

关于雷电脉冲辐射场的初步分析

刘新中

提 要

本文利用宽频带问题的处理方法,同时还采用频域分割的方法,处理和分析了北京地区连续三个雷雨季节,部分雷电脉冲辐射场的实测波形。结果表明:多数雷电脉冲辐射场的近区波形,可以分解为具有共性的白噪声分量,和各具特性的众数分量两者之和。在同一波形中两者所占的比例有相等的趋势。而其远区波形的某些频域特征值随传播的变化,则和源为单纯白噪声谱的理论传播变化有相近的趋势。

一、雷电探测及数据分析方法

雷电是一种有较大随机分布特征的大气电学事件。对于每一次闪电,其发生的地点、发生的时间、闪道的空中姿态、场强分布、释能总量、射电频谱的分布特性等往往各不相同。这对雷电研究和探测带来了一定的困难。

如果能够从实际探测到的雷电脉冲辐射场中,分离出对多数雷电单体均有意义的共同成份,这对雷电研究及探测无疑是有益的。特别当这种共同成份中的某种特征和传播有关时,则对雷电单站定位探测,更有现实意义。

一次闪电,其源的电流,通常由先导和回击两个过程组成。不同次闪电,上述两个过程重复出现的次数不同。有的仅由一次先导和一次回击组成。有的由多次先导和回击相互衔接组成。两次回击之间往往有数毫秒的间隔。一次闪电释放的能量,主要部分是回击过程的贡献。先导和回击两过程,均伴有辐射场。

对闪电进行的探测表明,其源的辐射场的射电频谱的频带分布极宽,从紫外区,可见光区、一直到无线电波的极低频段,均有能量分布。该辐射将在地-电离层波导介质中传播。对于微波以上频段内的成份,它们不被电离层反射,只能在视距内被探测到。低于此频段的成份,将被电离层反射,从而传播到远方。

由地-电离层波导介质的衰减特性可知,该介质对电磁波的衰减,在10千赫至20千赫之间有一个最小衰减窗口。该窗口以外,频率越高衰减越大。因此,远区收到的雷电脉冲往往是一些频率在100千赫以下的甚低频射电脉冲。

显然,对雷电脉冲辐射场进行宽频带探测,可获得其传播过程的一些信息。但是一个宽的频率窗将对应于时域上一个窄的采样间隔。对于脉冲持续时间较长的事件,数据处理的工作量较大。在实际情况下,有时甚至是无法完成的。因此,需选择一合适的时间窗

1983年7月3日收到,1983年10月28日收到第一次修改稿,1984年2月13日收到第二次修改稿。

和频率窗,即满足宽频带探测的要求,这样数据处理工作量又是可以实现的。

综合考虑后,我们选择的时间窗是 0 至 500 微秒,它可以容纳一次回击全过程和部分先导过程。频率窗是 0.5 千赫至 60 千赫,它包含着地-电离层波导介质的最小衰减窗口,及其附近的一个较宽频段。这样选择的时间窗和频率窗显然不能容纳一次闪电全部信息,特别是多次先导和回击过程类的闪电,但它至少可包含其中主要过程,即回击过程的信息。因此,对雷电研究仍然是有益的。

对应于上述时间窗和频率窗,我们研制了相应的探测设备,即甚低频宽频带接收机,其带宽为 0.5 千赫至 100 千赫,带内波动低于 10%。接收天线采用 2 米鞭状垂直天线,感应雷电引起的垂直场分量的变化。该接收机,除天线外,还有射随器、触发选择、线性延迟、瞬态波形记录等部分。记录器量程为 500 微秒,并有 500 微秒保护时间。触发选择为一比较器,射随器输出的脉冲电平与设定的电平比较,当满足阈值要求时,输出一控制脉冲,以开启瞬态记录设备的前置门,使射随器输入到线性延迟的信号进入记录设备进行记录。对 25 公里范围内发生的雷电进行探测时,阈值选定为 1 伏/米左右。对 25 至 100 公里范围内发生的雷电进行探测时,阈值选定为 0.5 伏/米左右。更远的雷电,阈值选定在 0.2 至 0.4 伏/米范围内。

