$

其中

$$\nabla_s^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$J(A, B) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial A}{\partial\lambda}\frac{\partial B}{\partial\theta} - \frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial B}{\partial\lambda}\right)$$

将流函数ϕ用球面谐函数展开[3]:

$$\phi(\theta, \lambda, t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\Psi_l^m(t)Y_l^m(\theta, \lambda) \tag{4}$$

其中球面谐函数

$$Y_l^m(\theta, \lambda) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\lambda} \tag{5}$$

而 $P_l^m(x)$ 为指标是 l 和m的 Legendre 伴随函数.

如所周知,广义 Fourier 系数

$$\Psi_l^m(t) = \int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_l^{m*}(\theta, \lambda)\phi(\theta, \lambda, t) \tag{6}$$

其中 $Y_l^{m*} = (-)^m Y_l^{-m}$ 是 Y_l^m 的复共轭.

为了讨论的方便，我们把一族指标为 l 和m的波矢记为 $\boldsymbol{k} = (l_k, m_k)$，则(4)、(5)式可表为

$$\phi = \sum_{\boldsymbol{k}}\Psi_k Y_k \tag{4'}$$

$$Y_k = \left[\frac{2l_k+1}{4\pi}\frac{(l_k-m_k)!}{(l_k+m_k)!}\right]^{\frac{1}{2}}P_k e^{im_k\lambda} \tag{5'}$$

注意到 Y_k 为球面 Laplace 算子 ∇_s^2 的本征函数,即

$$\nabla_s^2 Y_k = -\Lambda_k Y_k \tag{7}$$

其中

$$\Lambda_k = l_k(l_k+1) \tag{8}$$

利用球面谐函数的正交归一关系,将(4)′、(5)′、(7)、(8)式代入(3)式并施行 $\int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta \times d\theta Y_k^*(\cdot)$ 运算,得

$$\frac{d}{dt}\Psi_k - i\frac{2m_k}{\Lambda_k}\Psi_k = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}'}\sum_{\boldsymbol{k}''}\frac{\Lambda_{k'}-\Lambda_{k''}}{\Lambda_k}\Psi_{k'}\Psi_{k''}\int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_k^* J(Y_{k'}, Y_{k''}) \tag{9}$$

为了讨论共振问题的需要，我们考察由三个模态的波矢 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 组成的三波组．此时(9)式演变为

$$\frac{d}{dt}\Psi_\alpha - i\frac{2m_\alpha}{\Lambda_\alpha}\Psi_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\Lambda_\beta-\Lambda_\gamma}{\Lambda_\alpha}\Psi_\beta\Psi_\gamma\int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_\alpha^* J(Y_\beta, Y_\gamma) \tag{10}$$

注意到 $Y_\alpha^* = \left[\frac{2l_\alpha+1}{4\pi}\frac{(l_\alpha-m_\alpha)!}{(l_\alpha+m_\alpha)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_\alpha e^{-im_\alpha\lambda}$，考察积分

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} d\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_\alpha^* J(Y_\beta, Y_\gamma)\\ &= i\left[\frac{2l_\alpha+1}{4\pi}\frac{(l_\alpha-m_\alpha)!}{(l_\alpha+m_\alpha)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2l_\beta+1}{4\pi}\frac{(l_\beta-m_\beta)!}{(l_\beta+m_\beta)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2l_\gamma+1}{4\pi}\frac{(l_\gamma-m_\gamma)!}{(l_\gamma+m_\gamma)!}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\cdot\int_0^{2\pi} d\lambda e^{i(m_\beta+m_\gamma-m_\alpha)}\int_0^{\pi} d\theta P_\alpha\left(m_\beta P_\beta\frac{dP_\gamma}{d\theta}-m_\gamma P_\gamma\frac{dP_\beta}{d\theta}\right)\end{aligned}$$

其中等式右方第一重积分 $\int_0^{\pi} d\theta P_\alpha\left(m_\beta P_\beta\frac{dP_\gamma}{d\theta}-m_\gamma P_\gamma\frac{dP_\beta}{d\theta}\right)$ 可借助于 Legendre 伴随函数递推公式化去被积函数中的导数项后求出；第二重积分 $\int_0^{2\pi} d\lambda e^{i(m_\beta+m_\gamma-m_\alpha)}$ 显示，只有当

$$m_\beta+m_\gamma=m_\alpha \quad (\beta\neq\gamma\neq\alpha) \tag{11}$$

时，积分才不为 0. 即有非线性相互作用. 在以下的讨论中，我们约定三波组恒满足条件(11).

