第10卷 第1期 大 气 科 学 Vol. 10, No. 1
1986年3月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Mar., 1986

多维约化摄动和大气中的非线性波

高守亭 杨惠君
（中国科学院大气物理研究所） （成都气象学院）

提 要

本文把一维约化摄动法推广到多维的情形．指出此方法是研究大气中非线性波传播和相互作用的有利工具．并通过求解 Cubic-Schrödinger 方程，来说明此方法在气象问题中的具体应用．

一、前 言

众所周知，摄动法在研究弱非线性波方面有着广泛的应用[1,2]．特别是七十年代以来逐渐形成的约化摄动法(主要用于一维情形)，已成为研究各种非线性波远场的有利工具[3]．它在等离子体问题的研究中已有不少运用[4,5]．

所谓约化摄动法，就是对于一般描述非线性波的复杂方程组约化成较为简易可解的单个非线性方程，例如 Kdv 方程，Burgers 方程，Cubic-Schrödinger 方程等，从而可以研究非线性波的相互作用问题．本文对此方法进行了推广，并用推广后的方法求解了大气中出现的非线性波动方程——Cubic-Schrödinger 方程．

二、多维约化摄动法

考虑模式：

$$U_t + A_i U_{x_i} + B(U) = 0 \tag{2.1}$$

这里，$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$是一个具有 n 个分量的列向量．A_i 是 $n \times n$ 矩阵，$B(U)$ 是列向量，它们是 U 的函数．并运用了爱因斯坦和约定．

设方程 (2.1) 有常值态解 $U^{(0)} = \begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \\ \vdots \\ u_n^{(0)} \end{pmatrix}$，我们可以把方程 (2.1) 的解 U 在 $U^{(0)}$ 附近展开成

1982年12月13日收到，1984年2月27日收到再改稿．

$$U = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} U^{(\alpha)} \tag{2.2}$$

其中 ε 是小参数.

同样有:

$$A_i = A_i^{(0)} + \varepsilon \nabla A_i^{(0)} \cdot U^{(1)} + \varepsilon^2 \left(\nabla A_i^{(0)} \cdot U^{(2)} + \frac{1}{2} \nabla\nabla A_i^{(0)} : U^{(1)} U^{(1)} \right) + \cdots \tag{2.3}$$

$$B = B^{(0)} + \varepsilon \nabla B^{(0)} \cdot U^{(1)} + \varepsilon^2 \left(\nabla B^{(0)} \cdot U^{(2)} + \frac{1}{2} \nabla\nabla B^{(0)} : U^{(1)} U^{(1)} \right) + \cdots \tag{2.4}$$

这里

$$\nabla A_i^{(0)} \cdot U^{(1)} \equiv \left(\frac{\partial A_i}{\partial u_j} \right)_{U=U^{(0)}} u_j^{(0)}$$

$$\nabla\nabla A_i^{(0)} : U^{(1)} U^{(1)} \equiv \left(\frac{\partial^2 A_i}{\partial u_j \, \partial u_k} \right)_{U=U^{(0)}} u_j^{(0)} u_k^{(0)} \cdots\cdots$$

引入 Gardner-Morikawa 变换:

$$\xi_i = \varepsilon (x_i - \lambda_i^{(0)} t) \qquad \tau = \varepsilon^2 t \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.5}$$

$\lambda_i^{(0)}$ 是 i 方向的群速度零级近似. 于是有

$$\frac{\partial}{\partial t} = (-\lambda_i^{(0)}) \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi_i} \tag{2.7}$$

其中 ξ_i, τ 为慢变量. 这时 U 又可写成

$$U = U^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_{(l)}^{(\alpha)}(\zeta_i, \tau) \exp[il(k_i x_i - \omega t)]$$

$$= U^{(0)} + \varepsilon^1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_{(l)}^{(1)}(\xi_i, \tau) \exp[il(k_i x_i - \omega t)]$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_{(l)}^{(2)}(\xi_i, \tau) \exp[il(k_i x_i - \omega t)] + \cdots \tag{2.8}$$