每台接收机配置时间测量系统和交叉环测向系统组成一单站探测系统。在 1980 至 1982 年三个雷雨季节中,对北京周围 600 公里范围内发生的雷电脉冲的辐射场进行了多站交汇及时间同步观测。探测站设置在清河、大兴和旧宫北京气象站三处(见图 1)。

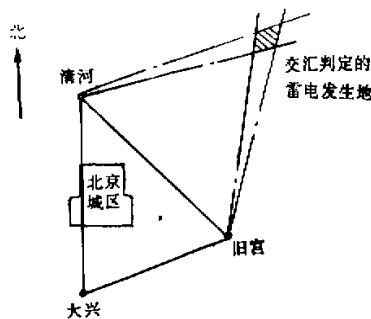


图 1 探测站的设置情况

接收机探测并记录鞭状天线敏感到的,由雷电脉冲引起的空间垂直电场的瞬态变化波形。交叉环测向系统测定该入射波的来波方位角。时间测量系统由铷原子钟守时,并用中央广播电台播发的整点时号进行站间时钟粗同步,而后用电视比对进行精同步。与守时钟并接的来波时刻寄存钟,由铷钟提供时间频率标准,并可记录前置门开启瞬间的时、分、秒、毫秒绝对时间。它还记录并打印输出每一来波的到达时间。

测向系统的测角精度可达 $\pm 1^\circ$ 左右。两站之间的时间同步精度优于 1 毫秒。

当雷阵雨经过某探测站天顶时,该站只开启甚低频接收机和守时钟,进行单站探测。来波波源到探测站的距离,由人工判定闪光与雷声到达的时间差给定。此方法可探测 25 公里范围内发生的雷电。

当雷阵雨发生在远方时,由旧宫气象站的测雨雷达向各站实时通报雷阵雨所在方位,向各测站提供引导数据,使交叉环天线的开角方向指向雷雨发生的方位。各站根据引导数据选择适当的触发阈值电平。各站获得的探测结果进行事后处理。比对各来波到达时刻。各站在绝对时间的同一毫秒内记录到的波形,才认为是同一雷电产生的辐射场在各站的表现。其地理位置,则依据各站测出的来波方位角在地图上做图交汇给出。最后再与当地气象实况记录核实,如在该记录时刻,交汇区域确实发生了雷阵雨,听到过雷声,则该记录才予以确认。

由交叉环定向交汇观测原理可知:只有在两站连线中点法线方向上,定位误差最小。综合考虑其它因素后,定位偏差与探测距离相比约为 5%~10%。

在上述频域中,除了雷电脉冲之外,尚有工业干扰,导航台、地磁脉动等等。无雷雨季节进行的干扰调查表明,工业干扰、导航台信号的电平幅度,对于上述探测只有 0.01 伏/米到 0.1 伏/米左右。因其远低于设定的阈值,因此不予记录。对于地磁脉动,估计有时可能有较强的幅度。但是由资料^[1]表明,地磁扰动月平均只有 3 到 10 次,而雷雨季节中,一次持续十几分钟的雷阵雨,至少可发生十几到几十个闪电。因此,即使上述诸次探测中混有少数地磁脉动波形,从统计角度上来讲,它占总样本数的比率很小,亦可不予考虑。

雷电源的电荷矩 M 引起的场可用 $E(t, D)$ 表示,它随时间 t 和传播距离 D 而变化。对 $E(t, D)$ 进行傅里叶变换,

$$A(f, D) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t, D) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (1)$$

由于频率窗限定了频带范围,因此有:

$$E(t, D) = \begin{cases} E(t, D) & f_1 \leq f \leq f_2 \\ 0 & f < f_1; f > f_2, \end{cases} \quad (2)$$

