

耗散与计算稳定性(二)

季仲贞

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文以带耗散项的非线性方程——Burger 方程为模型,用截谱形式的差分解代入相应的差分方程,分析了数值天气预报中常用的一类三时间层差分格式的计算稳定性问题,特别讨论了计算初值、时间步长和耗散因子对计算稳定性的影响。利用定性分析和数值试验的方法证实这类三时间层格式有时容易出现非线性计算不稳定,尤其是两步计算初值反号和耗散系数过小的时候是如此。但是耗散系数也不能取得过大,否则也会出现计算不稳定。

一、引 言

显式三时间层格式是数值天气预报和大气环流数值模拟试验中常用的一类计算格式,因此对其计算稳定性认真地作些分析是很有意义的。在文献[1]中从 Burger 方程的截谱近似方程出发,分析了三类差分格式的计算稳定性。本文改变一个角度,以截谱形式的差分解直接代入相应的差分方程,并分析其计算稳定性问题。

众所周知,对于线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中 U 为常数,如果取显式三时间层格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + U \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2)$$

来逼近,则它是条件计算稳定的。如果考虑与(1)式对应的非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

则与(2)式对应的显式三时间层格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (4)$$

也仍是条件计算稳定的,但这类格式有时会出现非线性计算不稳定^[2-4]。为了克服或抑制这种不稳定,常用的措施之一就是在方程(4)中增加人工耗散项,它可以相当于在方程(3)中增加形如 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的耗散项,于是得到著名的 Burger 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

这时与(5)式对应的带耗散项的线性方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

通常对(6)式可构造如下两个三时间层差分格式:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + U \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (7')$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + U \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} \quad (7'')$$

人们都知道, 格式(7')是计算不稳定的, 而格式(7'')推广应用到方程(5)时, 可得带耗散项的非线性差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} \quad (8)$$

这是当今在实际计算中使用较多的一类计算格式。人们要问, 格式(8)的计算稳定性如何? 会不会出现非线性计算不稳定? 在什么情况下会出现线性计算不稳定, 什么情况下会出现非线性计算不稳定, 等等。这些都是没有很好解决的问题。本文试图分析讨论这些问题。

二、方程及其截谱近似

今考虑 Burger 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -L \leq x \leq L \quad (9)$$

设初条件为 $u(x, t)|_{t=0} = u^0(x)$, 而边条件是周期的。引进参数 θ , 可将(9)式改写为推广的 Burger 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1-\theta)u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\theta}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (10)$$

在 (x, t) 空间布网, 取(10)式的三时间层格式为:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + (1-\theta)u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\theta}{2} \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2\Delta x} \\ = \nu \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (11)$$

今取(11)式的特解

$$u_j^n = C^n \cos \frac{\pi}{2} j + S^n \sin \frac{\pi}{2} j + U^n \cos \pi j + V^n \quad (12)$$

为便于公式推导, 吸取文献[3]中的思路把(12)式改写为如下截谱形式:

$$u_j^n = \sum_{m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1} C_m^n e^{i \frac{\pi}{2} m j \Delta x} \quad (13)$$

其中 $L = 1 = J\Delta x$, $J = \frac{1}{\Delta x}$, 且

$$C_0^n = V^n \quad C_{\pm \frac{J}{2}}^n = \frac{1}{2} (C^n \mp iS^n) \quad C_{\pm J}^n = \frac{1}{2} U^n \quad (14)$$

把 (13) 式代入 (11) 式可得:

$$\begin{aligned} & \sum_m \frac{C_m^{n+1} - C_m^{n-1}}{2\Delta t} e^{i\frac{\pi}{L}mj\Delta x} + \sum_h \sum_l C_h^n C_l^n \left[(1-\theta) \frac{i \sin \pi l \Delta x}{\Delta x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\theta}{2} \frac{i \sin \pi (h+l) \Delta x}{\Delta x} \right] e^{i\frac{\pi}{L}(h+l)j\Delta x} \\ & = -4\nu \sum_m C_m^{n-1} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{L} \frac{m}{2} \Delta x}{\Delta x} \right)^2 e^{i\frac{\pi}{L}mj\Delta x} \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\sum_m$, $\sum_h$, $\sum_l$ 分别为

$$\sum_{m=0, \pm \frac{J}{2}, \pm J}, \quad \sum_{h=0, \pm \frac{J}{2}, \pm J}, \quad \sum_{l=0, \pm \frac{J}{2}, \pm J}$$