因为 U 为实数,故有 $U_l^{(\alpha)} = U_{-l}^{(\alpha)*}$, $U_{-l}^{(\alpha)*}$ 是 $U_l^{(\alpha)}$ 的共轭. 把方程 (2.3)、(2.4) 及 (2.8) 代入方程 (2.1),然后比较 ε 的同次幂. 并注意到 $U^{(0)}$ 为常值,即

$$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial U^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \tag{2.9}$$

我们有

$$B^{(0)} = 0 \tag{2.10}$$

$$W_l U_l^{(1)} = 0 \tag{2.11}$$

$$W_l U_l^{(2)} + (-\lambda_i^{(0)} I + A_i^{(0)}) U_{l\xi_i}^{(1)} + \left\langle \sum_{l'} i l' k_i \nabla A_i^{(0)} \cdot U_{l'}^{(1)} U^{(1)} e^{il'\phi} \right\rangle_l$$

$$+ \frac{1}{2} \nabla\nabla B^{(0)} : \langle U^{(1)} U^{(1)} \rangle_l = 0 \tag{2.12}$$

$$W_lU_l^{(3)}+(-\lambda_i^{(0)}I+A_i^{(1)})U_{l\xi_i}^{(2)}+U_{l\tau}^{(2)}+\nabla A_i^{(0)}\cdot\left\langle\sum_{l'}U^{(1)}U_{l'\xi_i}^{(1)}e^{il'\phi}\right\rangle_l$$
$$+\nabla A_i^{(0)}\cdot\left\langle\sum_{l'}il'k_iU^{(1)}U_{l'}^{(2)}e^{il'\phi}\right\rangle_l+\nabla A_i^{(0)}\cdot\left\langle\sum_{l'}il'k_iU^{(2)}U_{l'}^{(1)}e^{il'\phi}\right\rangle_l$$
$$+\frac{1}{2}\nabla\nabla A_i^{(0)}:\left\langle\sum_{l'}il'k_iU^{(1)}U^{(1)}U_{l'}^{(1)}e^{il'\phi}\right\rangle_l$$
$$+\nabla\nabla B^{(0)}:\langle U^{(1)}U^{(2)}\rangle_l+\frac{1}{6}\nabla\nabla\nabla B^{(0)}:\langle U^{(1)}U^{(1)}U^{(1)}\rangle_l=0 \tag{2.13}$$

其中

$$W_l=-il\omega I+ilk_iA_i^{(0)}+\nabla B^{(0)} \tag{2.14}$$

I 为单位矩阵，$\phi=k_ix_i-\omega t$，$\langle\ \rangle_l$ 表示第 l 次波的系数.

现在着重考虑其线性色散关系

$$detW_{\pm1}=0 \tag{2.15}$$

的波动. 由于

$$W_{\pm1}=\mp i\omega I\pm ik_iA_i^{(0)}+\nabla B^{(0)} \tag{2.16}$$

由方程 (2.11)，可知存在

$$U_1^{(1)}=R\varphi \tag{2.17}$$

在如下情况下，即

$$|detW_l|\neq 0\quad(|l|\neq 1) \tag{2.18}$$

显然有

$$U_l^{(1)}\equiv 0\quad 当\ |l|\neq 1\ 时 \tag{2.19}$$

在这里 R 是对应本征值为零的 W_1 的右本征列向量. 即有

$$W_1R=0$$

且 φ 为一个关于 ξ_i,τ 的标量函数 $\varphi=\varphi(\zeta_i,\tau)$，它是我们后面正要求的函数.

将方程 (2.17)，(2.19) 代入方程 (2.12)，对 $l=1$，有

$$W_1U_1^{(2)}+(-\lambda_i^{(0)}I+A_i^{(0)})R\xi_i=0 \tag{2.20}$$

由 (2.16) 式得

$$\frac{1}{i}\frac{\partial W_1}{\partial R_i}=-\lambda_i^{(0)}I+A_i^{(0)} \tag{2.21}$$

再求出 W_1 阵的左本征向量 L，即满足

$$LW_1=0$$

的向量.

由于 $W_1R=0$，可得

$$\frac{\partial W_1}{\partial k_i}R+W_1\frac{\partial R}{\partial k_i}=0 \tag{2.22}$$

于是方程 (2.20) 可以被约化为

$$W_1U_1^{(2)}+\frac{1}{i}\frac{\partial W_1}{\partial k_i}R\varphi_{\xi_i}=W_1\left(U_1^{(2)}+i\frac{\partial R}{\partial k_i}\varphi_{\xi_i}\right)=0 \tag{2.23}$$

得

$$U_1^{(2)} = R\varphi^{(2)} - i\frac{\partial R}{\partial k_i}\varphi_{\xi_i} \tag{2.24}$$

这里 $\varphi^{(2)}$ 是另一个关于 ξ_i、τ 的标量函数.