式中 $f_1 = 0.5$ 千赫, $f_2 = 60$ 千赫。在实际的解谱计算中, f_1 可为其积分下限, f_2 可为其积分上限。

在该频带内,可定义 $E(t, D)$ 的总谱:

$$W = \int_{f_1}^{f_2} A(f, D) df. \quad (3)$$

$E(t, D)$ 的谱心频率、上四分位频率、下四分位频率和四分位带宽各定义为:

$$f^0(D) = \frac{\int_{f_1}^{f_2} A(f, D) f df}{W}, \quad (4)$$

$$\frac{\int_{f_1}^{f_{0.25}} A(f, D) df}{W} = 0.25, \quad (5)$$

$$\frac{\int_{f_1}^{f_{0.75}} A(f, D) df}{W} = 0.75, \quad (6)$$

$$\Delta f = f_{0.75} - f_{0.25}. \quad (7)$$

上述四个量,简称为 $E(t, D)$ 的四个频域特征值。

对于一个遍布于 f_1, f_2 带内的谱函数,可将其沿振幅分为两个部分的代数和。其中一

部分沿频率轴取相等的值, 称其为白噪声分量。另一部分沿频率轴取变化的值, 称其为众数分量。

白噪声分量的总谱可按下式进行近似计算:

$$W_{\text{白}} = \frac{(f_2 - f_1) \sum_{n=1}^N A_{\min}(n)}{N}, \quad (8)$$

其中 $A_{\min}(n)$ 为 $A(f, D)$ 中位于 f_1, f_2 带内的第 n 个极小值, N 为该带内 $A(f, D)$ 的极小值总个数。此处要求 $A_{\min}(n)$ 和 N 满足如下不等式:

$$A_{\min}(n) \leq 0.2 A_{\max}. \quad (9)$$

$A_{\max}$ 为 $A(f, D)$ 在 f_1, f_2 带内的极大值。

$E(t, D)$ 波中的众数分量的总谱为:

$$W_{\text{众}} = W - W_{\text{白}}, \quad (10)$$

两者之比为:

$$\eta = W_{\text{众}} / W_{\text{白}}. \quad (11)$$

此比值可表征 $E(t, D)$ 波中, 白噪声分量与众数分量各占的比重。当 η 为 1 时, 两者在 $E(t, D)$ 中各占一半。

把实测波形离散化后, 再经傅里叶变换, 而后分解为白噪声分量与众数分量之和的分析方法是本文的主要特点。

二、对实测近区波形的数据处理和分析

在上述三个雷雨季节中, 用单站法和两站交汇方法进行探测, 共获得 134 个闪电源距探测站在 40 公里范围以内的波形。其中 97 个是单站法获得的。总计为 6 次不同的雷阵雨中发生的雷电, 称其为近区辐射场波形。

上述波形在 500 微秒的时间窗中, 以 5 至 10 微秒的时间分辨率, 逐一离散化。离散时不得遗漏极大值。时间原点取在极大值波峰前沿起始点处。离散化处理后进行归类比较可知, 其中 107 个波形的离散结果可近似表为:

$$E(t, D_0) = \begin{cases} E^0 \delta(t) & 0 \leq t \leq \Delta t \\ E(t) & \Delta t < t \leq T, \end{cases} \quad (12)$$

式中 $D_0 \in 10 \sim 40$ 公里, $\Delta t \in 5 \sim 10$ 微秒为时间分辨率, T 为时间窗 500 微秒, E^0 为一常量, 对于不同次闪电取不同值, $E(t)$ 为一函数。其典型的原始波形记录见图 2a、b 左侧波形所示。统计表明, 此类波形占近区波形总样本数的 80% 左右, 是被探测到的多数波形所具有的一种特征。

这类波形在时域上的特征十分显著, 就是由一个电平幅度很高的冲击脉冲, 与一个电平幅度较低的恢复过程衔接而成。因此, (12) 式可写成代数和形式。对其进行傅里叶变换可得:

$$A(f, D_0) = A^0 + A(f), \quad (13)$$

其中 A^0 为 $E^0 \delta(t)$ 的傅里叶变换, 显然为一白噪声谱。 $A(f)$ 为 $E(t)$ 的傅里叶变换, 为一

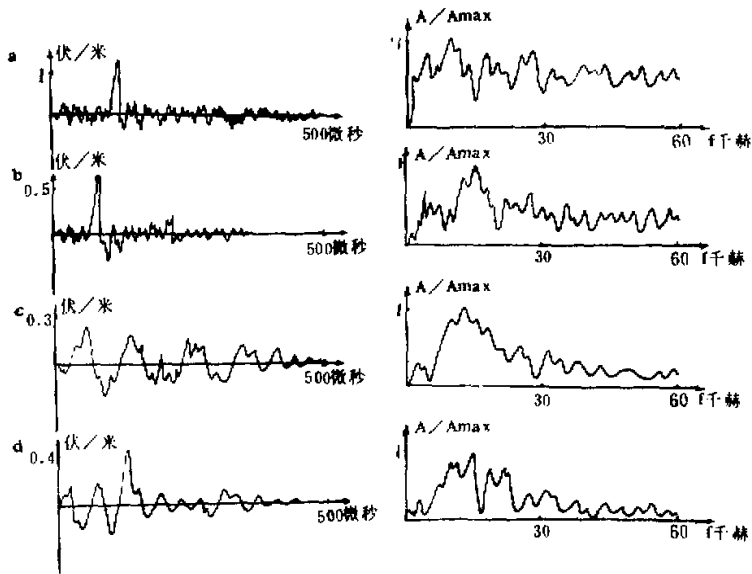


图 2 典型的原始波形记录

表 1 源附近雷电脉冲辐射场波形的谱心频率及白噪声分量与众数分量比的实测统计

波形编号	气象定距 $D(KM)$	谱心频率 $f^c(D)$ (KHz)	众数分量/白噪声分量 η
500	10~40	27.62	1.17
600	10~40	22.41	1.80
700	10~40	31.28	1.22
800	10~40	29.94	0.80
900	10~40	25.52	0.42
1000	10~40	29.15	1.19
1100	10~40	19.41	2.66
1200	10~40	23.56	1.72
1300	10~40	32.90	1.39
1400	10~40	27.94	1.36
1500	10~40	24.47	1.40
1600	10~40	22.66	1.12
1700	10~40	31.54	1.24
1800	10~40	25.92	0.36
1900	10~40	27.06	1.84
2000	10~40	28.13	0.82
2100	10~40	30.57	0.37
2200	10~40	24.96	2.35
2300	10~40	28.19	0.58
2400	10~40	29.86	0.60
2500	10~40	29.17	0.99
平均值	25.0	27.26	1.21

变化的谱函数, $A(f, D_0)$ 的极大值由其给定, 因此称为众数分量。

我们选列出清河站于 1981 年 9 月 21 日 17 时 07 分至 09 分三分钟内顺序记录到的, 一组过顶冰雹云伴生的雷电脉冲辐射场波形。将上述波形依 WFTA 标准程序^[2], 逐一进行傅里叶变换, 按定义算出其 $f^0(D_0)$ 和 η , 并将对应的编号和气象资料给出的定距范围一并列于表 1 之中。对于其它波形, 亦经同样处理, 但不再列出结果。该次雹云落下的雹块直径约为 5~10 毫米, 落在天线周围的平均密度约为 10~30 个/米², 雷声成片, 人耳无法分辨单个闪电伴生的雷鸣。

由表 1 最后一列数据及其平均值分布可知, 对于可区分为白噪声分量和众数分量两者之和的这些近区波形, 其比值 η 有趋于 1 的显著趋势。它表明, 在选定的时间窗和频率窗中, 雷电脉冲近区辐射场波形的白噪声分量和众数分量有相等的趋势。

三、对实测远区波形的数据处理和分析

上述探测中, 还记录到一批闪电电源到测站距离在 40 至 600 公里范围内的波形, 称为远区波形。多数是由两站交汇观测给出的定位数据, 少数是经单站定向观测, 对照气象资料, 给出一次孤立雷阵雨分布范围的平均距离数据。

上述波形不再具备近区场波形的特征。典型的波形记录见图 2 中的 c、d 左侧波形。右侧为其傅里叶振幅谱, a、b 亦同。时域上它们有较多个准半周。主能带分布明显集中于介质的最小衰减窗口附近。

根据前面对近区实测波形的分析统计及所得结果, 若假定这些远区波形对应的近区场波形, 其中多数也符合这些结果, 那么其近区波形可表为白噪声分量与众数分量两者之和。显然, 对于每个雷电的辐射场, 其特征主要由其众数分量决定。不妨再进一步假设每次闪电辐射场波形的众数分量都是随机分布的。考虑到白噪声分量与众数分量的比有趋于 1 的趋势, 因此可推断, 整个雷电脉冲辐射场波形在地-电离层波导介质中传播时, 似应与单纯白噪声谱的理论传播特性有相近的趋势。