的简写(下同)。若把 h, l 的具体值代入并进行整理、化简可得:

$$\begin{aligned} & \sum_m \frac{C_m^{n+1} - C_m^{n-1}}{2\Delta t} e^{i\pi mj\Delta x} + \sum_m \tilde{C}_m^n e^{i\pi mj\Delta x} \\ & = -4\nu \sum_m C_m^{n-1} \left(\frac{\sin \pi \frac{m}{2} \Delta x}{\Delta x} \right)^2 e^{i\pi mj\Delta x} \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $m = 0, \pm \frac{J}{2}, \pm J$ 。而

$$\tilde{C}_m^n = \begin{cases} 0 & \text{当 } m = 0 \\ \frac{i}{\Delta x} [C_0^n C_{\frac{J}{2}}^n + (2\theta - 1)(C_J^n + C_{-J}^n)C_{-\frac{J}{2}}^n] & \text{当 } m = \frac{J}{2} \\ -\frac{i}{\Delta x} [C_0^n C_{-\frac{J}{2}}^n + (2\theta - 1)(C_J^n + C_{-J}^n)C_{\frac{J}{2}}^n] & \text{当 } m = -\frac{J}{2} \\ \frac{i}{\Delta x} (1-\theta)(C_{\frac{J}{2}}^n)^2 & \text{当 } m = J \\ -\frac{i}{\Delta x} (1-\theta)(C_{-\frac{J}{2}}^n)^2 & \text{当 } m = -J \end{cases}$$

于是其展开系数满足方程

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^{n-1}}{2\Delta t} + \tilde{C}_m^n = -4\nu C_m^{n-1} \left(\frac{\sin \pi \frac{m}{2} \Delta x}{\Delta x} \right)^2 \quad m = 0, \pm \frac{J}{2}, \pm J. \quad (17)$$

若以 $m = 0, \pm \frac{J}{2}, \pm J$ 的具体值代入 (17) 式, 可得如下关于展开系数 C_m^n 的常差分方程组:

$$\begin{cases} C_0^{n+1} - C_0^{n-1} = 0 \\ C_{\frac{1}{2}}^{n+1} - C_{\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{i2\Delta t}{\Delta x} [C_0^n C_{\frac{1}{2}}^n + (2\theta - 1)(C_j^n + C_{-j}^n)C_{\frac{1}{2}}^n] = -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{\frac{1}{2}}^{n-1} \\ C_{-\frac{1}{2}}^{n+1} - C_{-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{i2\Delta t}{\Delta x} [C_0^n C_{-\frac{1}{2}}^n + (2\theta - 1)(C_j^n + C_{-j}^n)C_{-\frac{1}{2}}^n] = -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ C_j^{n+1} - C_j^{n-1} + \frac{i2\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta)(C_{\frac{1}{2}}^n)^2 - \frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_j^{n-1} \\ C_{-j}^{n+1} - C_{-j}^{n-1} - \frac{i2\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta)(C_{-\frac{1}{2}}^n)^2 - \frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{-j}^{n-1} \end{cases} \quad (18)$$

把(14)代入(18)式,并按虚实部分开可得:

$$\begin{cases} V^{n+1} - V^{n-1} = 0 \\ C^{n+1} - C^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\Delta x} S^n [V^n + (1 - 2\theta)U^n] = -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C^{n-1} \\ S^{n+1} - S^{n-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} C^n [V^n - (1 - 2\theta)U^n] = -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} S^{n-1} \\ U^{n+1} - U^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\Delta x} C^n S^n (1 - \theta) = -\frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} U^{n-1} \end{cases} \quad (19)$$