从方程 (2.12) 可以推出

$$U_0^{(2)} = R_0^{(2)}|\varphi|^2 \tag{2.25}$$

$$U_2^{(2)} = R_2^{(2)}(\varphi)^2 \tag{2.26}$$

$$U_{-2}^{(2)} = R_{-2}^{(2)}(\varphi^*)^2 \tag{2.27}$$

$$U_l^{(2)} = 0 \quad 当 \quad l \geqslant 3 \tag{2.28}$$

其中

$$R_0^{(2)} = -W_0^{-1}\left\{ik_i[(\nabla A_i^{(0)} \cdot R^*)R - cc] + \frac{1}{2}(\nabla\nabla B^{(0)}:RR^* + cc)\right\} \tag{2.29}$$

$$R_2^{(2)} = -W_2^{-1}\left\{ik_i(\nabla A_i^{(0)} \cdot R)R + \frac{1}{2}\nabla\nabla B^{(0)}:RR\right\} \tag{2.30}$$

$$R_{-2}^{(2)} = -W_2^{*-1}\left\{-ik_i(\nabla A_i^{(0)} \cdot R^*)R^* + \frac{1}{2}\nabla\nabla B^{(0)}:R^*R^*\right\} \tag{2.31}$$

最后,我们用 L 左乘 (2.13) 式得到 Cubic-Schrödinger 方程:

$$a\varphi_\tau + b_{ij}\varphi_{\xi_i\xi_j} + c|\varphi|^2\varphi = 0 \tag{2.32}$$

其中

$$a = LR \tag{2.33}$$

$$b_{ij} = \frac{\partial L}{\partial k_i}W_1\frac{\partial R}{\partial k_j} \tag{2.34}$$

$$C = C_A + C_B \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} C_A = ik_iL\Big\{&2(\nabla A_i^{(0)} \cdot R^*)R_2^{(2)} - (\nabla A_i^{(0)} \cdot R_2^{(2)})R^* + (\nabla A_i^{(0)} \cdot R_0^{(2)})R \\ &+ (\nabla\nabla A_i^{(0)}:RR^*)R - \frac{1}{2}(\nabla\nabla A_i^{(0)}:RR)R\Big\} \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$C_B = L\left\{\nabla\nabla B^{(0)}:(RR^* - R^*R_2^{(2)}) + \frac{1}{2}\nabla\nabla\nabla B^{(0)}:RR^*R\right\} \tag{2.37}$$

方程 (2.32) 的解法有多种.

三、大气中的非线性波

本节通过实际例子,给出了多维约化摄动法对研究大气中非线性波的具体应用,以便今后进一步研究非线性波及其相互作用等问题. 现在考虑如下方程组:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P^* + \boldsymbol{g} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T + \sigma w = 0 \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{3.3}$$

其中 $\sigma = g/c_p$ 为一常数.

利用状态方程

$$P^* = \rho RT \tag{3.4}$$

在假定密度的 $\frac{\partial\rho}{\partial x}$. $\frac{\partial\rho}{\partial y}$ 和 T 的水平变化相比为小量时，则 (3.1) 和 (3.2) 式组成运动方程组：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + R\frac{\partial T}{\partial x} - fv = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + R\frac{\partial T}{\partial y} + fu = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \beta\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} + \sigma w = 0 \tag{3.8}$$

其中，静压力 $\bar{p}(z)$ 已由静力平衡关系从方程中消去，且假定动压力满足

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \beta\rho\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.9}$$

这里 β 为待定常数，需根据连续性条件而确定. 这个方程组实质就是非静力平衡条件下的 Eady 斜压模式[8]. 于是方程 (3.5)—(3.8) 可以写成 (2.1) 式的形式

$$U_t + A_i U_{x_i} + B(U) = 0 \tag{3.10}$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & R \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & R \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad U_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad U_{x_3} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$B(U) = \begin{pmatrix} -fv \\ fu \\ 0 \\ \sigma w \end{pmatrix}$$