对于一个源为单纯白噪声谱的电磁脉冲波, 其沿地-电离层波导介质传播时, 它的频域上四个特征值的变化, 可由波导传播理论导出。

在 f_1, f_2 频段内, 源谱为白噪声分布的脉冲波的谱可表为

$$A(f, 0) = A^0. \quad (14)$$

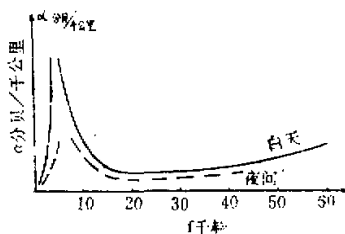


图 3 地-电离层波导介质的甚低频衰减特性

地-电离层波导介质在相应频段上的衰减特性,因波模的阶次不同而差异很大。图3仅列示一阶模的衰减特性曲线^[5]。其它模次,比如零阶模和三阶以上的高阶模特性可参阅有关文献[3]。

由波导传播理论和前面给出的四个频域特征值定义不难证明,在传播过程中,只有一阶模的衰减才对其有显著影响。零阶模在上述探测距离范围内,在合成场中占的比重较大,但其衰减随频率变化很小。高阶模衰减特性随频率变化大,但在合成场中占的比重始终很小。因此,零阶和高阶模的影响均可不予考虑。

Wait 给出的甚低频域的电磁波沿地-电离层波导介质传播时,一阶模场的模式如下:

$$A(f, D) = \frac{A(f, 0)}{\left[R \sin \left(\frac{D}{R} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} e^{[-\alpha(f)D]}, \quad (15)$$

式中 R 为地球半径, $\alpha(f)$ 为图2所示的衰减对应的奈贝数。

把(14), (15)分别代入(3), (4), (5), (6)四个频域特征量的定义中,把图2中的分贝数化为奈贝数,而后逐点进行积分。于是可求得源为单纯白噪声谱的电磁波的四个频域特征值,在传播过程中变化的数值解。设算结果用实线标在图4a、b、c、d中。a图为 $f^0(D) \sim \ln D$ 分布, b图为 $f_{0.25} \sim \ln D$ 分布, c图为 $f_{0.75} \sim \ln D$ 分布, d图为 $\Delta f \sim \ln D$ 分布。 $\ln D$ 为对 D 取自然对数。

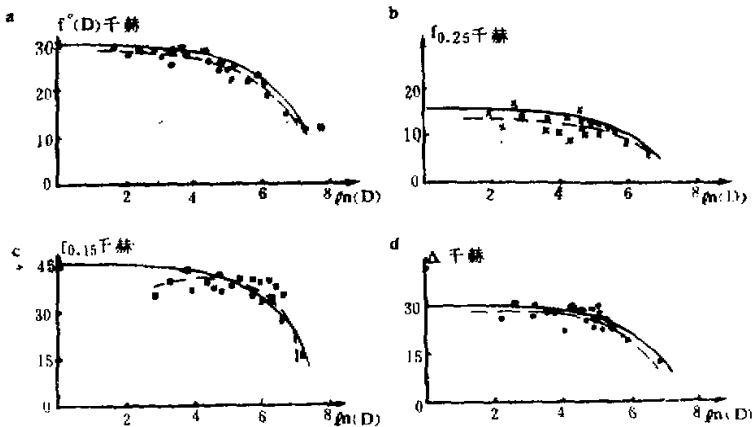


图4 源为单纯白噪声谱的电磁波的四个频域特征值在传播过程中变化的数值解

把前述由旧官、清河两站交汇观测得到的有定位数据的远区波形,仍由 WFTA 标准程序进行解谱运算,并求出对应的四个频域特征值。此处仅选择那些位于最佳定位方向附近发生的雷电,并且交汇定位、时间同步、气象资料均齐备的波形,其计算结果列于表2。