(18)、(19)式是较为复杂的非线性差分方程组,利用它们可以作许多有关非线性计算稳定性的分析。为方便起见,今先着重讨论它的两个特殊情形,即 $\theta = \frac{1}{2}$ (但 $\nu \neq 0$) 和 $\nu = 0$ 的情形。

三、 $\theta = \frac{1}{2}$, $\nu \neq 0$ 情形

在方程组(18)中,若取 $\theta = \frac{1}{2}$,则退化为:

$$\begin{cases} C_0^{n+1} - C_0^{n-1} = 0 \\ C_{\frac{1}{2}}^{n+1} - C_{\frac{1}{2}}^{n-1} + i\frac{2\Delta t}{\Delta x} C_0^n C_{\frac{1}{2}}^n = -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{\frac{1}{2}}^{n-1} \\ C_{-\frac{1}{2}}^{n+1} - C_{-\frac{1}{2}}^{n-1} - i\frac{2\Delta t}{\Delta x} C_0^n C_{-\frac{1}{2}}^n = -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ C_j^{n+1} - C_j^{n-1} + i\frac{\Delta t}{\Delta x} (C_{\frac{1}{2}}^n)^2 = -\frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_j^{n-1} \\ C_{-j}^{n+1} - C_{-j}^{n-1} - i\frac{\Delta t}{\Delta x} (C_{-\frac{1}{2}}^n)^2 = -\frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{-j}^{n-1} \end{cases} \quad (20)$$

由于我们主要关心的是出现计算不稳定的情况,因此可不直接求解(20)式。基于如下事实,我们可以先分析方程组(20)的前三个方程:

如果在一个方程组中,在一定条件下只要其中有一个方程是计算不稳定的,则整个方程组也必定是计算不稳定的。

由方程(20)的第1式知 C_0^n 随 n 的改变交替地取两个常数,不妨设为 A 和 B 。由

(20) 式的第 2 式可得

$$C_{\frac{1}{2}}^{n+2} - 2 \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - \frac{4\Delta t v}{\Delta x^2} \right] C_{\frac{1}{2}}^n + \left[1 - \frac{8\Delta t v}{\Delta x^2} + \left(\frac{4\Delta t v}{\Delta x^2} \right)^2 \right] C_{\frac{1}{2}}^{n-2} = 0 \quad (21)$$

由 (20) 式的第 3 式也可得类似的方程。方程 (21) 的特征方程为:

$$K^4 - 2 \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - \frac{4\Delta t v}{\Delta x^2} \right] K^2 + \left[1 - \frac{8\Delta t v}{\Delta x^2} + \left(\frac{4\Delta t v}{\Delta x^2} \right)^2 \right] = 0 \quad (22)$$

于是可得

$$K^2 = \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - \frac{4\Delta t v}{\Delta x^2} \right] \pm \sqrt{M} \quad (23)$$

其中

$$M = 4 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB \left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - 1 + 4v \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]$$

下面,分两种情况讨论:

1. 若 $M < 0$, 则 K^2 为复根, 于是

$$|K^2|^2 = 1 - \frac{8\Delta t v}{\Delta x^2} + \left(\frac{4\Delta t v}{\Delta x^2} \right)^2 \quad (24)$$

若要格式计算稳定,则必须 $|K^2|^2 \leq 1$, 化简之为

$$\frac{2\Delta t v}{\Delta x^2} < 1 \quad (25)$$

反之,若 $\frac{2\Delta t v}{\Delta x^2} > 1$, 则格式计算不稳定。由此可见,对于固定的 Δt 、 Δx , 耗散系数 v 不能取得太大,否则将造成计算不稳定。

然而,为使 $M < 0$, 必须要求满足如下条件之一:

$$\text{i) } AB > 0 \quad \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - 1 - 4v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 0 \quad (26)$$

$$\text{ii) } AB < 0 \quad \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - 1 + 4v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} > 0 \quad (27)$$