记

$$S_\alpha = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} d\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_\alpha^* J(Y_\beta, Y_\gamma) \tag{12}$$

则有

$$\frac{d}{dt}\Psi_\alpha - i\frac{2m_\alpha}{\Lambda_\alpha}\Psi_\alpha = \frac{i}{2}\frac{\Lambda_\beta-\Lambda_\gamma}{\Lambda_\alpha}S_\alpha\Psi_\beta\Psi_\gamma \tag{13a}$$

同理，有

$$\frac{d}{dt}\Psi_\beta - i\frac{2m_\beta}{\Lambda_\beta}\Psi_\beta = \frac{i}{2}\frac{\Lambda_\gamma-\Lambda_\alpha}{\Lambda_\beta}S_\beta\Psi_\gamma^*\Psi_\alpha \tag{13b}$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_\gamma - i\frac{2m_\gamma}{\Lambda_\gamma}\Psi_\gamma = \frac{i}{2}\frac{\Lambda_\alpha-\Lambda_\beta}{\Lambda_\gamma}S_\gamma\Psi_\alpha\Psi_\beta^* \tag{13c}$$

其中

$$S_\beta = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} d\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_\beta^* J(Y_\gamma^*, Y_\alpha) \tag{14}$$

$$S_\gamma = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} d\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_\gamma^* J(Y_\alpha, Y_\beta^*) \tag{15}$$

方程(13)的通解可表为下形：

$$\Psi_k(t) = C_k(t)e^{-i\sigma_k t} \qquad k=\alpha, \beta, \gamma \tag{16}$$

考虑到大气运动的多时间尺度特性[4]，可以认为，与频率振荡相比较，振幅的演变是慢过程. 因此，应用多重尺度法，令

$$t = \varepsilon^0 t \qquad T = \varepsilon^1 t \tag{17}$$

则

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T} \tag{18}$$

$$\Psi_k(t) = \varepsilon C_k(T)e^{-i\sigma_k t} \qquad k=\alpha, \beta, \gamma \tag{19}$$

将(18)、(19)代入(13)式，利用 ε 的一阶方程，得色散关系

$$\sigma_k = -\frac{2m_k}{l_k(l_k+1)} \qquad k = \alpha, \beta, \gamma \tag{20}$$

上式相当于 Яглом[5] 波频的无量纲形式.

当三波组各模态波矢的频率满足共振条件

$$\sigma_\beta + \sigma_\gamma = \sigma_\alpha \tag{21}$$

时,利用 ε 的二阶方程,即得关于振幅的非线性耦合方程

$$\frac{d}{dT} C_\alpha(T) = \frac{i}{2} \frac{\Lambda_\beta - \Lambda_\gamma}{\Lambda_\alpha} S_\alpha C_\beta(T) C_\gamma(T) \tag{22a}$$

$$\frac{d}{dT} C_\beta(T) = \frac{i}{2} \frac{\Lambda_\gamma - \Lambda_\alpha}{\Lambda_\beta} S_\beta C_\gamma^*(T) C_\alpha(T) \tag{22b}$$

$$\frac{d}{dT} C_\gamma(T) = \frac{i}{2} \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta}{\Lambda_\gamma} S_\gamma C_\alpha(T) C_\beta^*(T) \tag{22c}$$

方程(22)即为我们讨论三波组共振的基本方程.

三、守恒律与耦合方程的解

在球面上,大气总动能为

$$E = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left(\frac{1}{2}|\nabla_s \psi|^2\right) = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left(-\frac{1}{2}\psi \nabla_s^2 \psi\right) \tag{23a}$$

总拟能为

$$F = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin\theta d\theta |\nabla_s^2 \psi|^2 \tag{23b}$$