在清河站、大兴站,曾获得过三次单站探测数据。当时的气象资料表明了雷阵雨发生的区域。此三次数据包括表1中给出的一组,大兴站在气象雷达引导下对密云地区一次

表 2 交汇定位的较远雷电脉冲辐射场波形的四个频域特征值的实测统计

探测站址	波形编号	交汇距离 $D(\text{KM})$	对数距离 $\ln(D)$	谱心频率 $f^0(D)(\text{KHz})$	上四分位频率 $f_{0.75}(\text{KHz})$	下四分位频率 $f_{0.25}(\text{KHz})$	四分位带宽 $\Delta f(\text{KHz})$
旧宫	016	13.80	2.62	23.54	11.36	36.37	20.46
旧宫	015	22.40	3.11	23.50	7.96	38.65	30.69
旧宫	006	39.01	3.66	27.51	13.64	45.47	31.83
清河	016	41.02	3.71	24.50	11.31	36.20	24.89
旧宫	001	59.60	4.09	25.02	9.09	38.65	29.56
清河	014	64.20	4.16	19.40	6.75	53.54	27.15
旧宫	005	72.80	4.29	25.06	9.10	40.92	31.82
清河	001	84.40	4.44	29.61	15.84	32.99	17.15
清河	006	90.03	4.50	24.99	6.82	38.65	31.83
清河	005	93.20	4.53	25.10	9.05	40.73	31.68
清河	003	95.01	4.55	26.46	11.31	40.70	29.41
旧宫	051	96.50	4.57	23.77	6.82	40.90	34.10
清河	010	106.2	4.67	19.86	6.79	36.20	29.40
清河	022	108.0	4.68	28.73	14.71	45.25	30.54
旧宫	013	115.0	4.74	21.69	6.80	36.20	29.42
清河	009	115.6	4.75	22.95	6.79	43.20	36.38
清河	013	154.4	5.04	28.01	13.58	45.25	31.67
清河	131	158.6	5.07	24.80	9.05	42.99	33.94
旧宫	004	304.6	5.72	16.98	9.08	22.73	13.64
清河	008	557.6	6.22	13.23	4.53	18.10	13.58

雷阵雨的观测,以及对 1981 年 21 号台风登陆时雷阵雨的观测。关于这三次探测波形,我们仅把其谱心频率数据列在表 3。表中最下一行为其诸样本的平均值。选列此组数据的目的是与交汇法得到的单个闪电数据进行对照、以检验交汇数据的可靠性。由图 4a 可知,两者的分布是吻合的。

把表 2 中的数据以“○”表示 $f^0(D)$ ，“×”表示 $f_{0.25}$ ，“□”表示 $f_{0.75}$ ，“·”表示 Δf 等与传播路程 D 的自然对数所对应的点子，并描绘在图 3a、b、c、d 中。以和实线表示的源为单纯白噪声谱的理论传播曲线对照。表 3 中的平均值，则以“*”表示，同标在图 4 a 中。

对于上述点子，用实验数据拟合的方法求出最佳拟合曲线，以虚线描在同一图中。

对比图 4 中实线，虚线和实验数据点子的分布，可明显看出，由交汇方法探测得到的远区雷电脉冲的辐射场波形，其四个频域特征值随传播的变化趋势，与源为单纯白噪声谱的电磁波的理论传播变化趋势基本上吻合。特别是谱心频率 $f^0(D)$ 和四分位带宽 Δf ，显得更加接近一些。

由此表明，由近区场波形得到的统计特性，也适用于远区探测得到的波形。从而表明，上述四个频域特征量，对多数雷电来说，均为传播路程的单值函数。对这些函数的改进和充实，显然对雷电单站定位探测有参考意义。

理论曲线和实验曲线的差别，似乎表明，或者是不同个波形中的众数分量还有相同成份可供提取，或者是由于忽略零阶模和高阶模的影响，造成了理论曲线的误差。继续深入讨论这一问题，已超出本文范围。实验点子的离散性则说明了每次闪电的个性，即其众数分量分布的随机性。交汇定位误差也是原因之一。