不难验证,条件 i) 与 $\frac{2\Delta t v}{\Delta x^2} > 1$ 相矛盾,故只能满足条件 ii), 即若 $AB < 0$, 则当满足

$$v > \text{Max} \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}, \frac{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB}{4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}} \right) \quad (28)$$

时,格式计算不稳定。但是,不难看到,对于固定的 v 和 Δx , 总可缩小 Δt , 使 (28) 式不满足,从而克服这种计算不稳定。

2. 若 $M > 0$, 则 K^2 为实根, 当 $K^2 > 1$ 和 $K^2 < -1$ 时将出现计算不稳定。不妨考虑在 (23) 中取 $+\sqrt{M}$ 的情况, 于是可作如下分析:

(1) 若 $K^2 > 1$, 即 $1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - \frac{4\Delta t v}{\Delta x^2} + \sqrt{M} > 1$, 亦即

$$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > \Delta t AB + 2\nu \quad (29)$$

这又要分两种情形来讨论:

I) 若 $2\nu + \Delta t AB > 0$, 把(29)式两边平方、化简可得 $-AB > 4\left(\frac{\nu}{\Delta t}\right)^2$, 故 $AB < 0$, 由 $M > 0$ 知必有

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB - 1 + 4\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 0.$$

II) 若 $2\nu + \Delta t AB < 0$, 故 $AB < 0$, 由 $M > 0$ 知必有

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB - 1 + 4\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 0,$$

这里又要分两种情形:

i) 若 $\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > -(2\nu + \Delta t AB)$, 两边平方、化简得 $-AB > 4\left(\frac{\nu}{\Delta x}\right)^2$;

ii) 若 $\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} < -(2\nu + \Delta t AB)$, 两边平方、化简得 $-AB < 4\left(\frac{\nu}{\Delta x}\right)^2$.

(2) 若 $K^2 < -1$, 即

$$1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB - \frac{2\Delta t \nu}{\Delta x^2} < -\frac{\sqrt{M}}{2} < 0 \quad (30)$$

故必有 $1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB - \frac{4\Delta t \nu}{\Delta x^2} < 0$, 故由 $M > 0$ 知必有 $AB > 0$. 把(30)式两边平方、化简得 $1 - 4\left(\frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2}\right) + 4\left(\frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2}\right)^2 > \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB$.

总之, 当(23)式中取 $+\sqrt{M}$ 时, 在如下各条件组下格式(21)出现计算不稳定:

1. $2\nu + \Delta t AB > 0$, $-AB > 4\left(\frac{\nu}{\Delta x}\right)^2$, $AB < 0$, $1 - \frac{4\Delta t \nu}{\Delta x^2} > \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB$. 综合之为 $\frac{2\nu}{\Delta t} > -AB > \text{Max}\left(4\frac{\nu^2}{\Delta x^2}, \frac{4\nu}{\Delta t} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\right)$. 可见缩小 Δt 不能克服这种不稳定, 而增大 ν 可克服, 故这是类似于典型的非线性计算不稳定.

2. $2\nu + \Delta t AB < 0$, $AB < 0$, $1 - \frac{4\Delta t \nu}{\Delta x^2} > \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB$, $-AB < 4\left(\frac{\nu}{\Delta x}\right)^2$. 综合之为 $4\left(\frac{\nu}{\Delta x}\right)^2 > -AB > \text{Max}\left(\frac{2\nu}{\Delta t}, \frac{4\nu}{\Delta t} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\right)$. 可见此时无论增大 ν 或缩小 Δt 均可克服这种不稳定, 故是类似通常的线性计算不稳定.

3. $2\nu + \Delta t AB < 0$, $AB < 0$, $1 - \frac{4\Delta t \nu}{\Delta x^2} > \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB$, $-AB > 4\left(\frac{\nu}{\Delta x}\right)^2$. 综合之为 $-AB > \text{Max}\left(\frac{2\nu}{\Delta t}, 4\frac{\nu^2}{\Delta x^2}, \frac{4\nu}{\Delta t} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\right)$. 可见缩小 Δt 可变为上面第1组的情形.