我们认为基本场 $U^{(0)}$ 为常值，设

$$U' = U - U^{(0)} \tag{3.11}$$

这就自然满足 $B^{(0)}(U') = 0$，省去撇号，由 (2.14) 式可以求得

$$W_I = -il\omega I + ilk_i A_i^{(0)} + \nabla B^{(0)}$$
$$= \begin{pmatrix} -il\omega & -f & 0 & ilRk_x \\ f & -il\omega & 0 & ilRk_y \\ 0 & 0 & -il\omega & il\beta k_x \\ 0 & 0 & \sigma & -il\omega \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

由色散关系：(2.15) $\det W_1 = 0$ 可求得 ω。另外可求得 W_1 的左右本征向量分别为

$$L = (0,\ 0,\ -i\sigma,\ \omega) \tag{3.13}$$

$$R \propto \left(ifRk_x + Rk_x\omega,\ Rk_y\omega - ifRk_x,\ \frac{\beta k_x}{\omega}(\omega^2 - f^2),\ \omega^2 - f^2 \right) \tag{3.14}$$

而

$$R_0^{(2)} \propto \left(0,\ 0,\ \frac{\beta}{\lambda_i^{(0)}},\ \frac{|r_3|^2}{\beta} - 1 \right) \tag{3.15}$$

其中 $|r_3|^2$ 为 R 向量第三个分量模的平方.

$$W_2^{-1} = \frac{1}{(i2\beta\sigma + 4\omega^2)(f^2 - 4\omega^2)}$$
$$\times \begin{pmatrix} i8\omega^3 + 4\sigma\beta\omega & -4f^2\omega^2 - i2\beta\sigma f & -\sigma^2 Ri(f - 2i) & i4\omega R(fi + 2\omega) \\ 4\omega^2 f & i8\omega^3 - 4\omega\beta\sigma & -2R\sigma i(2i + f) & -4\omega R(2i\omega + f) \\ 0 & 0 & 2\omega i(4\omega^2 - f^2) & 2i\beta(4\omega^2 - f^2) \\ 0 & 0 & \sigma(4\omega^2 - f^2) & 2\omega i(4\omega^2 - f^2) \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$a = LR = \left(-i\sigma\frac{\beta k_x}{\omega} + \omega \right)(\omega^2 - f^2) \tag{3.17}$$

$$b_{ij} = \frac{\partial L}{\partial k_i} W_1 \frac{\partial R}{\partial k_j} - \frac{1}{2} L \frac{\partial^2 W_1}{\partial k_i \partial k_j} R = -\frac{i}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_i \partial k_j} LR$$
$$= -\frac{i}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_i \partial k_j} a \tag{3.8}$$

$$c_A = ik_i L \Big\{ 2(\nabla A_i^{(0)} \cdot R^*) R_2^{(2)} - (\nabla A_i^{(0)} \cdot R_2^{(2)}) R^* + (\nabla A_i^{(0)} \cdot R_0^{(2)}) R$$
$$+ (\nabla\nabla A_i^{(0)} : RR^*) R - \frac{1}{2}(\nabla\nabla A_i^{(0)} : RR) R^* \Big\} \tag{3.19}$$

$$c_B = L\left\{ \nabla\nabla B^{(0)} : (RR^* - R^* R_2^{(2)}) + \frac{1}{2}\nabla\nabla\nabla B^{(0)} \vdots RR^*R \right\} = 0 \tag{3.20}$$

$$R_2^{(2)} = -iW_2^{-1} k_i (\nabla A_i^{(0)} \cdot R) R \tag{3.21}$$

$$R_{-2}^{(2)} = ik_i W_2^{*-1} (R^* \cdot \nabla A_i^{(0)}) R^* \tag{3.22}$$

$$R_0^{(2)} = -W_0^{-1}\left\{ ik_i \left[(\nabla A_i^{(0)} \cdot R^*) R - cc \right] + \frac{1}{2}(\nabla\nabla B^{(0)} : RR^* + cc) \right\} \tag{3.23}$$

值得注意的是，有时 $detW_0 = 0$，即矩阵 W_0 没有逆阵存在. 遇到这种情况应用另外方法求解(见附录).