将(4)′、(5)′代入(23)式,得

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \Lambda_k \Psi_k \Psi_k^* \tag{24a}$$

$$F = \sum_k \Lambda_k^2 \Psi_k \Psi_k^* \tag{24b}$$

容易证明[6,7],有

$$\frac{d}{dt} E = 0 \tag{25a}$$

$$\frac{d}{dt} F = 0 \tag{25b}$$

即在本文的推导中，仍保持总动能守恒和总拟能守恒. 为了求得共振三波组对慢时间 T 的守恒律.我们引入归一化复值振幅

$$\widetilde{C}_k(T) = C_k(T) \left|\frac{\Lambda_{k'} - \Lambda_{k''}}{2\Lambda_k} S_k\right|^{-\frac{1}{2}} \qquad k = \alpha, \beta, \gamma \tag{26}$$

则耦合方程(22)可表为对 $\widetilde{C}_k(T)$ 的方程:

$$\frac{d}{dT} \widetilde{C}_\alpha(T) = iH \widetilde{C}_\beta(T) \widetilde{C}_\gamma(T) \tag{27a}$$

$$\frac{d}{dT}\tilde{C}_\beta(T)=iH\tilde{C}_\gamma^*(T)\tilde{C}_\alpha(T) \tag{27b}$$

$$\frac{d}{dT}\tilde{C}_\gamma(T)=iH\tilde{C}_\alpha(T)\tilde{C}_\beta^*(T) \tag{27c}$$

其中 $H=\left|\frac{A_\beta-A_\gamma}{2A_\alpha}\cdot\frac{A_\gamma-A_\alpha}{2A_\beta}\cdot\frac{A_\alpha-A_\beta}{2A_\gamma}S_\alpha S_\beta S_\gamma\right|^{\frac{1}{2}}$

令

$$\tilde{C}_k(T)=|\tilde{C}_k(T)|\exp[i\varphi_k(T)] \qquad k=\alpha,\beta,\gamma \tag{28}$$

则方程(27)的实部和虚部分别为:

$$\frac{d}{dT}|\tilde{C}_\alpha|=H|\tilde{C}_\beta||\tilde{C}_\gamma|\sin\tilde{\varphi} \tag{29a}$$

$$\frac{d}{dT}|\tilde{C}_\beta|=-H|\tilde{C}_\gamma||\tilde{C}_\alpha|\sin\tilde{\varphi} \tag{29b}$$

$$\frac{d}{dT}|\tilde{C}_\gamma|=-H|\tilde{C}_\alpha||\tilde{C}_\beta|\sin\tilde{\varphi} \tag{29c}$$

和

$$\frac{d}{dT}\tilde{\varphi}=\mathrm{ctg}\,\tilde{\varphi}\frac{d}{dt}\ln(|\tilde{C}_\alpha||\tilde{C}_\beta||\tilde{C}_\gamma|) \tag{29d}$$

其中 $\tilde{\varphi}=\varphi_\alpha-(\varphi_\beta+\varphi_\gamma)$.

考虑到

$$|\tilde{C}_k|^2=\left|\frac{A_{k'}-A_{k''}}{2A_k}S_k\right|^{-1}|C_k|^2\propto\frac{1}{2}A_k|C_k|^2 \qquad k=\alpha,\beta,\gamma$$

由(24)式知, $|\tilde{C}_k|^2$ 正比于波动能量. 我们定义在 σ_k^{-1} 时间内的能量密度

$$W_k=\frac{|\tilde{C}_k|^2}{\sigma_k^{-1}}=\sigma_k|\tilde{C}_k|^2 \qquad k=\alpha,\beta,\gamma$$

将 $2\sigma_k|\tilde{C}_k|$ 分别乘以 (29a—c) 并相加,得

$$\frac{d}{dT}(W_\alpha+W_\beta+W_\gamma)=2H[\sigma_\alpha-(\sigma_\beta+\sigma_\gamma)]|\tilde{C}_\alpha||\tilde{C}_\beta||\tilde{C}_\gamma|\sin\tilde{\varphi}$$

据共振约束条件(21),有

$$\frac{d}{dT}(W_\alpha+W_\beta+W_\gamma)=0$$

即共振三波组的能量密度守恒. 同时, 将 (29a—c) 分别乘以 $|\tilde{C}_k|$ 并两两相加或相减,可以求得守恒律

$$\frac{d}{dT}(|\tilde{C}_\alpha|^2+|\tilde{C}_\beta|^2)=0 \tag{30a}$$

$$\frac{d}{dT}(|\tilde{C}_\alpha|^2+|\tilde{C}_\gamma|^2)=0 \tag{30b}$$

$$\frac{d}{dT}(|\tilde{C}_\beta|^2-|\tilde{C}_\gamma|^2)=0 \tag{30c}$$

记

$$|\widetilde{C}_k|^2 = n_k \qquad k = \alpha, \beta, \gamma$$

则有守恒量：

$$\kappa_1 \triangleq n_\alpha + n_\beta = |\widetilde{C}_\alpha|^2 + |\widetilde{C}_\beta|^2 = \text{const} \tag{31a}$$