4. $1 - \frac{2\Delta t \nu}{\Delta x^2} < \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB$, $AB > 0$, $1 - 4\frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2} + 4\left(\frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2}\right)^2 > \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB$. 综

合之为 $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 - \frac{2\nu}{\Delta t} < AB < \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 - \frac{4\nu}{\Delta t} + \frac{4\nu^2}{\Delta x^2}$. 可见缩小 Δt 可克服这种不稳定, 而增大 ν 不可克服, 故此时也是类似线性计算不稳定.

类似地, 我们可以分析当 (23) 中取 $+\sqrt{M}$ 时格式 (21) 出现计算稳定的条件及取 $-\sqrt{M}$ 时的情形. 整个分析结果如表 1 所列.

表 1 格式 (21) 当 $M > 0$ 时的稳定性情况

$M > 0$	在 (23) 中 取 $+\sqrt{M}$	$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > 2\nu + \Delta t AB$ 且 $2\nu + \Delta t AB > 0$ ($AB < 0$) 非线性不稳定
		$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > 2\nu + \Delta t AB$ 且 $2\nu + \Delta t AB < 0$ ($AB < 0$) $\begin{cases} \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > -(2\nu + \Delta t AB) & \text{非线性不稳定} \\ \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} < -(2\nu + \Delta t AB) & \text{线性不稳定} \end{cases}$
		$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} < 2\nu + \Delta t AB$ 且 $1 - \frac{2\Delta t \nu}{\Delta x^2} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB > -\frac{\sqrt{M}}{2}$ ($AB > 0$) 计算稳定
		$1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB < -\frac{\sqrt{M}}{2}$ ($AB > 0$) 线性不稳定
	在 (23) 中 取 $-\sqrt{M}$	$-\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > 2\nu + \Delta t AB$ ($AB > 0$) 线性不稳定
		$-\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} < 2\nu + \Delta t AB$ 且 $1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB > \frac{\sqrt{M}}{2}$ ($AB < 0$) 计算稳定
		$1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB < \frac{\sqrt{M}}{2}$ ($AB > 0$) 线性不稳定

同样地, 也可以证明在方程组 (20) 的第 3 式中存在类似的线性和非线性计算不稳定, 从而可以进一步推断整个方程组 (20) 在相应的条件下必定存在线性和非线性计算不稳定. 然而需要注意的是, 前面所得的有关计算稳定的结果却不能简单地推论到整个方程组上去, 其中还可能有关计算不稳定的情况存在.

四、 $\nu=0$ 情形

如果不考虑耗散项, 即 $\nu=0$ 时, 则方程组 (18) 退化为:

$$\begin{cases} C_0^{n+1} - C_0^{n-1} = 0 \\ C_{\frac{1}{2}}^{n+1} - C_{\frac{1}{2}}^{n-1} + i \frac{2\Delta t}{\Delta x} [C_0^n C_{\frac{1}{2}}^n + (2\theta - 1) C_{\frac{1}{2}}^n C_{\frac{1}{2}}^n] = 0 \\ C_{-\frac{1}{2}}^{n+1} - C_{-\frac{1}{2}}^{n-1} - i \frac{2\Delta t}{\Delta x} [C_0^n C_{-\frac{1}{2}}^n + (2\theta - 1) C_{-\frac{1}{2}}^n C_{\frac{1}{2}}^n] = 0 \\ C_j^{n+1} - C_j^{n-1} + i \frac{2\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) (C_{\frac{1}{2}}^n)^2 = 0 \\ C_{-j}^{n+1} - C_{-j}^{n-1} - i \frac{2\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) (C_{-\frac{1}{2}}^n)^2 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

相应地, 若在 (19) 式中令 $\nu=0$, 可得:

$$\begin{cases} V^{n+1} - V^{n-1} = 0 \\ C^{n+1} - C^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\Delta x} S^* [V^n + (1 - 2\theta) U^n] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^{n+1} - S^{n-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} C^n [V^n - (1 - 2\theta)U^n] = 0 \\ U^{n+1} - U^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\Delta x} C^n S^n (1 - \theta) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

这就是文献[3]中的方程组(4),在[3]中已作了详细的分析,证明在许多情况下都存在非线性计算不稳定,具体的不稳定判据如表2所列.