这样除了待定系数 β 外，我们就完全确定了方程 (2.32)，即

$$a\varphi_\tau + b_{ij}\varphi_{\xi_i\xi_j} + c|\varphi|^2\varphi = 0 \tag{3.24}$$

这就是 Cubic-Schrödinger 方程.

四、Cubic-Schrödinger 方程的求解与大气中非线性波波速的估计

对于绝热、光滑平坦的地表 $z=0$ 作为下边界，以及 $z=H$ 高度作为固定上边界 (H 可选为自地面到对流层顶的高度)，都应有 $\varphi=0$. 这表明非线性波动在这两个上下边界上消失. 于是我们有下面的问题

$$a\varphi_\tau + b_{ij}\varphi_{\xi_i\xi_j} + c|\varphi|^2\varphi = 0 \tag{4.1}$$

$$\varphi\big|_{\xi_3=\frac{1}{\varepsilon}\lambda_3^{(0)}\tau} = 0 \tag{4.2}$$

$$\varphi\big|_{\xi_3=\varepsilon H-\frac{1}{\varepsilon}\lambda_3^{(0)}\tau} = 0 \tag{4.3}$$

设

$$\varphi = \phi\exp[i(\theta + K_i(\xi_3)\xi_i)] \tag{4.4}$$

其中 ϕ, θ 是 τ 的实函数，并且 $K_i(\xi_3)$ 是依赖于 ξ_3 的缓变波数. 不妨取

$$K_i(\xi_3)\propto\varepsilon^n\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\xi_3 + \lambda^{(0)}\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right)^2 - H\left(\frac{1}{\varepsilon}\xi_3 + \lambda^{(0)}\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right)\right] \tag{4.5}$$

有 $n\geqslant 3(i=1,2,3)$. 因 $K_i(\xi_3)$ 随 ξ_3 变化由 (4.5) 式确定，是十分缓慢的，以致于在求解方程过程中，凡是出现含有 $\dfrac{\partial K_i(\xi_3)}{\partial\xi_3}$ 的项，都可以因与其他项比较为高阶无穷小，从而可以略去.

将 (4.4) 式代入 (4.1) 式，并将其实部与虚部分开后得

$$a_r\phi_\tau - a_i\theta_\tau\phi - (b_{ij})_r K_iK_j\phi + c_{Ar}\phi^3 = 0 \tag{4.6}$$

$$a_i\phi_\tau + a_r\theta_\tau\phi - (b_{ij})_i K_iK_j\phi + c_{Ai}\phi^3 = 0 \tag{4.7}$$

$(4.6)\times a_r + (4.7)\times a_i$ 得

$$\begin{aligned}(a_r^2 + a_i^2)\phi_\tau - [(b_{ij})_r a_r + (b_{ij})_i a_i]K_iK_j\phi \\ + (c_{Ar}a_r + c_{Ai}a_i)\phi^3 = 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

$(4.7)\times a_r - (4.6)\times a_i$ 得

$$\begin{aligned}(a_r^2 + a_i^2)\theta_\tau\phi + [(b_{ij})_r a_i - (b_{ij})_i a_r]K_iK_j\phi \\ + (c_{Ai}a_r - c_{Ar}a_i)\phi^3 = 0\end{aligned} \tag{4.9}$$

即

$$\begin{aligned}(a_r^2 + a_i^2)\theta_\tau + [(b_{ij})_r a_i - (b_{ij})_i a_r]K_iK_j \\ + (c_{Ai}a_r - c_{Ar}a_i)\phi^2 = 0\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 a_r, a_i 为 a 的实部与虚部. 同样，$(b_{ij})_r$, $(b_{ij})_i$; c_{Ar}, c_{Ai} 分别为 b_{ij}, c_A 的实部与虚部.

由 (4.8) 式可以解得

$$\phi^2 = \frac{\bar{a}e^{2\bar{a}\tau+2c_1}}{\bar{b}e^{2\bar{a}\tau+2c_1} - 1} \tag{4.11}$$

其中 c_1 为待定常数，由初始振幅决定.