$$\kappa_2 \triangleq n_\alpha + n_\gamma = |\widetilde{C}_\alpha|^2 + |\widetilde{C}_\gamma|^2 = \text{const} \tag{31b}$$

$$\kappa_3 \triangleq n_\beta - n_\gamma = |\widetilde{C}_\beta|^2 - |\widetilde{C}_\gamma|^2 = \text{const} \tag{31c}$$

此外，对 (29.d) 积分，得守恒量：

$$\kappa_0 \triangleq |\widetilde{C}_\alpha||\widetilde{C}_\beta||\widetilde{C}_\gamma| \cos\tilde{\varphi} = \text{const} \tag{31d}$$

应用守恒律(31)，则方程(29.a—c) 可表为

$$\frac{d}{dT} n_\alpha = 2H[n_\alpha(n_\alpha - \kappa_1)(n_\alpha - \kappa_2) - \kappa_0^2]^{\frac{1}{2}} \tag{32a}$$

$$\frac{d}{dT} n_\beta = 2H[n_\beta(n_\beta - \kappa_1)(n_\beta - \kappa_3) + \kappa_0^2]^{\frac{1}{2}} \tag{32b}$$

$$\frac{d}{dT} n_\gamma = 2H[n_\gamma(n_\gamma - \kappa_2)(n_\gamma + \kappa_3) + \kappa_0^2]^{\frac{1}{2}} \tag{32c}$$

显然，上述方程的通解可以用椭圆函数表示。

由于存在守恒律(31)，因此，如果求得 n_α，则 n_β 和 n_γ 可直接由守恒律(31)推出。于是问题归结为求解方程 (32a)。设多项式

$$n_\alpha(n_\alpha - \kappa_1)(n_\alpha - \kappa_2) - \kappa_0^2$$

的根为

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant 0$$

则容易求得 (32a) 的解为

$$\begin{cases} n_\alpha(T) = n_3 + (n_2 - n_3)\text{sn}^2[H(n_1 - n_3)^{\frac{1}{2}}(T - T_0), \kappa] \\ \kappa \triangleq \left(\dfrac{n_2 - n_3}{n_1 - n_3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad n_\alpha(T_0) \triangleq n_3 \end{cases} \tag{33}$$

其中 sn $(\cdot, \kappa)$ 为 Jacobi 椭圆正弦函数，κ 为其模数。

从而可以进一步由守恒律(31)求出 $n_\beta(T)$ 和 $n_\gamma(T)$。

值得指出的是，在文献[2]中，曾由耦合方程求得二个守恒量，再由几何方法导出另一个不变量，最后连同积分常数一起得到与本文 (32 a) 类似的一个方程；但没有给出其一般形式的通解。文献[1]也有同样的不足之处。本文则直接由耦合方程导出四个守恒量，且每个守恒量具有简洁的表达式和明确的物理意义；从而得到描述三个模态波动能量变化的方程，并求出其解析形式的通解。由此可以直接讨论三波组共振激发过程中的能量转换。

四、共振激发过程中能量的转换

现在考虑开始时只有二个波，由于非线性共振相互作用，激发出第三个波的过程。我们通过方程(32)考察共振激发过程中能量的转换。

这样的物理问题相当于以下的初始条件：

当 $T=0$ 时，有

$$n_\alpha(0)=0 \qquad n_\beta(0)=0 \qquad n_\gamma(0)=0 \tag{34}$$

由 (31d) 知，在这种情况下，可以假设 $\kappa_0=0$ 而不失一般性. 其物理意义是，在整个共振激发过程中有

$$\varphi_\alpha-(\varphi_\beta+\varphi_\gamma)=\pm\frac{\pi}{2} \tag{35}$$

也就是说，辐角 $\varphi_\alpha(T)$ 与辐角 $[\varphi_\beta(T)+\varphi_\gamma(T)]$ 相差 $\frac{\pi}{2}$.