表 2 格式 (22) 的非线性计算不稳定判据 (部分)

θ	非线性计算不稳定出现的条件
0	$(V^0 \pm U^0)(V^1 \mp U^1) < 0$
1/2	$V^0 \cdot V^1 < 0$ 即 $AB < 0$
2/3	$(V^0 \mp \frac{1}{3}U^0)(V^1 \pm \frac{1}{3}U^1) < 0$
1	$(V^0 \mp U^0)(V^1 \pm U^1) < 0$

其实, 基于前一节同样的观点, 我们直接分析方程组 (31) 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 的情形, 就可以得到一些重要的结论, 但为了节省篇幅, 今从略。

五、一些数值试验的结果

利用方程组(19), 选取 $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.004$ 及取 $C^1 = C^0$, $S^1 = S^0$, $U^1 = -U^0$, $V^1 = -V^0$, 我们做了两套数值试验。第一套数值试验的 C^0 、 S^0 、 U^0 、 V^0 的取值情况及计

表 3 格式 (19) 的计算稳定性状况(一)

$$(C^1 = C^0 \quad S^1 = S^0 \quad U^1 = -U^0 \quad V^1 = -V^0)$$

组 别	C°	S°	U°	V°	ν	AB	θ	定性分析结果	数值试验结果
I	1	1	1	1	0	-1	0 1/2 2/3 1	不稳 不稳 不稳 不稳	不稳 不稳 不稳 不稳
II	1	1	1	3	0	-9	0 1/2 2/3 1	不稳 不稳 不稳 不稳	不稳 不稳 不稳 不稳
III	1	1	0	0	0	0	0 1/2 2/3 1	(不稳) (稳)	不稳 不稳 不稳 稳
IV	1	1	0	0	0.001	0	0 1/2 2/3 1		不稳 不稳 不稳 稳

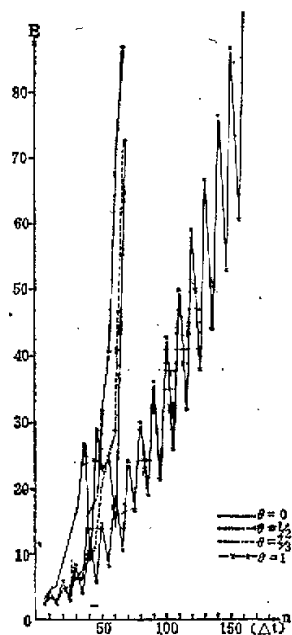


图1 组 I 的总能量变化曲线

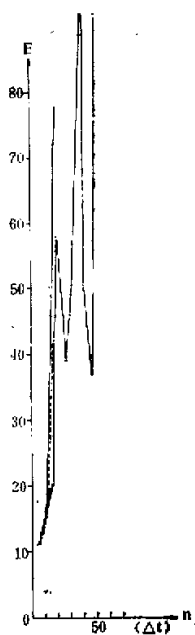


图2 组 II 的总能量变化曲线

表4 格式(19)的计算稳定性状况(二)

($C^i = C^0$, $S^i = S^0$, $U^i = -U^0$, $V^i = -V^0$, $\theta = 1/2$)