将 (4.11) 代入 (4.10) 式，可解得

$$\theta=\frac{B}{2\bar{b}}\ln|\bar{b}e^{2\bar{a}\tau+2c_1}-1|+A\tau+c_2 \tag{4.12}$$

同样，c_2 为待定常数，由初始位相决定。

$$\bar{a}=\frac{(b_{ij})_r a_r+(b_{ij})_i a_i}{a_r^2+a_i^2}K_iK_j \tag{4.13}$$

$$\bar{b}=\frac{c_{Ar}a_r+c_{Ai}a_i}{a_r^2+a_i^2} \tag{4.14}$$

$$A=\frac{(b_{ij})_i a_r-(b_{ij})_r a_i}{a_r^2+a_i^2} \tag{4.15}$$

$$B=\frac{c_{Ar}a_i-c_{Ai}a_r}{a_r^2+a_i^2} \tag{4.16}$$

这样就求出了 φ 的解，并满足已给的上下边界条件。因为在 $z=0$ 及 $z=H$ 处都有 $\bar{a}=0$ 从而知 $\phi=0$。

当 t 达到一定值时，$\bar{b}^{2\bar{a}\tau}\gg 1$，则 (4.12) 式可近似写成

$$\theta=\left(A+\frac{B\bar{a}}{\bar{b}}\right)\tau+c_2 \tag{4.17}$$

现在来确定一开始引入方程的常数 β。在色散关系中，其实我们采用了线性化，即假定了 $(u',v',w',T')=(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{T})\exp[i(k_ix_i-\omega t)]$，求得了关系式 (3.12) (对 $l=1$)。并已经得到了 W_1 的右本征向量 $R\propto(r_1,r_2,r_3,r_4)$ 由 (3.14) 式表示。显然应有

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{T})\propto(r_1,r_2,r_3,r_4)$$

且扰动是满足连续方程 (3.3) 的。这就可得

$$\sum_{j=1}^{3}r_jk_j=0 \tag{4.18}$$

由 (3.14) 式知

$$(Rk_\perp^2+\beta k_x^2)\omega^2=f^2\beta k_x^2 \tag{4.19}$$

其中 $k_\perp^2=k_x^2+k_y^2$。由 $detW_1=0$ 与 (4.19) 式联立便可求得

$$\beta=\frac{1}{k_x^2}\left[\frac{f^2k_x}{\sigma}i-Rk_\perp^2\right] \tag{4.20}$$

同时

$$U_1^{(1)}=R\varphi\qquad U_{-1}^{(1)}=R^*\varphi^*\qquad U_2^{(2)}=R_2^{(2)}|\varphi|^2$$
$$U_2^{(2)}=R_2^{(2)}(\varphi)^2\qquad U_{-2}^{(2)}=R_{-2}^{(2)}(\varphi^*)^2$$

都可以由上面有关方程确定出来。

现在我们着重讨论一级近似的情况。可以看到大气中这类非线性波的波速是时间的缓变函数。即

$$c_i=\frac{\varepsilon^2}{K_i}\left(A+B\,\frac{\bar{a}c_1'e^{2\bar{a}\tau}}{\bar{b}c_1'e^{2\bar{a}\tau}-1}\right)-\varepsilon\lambda_i^{(0)} \tag{4.21}$$

近似形式为

$$c_i=\frac{\varepsilon^2}{K_i}\left(A+B\,\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)-\varepsilon\lambda_i^{(0)} \tag{4.22}$$

并给出以下表达式

$$a_r = \sigma\beta k_x\omega_r - 2\omega_r^3 + \frac{\sigma\beta k_z}{2\omega_r}f^2 - f^2\omega_r \tag{4.23}$$

$$a_i = \frac{\sigma\beta k_z}{2\omega_r}f^2 - \sigma\beta k_x\omega_r - \omega_r f^2 + 2\omega_r^3 \tag{4.24}$$

$$(b_{ij})_r = \frac{\partial^2\omega_r}{\partial k_i\partial k_j}\left(\frac{\sigma\beta k_z}{2\omega_r}f^2 - f^2\omega_r\right) \tag{4.25}$$

$$(b_{ij})_i = \frac{\partial^2\omega_r}{\partial k_i\partial k_j}(2\omega_r^3 - \sigma\beta k_x\omega_r) \tag{4.26}$$

由于完整的波速公式比较复杂，我们用近似形式(4.22)对 x 方向非线性波波参数之间的关系进行量级估计.