由于在整个推导过程中，我们始终遵循共振约束条件(11)和(21)，考虑到 m_β、m_γ 和 m_α 在半球范围内是同号的，不失一般性，可取为正值. 因而，就纬向波数谱而言，当

$$0<m_\beta<m_\gamma<m_\alpha \tag{36}$$

时，可以分别将模态 $\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为"长"波(波数较小)、"中"波(波数居中)和"短"波(波数较大). 用 Fjörtoft[8] 的记号，分别记为 L 波、M 波和 S 波.

当

$$m_\alpha>m_\beta>m_\gamma>0$$

时，相当于 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 互易，完全可以进行平行的讨论. 因而实际上我们只须分别讨论 $n_\gamma(0)=0$ 或 $n_\alpha(0)=0$ 的情况:

1. 当 $T=0$ 时，有

$$n_\alpha(0)\gg n_\beta(0) \qquad n_\gamma(0)=0 \tag{37}$$

这相当于有强烈的 S 波扰动的情况. 此时有

$$\begin{cases} n_1=\kappa_1\triangleq n_\alpha(0)+n_\beta(0) \\ n_2=\kappa_2\triangleq n_\alpha(0) \\ n_3=0 \end{cases}$$

故得

$$n_\alpha(T)=n_\alpha(0)\mathrm{sn}^2\{H[n_\alpha(0)+n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}(T-T_0),\kappa\} \tag{38a}$$

利用守恒律(31)，可得

$$n_\beta(T)=n_\beta(0)+n_\alpha(0)\mathrm{cn}^2\{H[n_\alpha(0)+n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}(T-T_0),\kappa\} \tag{38b}$$

$$n_\gamma(T)=n_\alpha(0)\mathrm{cn}^2\{H[n_\alpha(0)+n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}(T-T_0),\kappa\} \tag{38c}$$

其中模数 $\kappa=\left[\dfrac{n_\alpha(0)}{n_\alpha(0)+n_\beta(0)}\right]^{\frac{1}{2}}$.

由于 $n_\gamma(0)=0$，由式 (38c) 得

$$\mathrm{cn}^2\{H[n_\alpha(0)+n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}T_0,\ \kappa\}=0 \tag{39}$$

注意到当 K 为 Legendre 第一类完全椭圆积分时，有 $\mathrm{sn}\{K,\kappa\}=1$，$\mathrm{cn}\{K,\kappa\}=0$. 且实数基本周期为 $4K$，故有

$$H[n_\alpha(0)+n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}T_0=K(\kappa) \tag{40}$$

即 $H[n_\alpha(0)+n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}T_0$ 是双周期函数 Jacobi 椭圆正弦和椭圆余弦的实数基本周期的四分之一.

考虑到 $\kappa=\left[\dfrac{n_\alpha(0)}{n_\alpha(0)+n_\beta(0)}\right]^{\frac{1}{2}}\lesssim 1$，我们取余模数

$$\kappa' \triangleq (1-\kappa^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{n_\beta(0)}{n_\alpha(0)+n_\beta(0)}\right]^{\frac{1}{2}} \ll 1,$$

并将K按κ'展开，舍弃二阶以上的小量，得

$$H[n_\alpha(0)+n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}T_0 \approx \ln\left(\frac{1}{\kappa'}\right) \tag{41}$$

则可估计出

$$T_0 \sim H^{-1}|C_\alpha(0)|^{-1}\ln\left|\frac{C_\alpha(0)}{C_\beta(0)}\right| \tag{42}$$

由(38)式解出的三个模态波动之间的能量变换过程见图 1a. 由图可以看出，最初S波扰动的能量转换为L波的能量，并激发出M波。受激的M波和L波由于非线性共振效应而得到发展. 在这个进程中，S波扰动的能量不断减少，至 $T=T_0$ 时有 $n_\alpha=0$. 这个过程的快慢可由(42)式作出估计. 此后L波和M波的能量又通过非线性共振效应而转化给S波. 从而可以认为，在上述初始条件下，非线性相互作用将是可逆的.

需要强调指出的是，上述结果是在特定的初始条件下获得的，即其初始能量主要集中在大波数模态上. 下面我们考察当初始能量主要集中在小波数模态上时的情形.