总能量 耗散量 E 时间步数 n	$\nu = 1.5$	$\nu = 1$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.001$
5	0.3×10^4	0.12×10^3	0.16×10^2	0.30×10^1	0.33×10^1
10	0.61×10^4	0.26×10^4	0.11×10^2	0.24×10^1	0.29×10^1
15	0.19×10^{10}	0.31×10^4	0.11×10^2	0.30×10^1	0.37×10^1
20	0.38×10^{13}	0.69×10^4	0.10×10^2	0.25×10^1	0.37×10^1
25		0.83×10^4	0.10×10^2	0.26×10^1	0.35×10^1
30		0.19×10^{11}	0.10×10^2	0.29×10^1	0.53×10^1
35		0.22×10^{13}	0.10×10^2	0.19×10^1	0.27×10^1
40		0.49×10^{14}	0.10×10^2	0.31×10^1	0.69×10^1
45			0.10×10^2	0.13×10^1	0.17×10^1
50			0.10×10^2	0.30×10^1	0.79×10^1
100			0.10×10^2	0.15×10^1	0.94×10^1
150			0.10×10^2	0.13×10^1	0.13×10^2
200			0.10×10^2	0.11×10^1	0.19×10^2
250			0.10×10^2	0.10×10^1	0.19×10^2
300			0.10×10^2	0.10×10^1	0.23×10^2
350			0.10×10^2	0.10×10^1	0.27×10^2
400			0.10×10^2	0.10×10^1	0.26×10^2
450			0.10×10^2	0.10×10^1	0.29×10^2
500			0.10×10^2	0.10×10^1	0.30×10^2

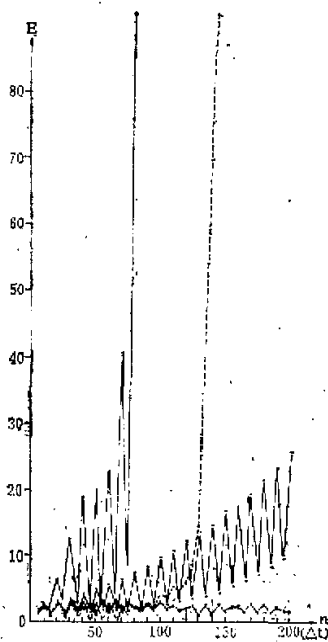


图3 组 III 的总能量变化曲线

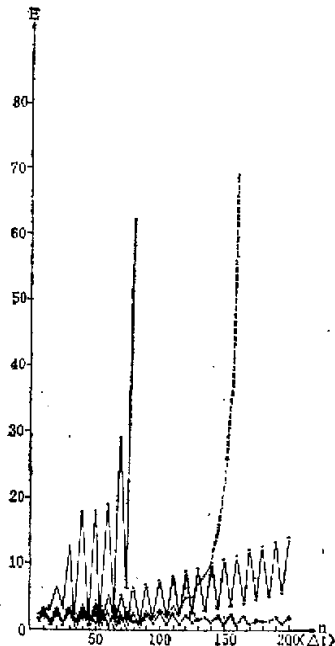


图4 组 IV 的总能量变化曲线

算结果如表 3 所列。图 1—4 中分别给出表 3 中各组的总能量

$$E = \frac{1}{2} (S^2 + C^2) + U^2 + V^2$$

的变化曲线。从表 3 可见, I、II 两组的定性分析结果与数值试验结果几乎是一致的, 即 $AB < 0$ 时, 格式较易于出现非线性计算不稳定。然而表 3 中 III、IV 两组均是属于

$$AB = 0$$

的情形, 即对应特征方程为重根的情形。我们还缺少这种情况下全面的定性分析结果(带括号的是文献 [3] 中的一些分析结果), 但从数值试验的结果看到, 在 III、IV 组中大部分情况下也是计算不稳定的, 甚至增加了 $\nu = 0.001$ 的耗散量也不能改变其稳定性状况。