选取 $k_x \sim k_y \sim 10^{-5}$, $k_z \sim 10^{-3}$, 选择与波数有关的小参数 ε. 因为将波数进行无量纲化有

$$(k_x, k_y, k_z) = \bar{K}_x(k'_x, k'_y, \varepsilon^{-2}k'_z)$$

$\bar{K}_x$ 为特征波数，带撇号的量为无量纲量，其数量级为 1. 显然有

$$\varepsilon \sim 10^{-1} \tag{4.27}$$

又因为

$$O(\sigma R) \sim 10^0$$
$$O(c_r a_i - c_i a_r) \sim O(c_r a_r + c_i a_i)$$
$$O(\omega_r) \sim O\left(\frac{k_x}{k_z^{1/2}}\right),\quad O(\lambda_i^{(0)}) \sim O\left(\frac{\partial\omega_r}{\partial k_x}\right) \sim O(k_z^{-1/2})$$
$$O\left(\frac{\partial^2\omega_r}{\partial k_x^2}\right) \sim O\left(\frac{1}{k_x k_z}\right)$$
$$O((b_{ij})_r a_r + (b_{ij})_i a_i) \sim O\left(\frac{1}{k_x k_z}\omega_r^6\right)$$

故

$$O(c_x) \sim O\left(\frac{k_z}{|a|^2}[(b_{ij})_r a_r + (b_{ij})_i a_i]\right)$$

也就是说

$$O(c_x) \sim O(K_x\varepsilon^2/k_x k_z) \sim 10^6 O(K_x) \tag{4.28}$$

这样，可清楚地看到，在近似处理下，经非线性相互作用后的波动，其波参数间存在着一定关系. 而且扰动波的波长与经非线性相互作用后的波动的波长亦存在着一定的关系.

$$c_x \sim K_x\varepsilon^2/k_x k_z \tag{4.29}$$

$$c_x \sim 10^6 K_x \tag{4.30}$$

因此，如果对于波长为 10^5m 的非线性波，$K_x \sim 10^{-5}$，其移动速度为 10^1m/s. 而对于波长为 10^6m 的非线性波，$K_x \sim 10^{-6}$，其波速为 10^0m/s. 这正好与我们日常在天气图上所见到的情况相符.

五、讨论与结语

在线性方程中，一般只研究波的稳定性问题．不稳定波其振幅随时间指数增长，但这并不能说明其具体增长过程．由 Cubic-Schrödinger 方程得到的波，其振幅是时间的慢变函数，也就是说，振幅随时间是缓慢变化的．这是符合天气分析的实际情况的．从我们得到的结果，可以看到一个较为有趣的现象，即对于不同尺度下的扰动，经非线性相互作用后，使扰动波的尺度与非线性作用后产生的非线性波的尺度存在一定的关系．同时，非线性波的波速与波长亦存在着一定关系．对中尺度的非线性波，其移速为 10^1m/s，而中间尺度的非线性波，其移速慢一些，为 10^0m/s． 这和日常观测到的中尺度及中间尺度的槽、涡等天气系统之移速是相符的。特别是在夏季，中低层大气中经常出现明显的西风槽及低涡东移，它们在移动过程中往往带来雷雨、大风等恶劣天气．如果说飑线可看作是一维孤立波的话，那么，这些中间尺度系统看作由 Cubic-Schrödinger 方程决定的非线性 Cubic-Schrödinger 波似乎更为恰当．

孤立波是由于非线性引起的突陡和色散效应平衡而形成的脉冲状波，对于和波长相比水的深度较浅的水面波，人们很早已经知道了．在数学上，可以是一维问题的 KdV 方程求出的解．而对于我们所讨论的多维情况下得到的 Cubic-Schrödinger 方程是否也存在定形的波解，如果存在，是否仍为孤立解呢？已研究的初步结果表明，Cubic-Schrödinger 方程不存在定形孤立解，它的定形波解只能为所谓的空洞解．并在放宽定形波解的条件下，可得到包络孤立波解．也就是说，Cubic-Schrödinger 方程的解以指数函数表示的平面部分和给出的振幅强度变化部分以不同速度进行，其波形的包络面象孤立子的行为．正是在这个意义上，我们称它为包络孤立子[6,7]．