2. 当 $T=0$ 时，有

$$n_\beta(0) \gg n_\gamma(0) \quad n_\alpha(0)=0 \tag{43}$$

这相当于L波为有限振幅扰动而M波为弱波动的情况. 仍然考察方程(32a)，有

$$\begin{cases} n_1 = \kappa_1 \triangleq n_\beta(0) \\ n_2 = \kappa_2 \triangleq n_\gamma(0) \\ n_3 = 0 \end{cases}$$

代入(33)式，由于模数 $\kappa = \left[\frac{n_\gamma(0)}{n_\beta(0)}\right]^{\frac{1}{2}} \ll 1$，因此 Jacobi 椭圆函数可近似视为三角函数. 于是得

$$n_\alpha(T) \approx n_\gamma(0)\sin^2\{H[n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}T\} \tag{44a}$$

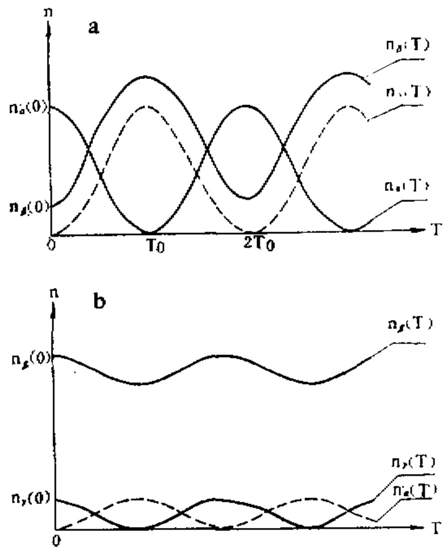

图 1　非线性共振过程中能量的时间变化

$$n_\beta(T) \approx n_\beta(0) - n_\gamma(0)\sin^2\{H[n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}T\} \tag{44b}$$

$$n_\gamma(T) \approx n_\gamma(0)\cos^2\{H[n_\beta(0)]^{\frac{1}{2}}T\} \tag{44c}$$

能量变换过程如图 1b 所示. 由图可见，在非线性共振过程中虽然可以出现S波，但其能量由弱波动M波的初始能量所限定，而L波则几乎保持其全部的能量.

五、讨　　论

1. 在非线性共振情况下，大气波动的能量转移过程与初始能谱分布有密切的关系.

如果初始扰动发生在大波数模态上，则其能量在共振激发过程中可以完全转化为较小波数模态的能量．如果初始能量主要集中在小波数模态上，则在整个非线性共振过程中，其绝大部分能量将保持在小波数模态内．

上述结果表明，在二维无辐散大气中，长波能量向短波的非线性转移是有限制的，反之则不然．换言之，只有当初始能量主要集中于大波数模态时，才能因非线性共振效应而使受激的较小波数模态的波动得到发展，从而实现短波能量完全转化为长波能量的非线性过程．这个结果可以视为某些更一般的理论结果[9]的例证．

2．如果用小扰动法作线性化处理，即设

$$\widetilde{C}_\alpha(T)=\widetilde{C}_\alpha^{(0)}+\widetilde{C}'_\alpha(T) \tag{45a}$$

$$\widetilde{C}_\beta(T)=\widetilde{C}'_\beta(T) \tag{45b}$$

$$\widetilde{C}_\gamma(T)=\widetilde{C}'_\gamma(T) \tag{45c}$$

其中 $\widetilde{C}'_\alpha$、$\widetilde{C}'_\beta$、$\widetilde{C}'_\gamma$ 相对于 $\widetilde{C}_\alpha^{(0)}$ 为小量．

代入(27)式可得

$$\frac{d}{dT}\widetilde{C}_\alpha=0 \tag{46a}$$

$$\frac{d}{dT}\widetilde{C}_\beta=iH\widetilde{C}_\alpha^{(0)}\widetilde{C}_\gamma^* \tag{46b}$$

$$\frac{d}{dT}\widetilde{C}_\gamma=iH\widetilde{C}_\alpha^{(0)}\widetilde{C}_\beta^* \tag{46c}$$