第二套试验取 $C^0 = S^0 = U^0 = V^0 = 1$, ν 的取值分别为 1.5, 1, 0.1, 0.01 和 0.001。表 4 中给出 $\theta = \frac{1}{2}$ 时总能量 E 的变化情况。从表 4 可见, 当 $\nu = 1.5$ 和 $\nu = 1$ 时, 总能量 E 随时间步数 n 的增大迅速增长, 出现计算不稳定; 而 $\nu = 0.001$ 时, 总能量 E 随 n 起伏式地逐渐增长, 以致最后也出现计算不稳定(这点在表 4 中没有全部给出); 而当

$$\nu = 0.01$$

时总能量 E 开始有一定的振荡, 但 250 个 Δt 后就趋于 $E = 0.1 \times 10^4$; 对于 $\nu = 0.1$ 的情形, 总能量 E 很快就趋于常极值 $E = 0.1 \times 10^4$ 。总之, 从所计算的五种情形来看, 耗散系数 ν 取得太大或过小都是计算不稳定的, 而当 $\nu = 0.1$ 和 $\nu = 0.01$ 时是计算稳定

的。

对于 $\theta = 0, \frac{2}{3}$, 和 1 的情形有类似的结果, 就不再一一讨论了。

六、小结与讨论

上面, 我们分析了 Burger 方程的一类显式三时间层格式的非线性计算稳定性问题, 文中把常用的“特解代入法”作为“截谱法”的一个特殊情况来对待, 所有的分析都由一个特殊的差分截谱近似方程出发来进行, 使得数学推导过程较简化, 导出的非线性差分方程组也较普遍, 便于作非线性计算不稳定的分析和讨论。

从前面的分析中我们看到, 依赖于时间步长 Δt 、空间步长 Δx 、耗散系数 ν 及计算初值 A 和 B 的选取, 在这类显式三时间层格式的应用中有时容易出现非线性计算不稳定现象。考察整个稳定性分析过程, 不难发现截谱近似的展开系数所满足的方程(如 (20)₁, (20)₂, 和 (31)₁, (31)₂ 等) 常是随时间改变的变系数方程, 而这种变系数方程具有某些非线性差分方程所具有的一些性质, 如缩小时间步长 Δt 不能克服其出现的计算不稳定等。这是在显式三时间层格式的应用中存在的一个问题, 看来也是造成非线性计算不稳定的重要原因之一。然而进一步的考察也可以发现, 如果把三时间层格式改为两时间层格式, 并且把耗散项由取 $n-1$ 时刻的值改为取 n 时刻的值, 则上述变系数方程就都变为常系数方程, 因此, 相应的计算不稳定也就减弱了甚至消失了。从这个意义上说, 两时间层格式比三时间层格式更为可取(可参考文献 [1])。

此外, 本文的分析结果告诉我们, 有时即使增加耗散量也不一定就能消除计算不稳定。第二节的结果说明, 对于固定的 Δt 和 Δx , 耗散系数 ν 不可取得太大。而第四节的计算结果又说明, 不仅 ν 不能取得太大, 而且也不能取得太小。因此, 在实际计算中对 ν 值的选取要谨慎。

致谢: 曾庆存研究员对本工作提供宝贵意见, 特此致谢!

参 考 文 献

- [1] 季仲贞, 1985 耗散与计算稳定性 (I), 气象学报, 第 43 卷第 3 期。
- [2] R. R. Richtmyer, and K. W. Morton, 1967, Difference Methods for Initial Value Problems, Wiley-Interscience, p. 128—137.
- [3] 季仲贞, 曾庆存, 1980, 科学通报, 20, 1246—1248.
- [4] 曾庆存, 季仲贞, 1981, 力学学报, 3, 209—217.

DISSIPATION AND COMPUTATIONAL STABILITY (II)

Ji Zhongzhen

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, the nonlinear partial equation with dissipation term—Burger's equation is adopted as model equation. Linear and nonlinear computational stabilities of some three (time) level schemes which are used in numerical weather prediction are analysed, particularly, the effect of computational initial value, length of time step and the dissipation factor are discussed. By means of qualitative analysis and numerical experiments, it is shown that nonlinear computational instability is prone to occur for three (time) level schemes, especially when two-step computational initial values have opposite signs and the dissipation coefficient is very small. But the dissipation coefficient ν can not be taken to be too large, otherwise a new computational instability may occur.