实际大气中确实存在着这种非线性波。特别许多中间尺度天气系统，若将它们看作是定形的孤立波显然是十分不合理的．实质上，它们是我们所讨论的通过非线性与色散的相互作用且满足 Cubic-Schrödinger 方程的非线性 Cubic-Schrödinger波． 关于这类非线性波的详细空间结构有待进一步深人研究．

以上我们仅仅简单地讨论了这类非线性波的波速等参数之间的关系，并没有讨论其振幅缓慢变化的详细情况．由于忽略了 β 效应，尚不能讨论大尺度的非线性波动及其演变．限于篇幅，在此我们仅着重介绍了多维约化摄动法及其在大气非线性波研究方面的初步应用．可以看出，这种方法对非线性波传播问题的简化是相当有效的，应予以重视和应用．当然这种方法也有局限性，它只能用于弱非线性波，而且仅能在波的远场分析中发挥作用．为求得实际问题的完整答案，必须把这种方法与其他方法如数值方法、散射反演法、直接法等结合起来．

附录：

若遇到 W_l 的行列式 $detW_0 = 0$ 时，则知 W_0^{-1} 不存在．这时 $R_l^{(3)}$ 不能用(3.23)式求解，而应用如下式子在 $l = 0$ 时求解，即

$$W_l U_l^{(3)} + (-\lambda_l^{(0)} I + A_l^{(1)}) U_{l\xi_l}^{(2)} + U_{lt}^{(1)} + (ilk_l A_l^{(0)} + \nabla B^{(0)}) U_l^{(1)} + \nabla A_l^{(0)}$$

$$\cdot \left\langle \sum_{l'} U^{(1)} U_{l' \xi_i}^{(1)} e^{il'\phi} \right\rangle_l + \nabla A_i^{(0)} \cdot \left\langle \sum_{l'} il' k_i U^{(1)} U_i^{(2)} e^{il'\phi} \right\rangle_l + \nabla A_i^{(0)} \cdot \left\langle \sum_{l'} il' k_i U^{(2)} U_i^{(1)} e^{il'\phi} \right\rangle_l$$
$$+ \frac{1}{2} \nabla \nabla A_i^{(0)} : \left\langle \sum_{l'} il' k_i U^{(1)} U^{(1)} U^{(1)} e^{il'\phi} \right\rangle_l + \nabla \nabla B^{(0)} : \langle U^{(1)} U^{(2)} \rangle_l$$
$$+ \frac{1}{6} \nabla \nabla \nabla B^{(0)} : \langle U^{(1)} U^{(1)} U^{(1)} \rangle_l = 0$$

再求出对应本征值 λ 为零的 W_0 的左本征向量，即 $L_0 W_0 = 0$ 求出 L_0.

用 L_0 左乘上式经运算后可得

$$L_0[(-\lambda_i^{(0)} I + A_i^{(0)}) R_0^{(2)} + (R \cdot \nabla A_i^{(0)}) R^*] = 0$$

用此式可求出 $R_0^{(2)}$.

本文承陶诗言、曾庆存、杨大升先生的鼓励，戴世强同志的多次帮助，特此致谢.

参　考　文　献

[1] 钱伟长，1980，奇异摄动理论，清华大学基础部.
[2] Whitham, G. B., 1974, Linear and nonlinear waves, John Wiley, New York.
[3] 戴世强，1982，约化摄动法和非线性波远场分析，力学进展.
[4] Sugihara, R., and T. Taniuti, 1974, *Progr. Theor. Phys.*, No. 55, 151—190.
[5] Kono, M., and N. Yajima, 1977, *J. Phys. Soc. Japan*, **43**, 1745—1754.
[6] 苏星兆，1981，非线性水波，北京大学力学系.
[7] 谷内俊尔，1981，非线性波动，原子能出版社.

MULTI-DIMENSIONAL REDUCTIVE PERTURBATION METHOD AND ATMOSPHERIC NONLINEAR WAVES

Gao Shouting　　Yang Huijun

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)　　*(Chengdu Institute of Meteorology)*

Abstract

The article extends one-dimensional reductive perturbation method to multi-dimensional, and indicates that the method is useful for studying the propagation and interaction of nonlinear waves in the atmosphere. By solving Cubic-Schrödinger equation, we illustrate the application of this method to problems of meteorology.