其解为

$$\widetilde{C}_\alpha=\text{const} \tag{47a}$$

$$\widetilde{C}_\beta=\widetilde{C}_\beta(0)e^{aT} \tag{47b}$$

$$\widetilde{C}_\gamma=\widetilde{C}_\gamma(0)e^{aT} \tag{47c}$$

其中 $a^2=H^2|\widetilde{C}_\alpha^{(0)}|^2$．因此，$\widetilde{C}_\beta$ 和 $\widetilde{C}_\gamma$ 将随时间 T 呈指数无限增长．这也是一般用线性模型讨论不稳定性问题时常见的结果．实际上，由于大气的色散性抑制了非线性效应引起的波的突陡，扰动的能量及其变化将是有界的．本文求得的耦合方程的非线性解显然正是体现了这一机理．因而，非线性解与线性模型的结果有着本质的区别．

为了进一步揭示旋转大气中行星波间非线性相互作用的性质，我们取如下的初始条件：

当 $T=0$ 时，有

$$n_\alpha(0)=\kappa_1=\kappa_2\qquad n_\beta(0)=0\qquad n_\gamma(0)=0 \tag{48}$$

即在初始时刻所有能量集中于大波数模态，由非线性共振相互作用而激发出另外两个模态的波动．此时有

$$\begin{cases}n_1=\kappa_1\triangleq n_\alpha(0)\\ n_2=\kappa_2\triangleq n_\alpha(0)\\ n_3=0\end{cases}$$

代入(33)式，由于模数 $\kappa=\left\{\frac{n_\alpha(0)}{n_\alpha(0)}\right\}^{\frac{1}{2}}=1$，Jacobi 椭圆正弦和椭圆余弦分别演变为双曲正切和双曲正割函数，于是得

$$n_\alpha(T)=n_\alpha(0)\tanh^2\{H[n_\alpha(0)]^{\frac{1}{2}}T\} \tag{49a}$$

$$n_\beta(T)=n_\alpha(0)\mathrm{sech}^2\{H[n_\alpha(0)]^{\frac{1}{2}}T\} \tag{49b}$$

$$n_\gamma(T)=n_\alpha(0)\mathrm{sech}^2\{H[n_\alpha(0)]^{\frac{1}{2}}T\} \tag{49c}$$

如所周知，这是与著名的 Kortweg-de Vries 方程相联系的孤立子解形式．这在一定程度上揭示了旋转大气中非线性行星波动的孤立子性质．凡孤立子解都有一个重要而带普遍性的特点[10]：即使非线性耦合的强度极为微弱，它们也仍然存在．因此

弱耦合≠弱幅

由此可见，旋转大气中行星波的非线性共振相互作用是十分重要的．由于线性模型不能反映非线性相互作用，从而至少不能正确描述某些重要的演变过程，这是不可不加以注意的．

参 考 文 献

[1] Longuet-Higgins, M. S., and Gill, A. E., Proc. Roy. Soc., **A299**, 120—140, 1967.
[2] 伍荣生，中国科学，No. 2, 195—203, 1979.
[3] Silberman, I., *J. Meteor.*, **11**, 27—34, 1954.
[4] 叶笃正、李麦村，第二次全国数值预报会议文集，科学出版社，181—192, 1979.
[5] Яглом, А.М., Изв. АН СССР, сер. геофиз, No. 4, 346—369, 1953.
[6] Platzman, G. W., *J. Meteor.*, **17**, 635—644, 1960.
[7] Baer, F., and G. W. Platzman, *J. Meteor.*, **18**, 393—401, 1961.
[8] Fjörtoft, R., *Tellus*, **5**, 225—237, 1953.
[9] 曾庆存，中国科学，No. 10, 986—995, 1979.
[10] 李政道，场论与粒子物理学，科学出版社，84—86, 1981.

RESONANT INTERACTIONS BETWEEN PLANETARY WAVES ON ROTATING SPHERE

Li Xianlang

(*Chengdu Institute of Meteorology*)

Abstract

In this paper, the nonlinear potential vorticity equation on the sphere is discussed. The coupling equation of three-wave resonan interactions has been calculated by multiple-time-scale analysis. It is found that the general solution of nonlinear coupling equation can be expressed in the elliptic function, so that the energy of perturbation and its change are bounded. Meanwhile, we examine the conservation law of three-wave resonance system and the transformation of energy in the course of resonance excitation.

The author points out that nonlinear interactions are reversible under given initial conditions, and that the energy of initial perturbation with large wave number modes can be completely transformed into the energy with lesser wave number modes in the course of resonance excitation, so far as the zonal wave number spectrum is concerned. Finally, this paper brings to light the soliton behavior of atmospheric nonlinear planetary wave on rotating sphere.