表 3 单站定位及气象定位雷电脉冲辐射场波形的四个频域值实测统计

探测站址	清 河		探测站址	大 兴		探测站址	大 兴	
波形编号	气象定距 (KM)	谱心频率 (KHz)	波形编号	气象定距 (KM)	谱心频率 (KHz)	波形编号	气象定距 (KM)	谱心频率 (KHz)
500	10~40	27.60	D-001	72~128	26.78	L-001	1200~1800	13.56
600	10~40	22.41	D-002	72~128	29.82	L-002	1200~1800	13.90
700	10~40	31.28	D-003	72~128	14.60	L-003	1200~1800	22.20
800	10~40	29.94	D-004	72~128	25.79	L-004	1200~1800	17.11
900	10~40	25.52	D-005	72~128	27.72	L-005	1200~1800	18.58
1000	10~40	29.15	D-006	72~128	28.66	L-006	1200~1800	14.42
1100	10~40	19.41	D-007	72~128	25.81	L-007	1200~1800	14.89
1200	10~40	23.56	D-008	72~128	20.28	L-008	1200~1800	17.01
1300	10~40	32.90	D-009	72~128	26.34	L-009	1200~1800	15.52
1400	10~40	27.94	D-010	72~128	19.55	L-010	1200~1800	16.91
1500	10~40	24.47	D-011	72~128	19.49	L-011	1200~1800	18.68
1600	10~40	22.66	D-012	72~128	31.52	L-012	1200~1800	18.19
1700	10~40	31.54	D-013	72~128	27.74	L-013	1200~1800	18.57
1800	10~40	25.92				L-014	1200~1800	18.92
1900	10~40	27.08				L-015	1200~1800	16.39
2000	10~40	28.13				L-016	1200~1800	20.30
2100	10~40	30.57				L-017	1200~1800	16.50
2200	10~40	24.96				L-018	1200~1800	18.43
2300	10~40	28.19						
2400	10~40	29.86						
2500	10~40	29.17						
平均值	25.0	27.30	平均值	100.0	25.41	平均值	1500.0	17.18

四、结 束 语

值得注意的是,本分析方法除了设定的频率窗和时间窗限制条件之外,对闪电的类型、强度均未作特别要求。凡进入记录信道被记录下的波形大部分具有上述结果,而不管其类型如何。

这些结果是从北京地区实际探测中获得的。其它地区的雷电是否也有类似特征,则需由当地的实际探测给予判定。

本研究在朱岗崑教授指导下完成,并得到徐小岩、凌福根、张修智的帮助。实验数据由符红铁、张岑、李新康等提供。在此一并表示谢意。

参 考 文 献

- [1] 朱岗崑主编,磁暴目录及日地物理基本资料,中国科学院地球物理研究所,1982.
- [2] 丁坤、郭允晨、苏皖生,用微型机实现 840 点 Winograd 傅里叶变换算法,计量学报,3 卷 3 期, p. 213, 1982.
- [3] Watt, A. D., V. L. F Radio Engineering, 1967.

PRELIMINARY ANALYSIS OF LIGHTNING PULSE RADIATION FIELD (LPRF)

Liu Xinzong

Abstract

In this paper the author has processed and analysed some LPRF signals received in Beijing area during three successive thunderstorm seasons, using division-in-frequency method and wide-frequency band processing technique. The results show that a spectrum of LPRF signal near the source consists of two parts. One component is the ordinary white noise, and the other is the mode of the spectrum. Statistics indicates that the two parts of this signal tend to be equal. On the other hand, for LPRF signal taken far away from the source, some Characteristic values of its propagation function approach to the theoretical ones of the ideal white noise.

更 正

对本刊 7 卷 2 期“非线性发展方程的计算稳定性对初值的依赖”(作者周振中)一文特作如下更正:
由于本文未考虑到 $\delta < 0$ 的情形,以至在数学上显得不严格,为此需在定理一、定理三中增加

$$|a| = \inf_{s \in r} \left\{ \sqrt{\frac{\delta_s(1 - \lambda\delta_s)}{\lambda}} \right\} \quad s = \{0, 1, 2, \dots\}$$

在定理二、定理四中增加

$$|a| = \inf_{s \in r} \left\{ \sqrt{\frac{\delta_s - \lambda\delta_{s+1}}{\lambda}} \right\} \quad s = \{0, 1, 2, \dots\}$$

的条件,这样,就能保证定理中所出现的 δ 均 > 0 ,借此维护本文所得的结论。