

特定外源下的非线性 Rossby 椭圆余弦波和孤立波

黄思训 张 铭

(空军气象学院)

提 要

本文讨论了在特定外源的条件下正压无辐散大气中存在的非线性 Rossby 椭圆余弦波和孤立波解, 并求出了非线性波动的波速公式及其振幅与其它波参数间的诊断关系。证明了当不考虑外源时非线性波动的波速公式在振幅趋于零时即退化为通常的线性化的 Rossby 长波公式。

大气中是否存在孤立波的问题是一个十分关切的问题, 国外在这方面有 Long^[1]、Benney^[2]、Rederopp^[3]、Kawahara^[4] 及 Maslowe^[5] 等人的工作, 国内则有刘式达、刘式适^[6,7]、许秦^[8]等人的研究。以上的工作大致可分为两类, 第一类采用奇异摄动的方法, 选取适当的小参数, 在非线性因子和色散因子平衡时求得合适的孤立波解, 第二类则利用非线性常微分方程定性理论, 对一些非线性项作 Taylor 展开, 然后得到椭圆余弦波解, 在极限的情况下则得到孤立波解。但以上二类方法均没法将控制方程近似地化为 Kdv 方程, 然后导出孤立波。特别是当应用 Taylor 展开法时, 没有指明在什么条件下才可以展开。此外展开后舍去高阶项时问题有周期解, 并不能保证原来问题一定有周期解^[9]。事实上, 当取极限导出孤立波时此时恰恰 Taylor 展开的条件不满足。

本文则讨论有特定外源影响下的非线性 Rossby 椭圆余弦波, 并在一定条件下导出了一支区别于 Kdv 方程孤立波解的非线性孤立波。

一、数学模式

在无外源的情形下我们取正压无辐散形式的大气运动方程组作为控制方程组:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + G_1 & (1^*) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) v + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + G_2 & (2^*) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (3^*) \end{cases}$$

在此 $G_1 G_2$ 表示 v 对 u, v 的平流项。将以上方程组中 (1*) 对 y 求导, 再减去 (2*) 对 x 求导, 并利用 (3*) 可得以下涡度方程:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta v \\ &= \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = Q_1 \end{aligned} \quad (4^*)$$

(4*) 式中未考虑外源, 若考虑外源 Q_2 , 则涡度方程有以下形式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta v = Q_1 + Q_2 = Q \quad (5^*)$$

在此 Q 由两部份组成, 一部份为 v 的平流效应, 一部份为真正的外源。当 Q 看作已知时, (5*) 与 (3*) 式构成闭合方程组。若我们仅关心那种 v 的平流比 u 的平流要小的运动, 即主要考虑 u 的非线性效应, 则此时 v 的平流项可忽略, 此时 Q_1 可认为是零, 外源 Q 即为真正的外源 Q_2 。对一般情形则 Q 由 Q_1 和 Q_2 两部份组成。

由 (3*) 和 (4*) 构成的非线性偏微分方程组其通解目前尚不能解析求得。本文在考虑到 Q 为某种特定形式时, 求得了该方程组椭圆余弦波与孤立波的特解。

我们设此特定外源为:

$$Q = \mu \left(1 - \frac{\eta}{\eta + v} \right) \quad (6^*)$$

其中 μ, η 为常数, $\mu > 0, \eta < 0$ 。由上式可见当 $v \equiv 0$ 时 $Q \equiv 0$, 此时无外源影响, 而当 $v \neq 0$ 时则有外源, 此时有如下方程组:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta v = \mu \left(1 - \frac{\eta}{\eta + v} \right) & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (2) \end{cases}$$

其中 $\beta = \frac{df}{dy}$ 为常数。令

$$u = \bar{u} + U(\theta) \quad v = V(\theta) \quad \theta = kx + ly - vt \quad (3)$$

其中 $\bar{u}$ 为基本气流, 设为常数, k, l 为在 x, y 方向的“波数”, 并设 v, k, l 为常数且 v, k, l, η 之间满足如下关系式:

$$\eta = \frac{v - k\bar{u}}{l} \quad (4)$$

即设波解的“圆频率” $v = k\bar{u} + l\eta$, 这意味着在本文中我们讨论的是外源与波动的“圆频率”“合拍”的波动, 也即 η 给定后, 我们仅讨论那种与 η 有对应关系、振动“圆频率” $v = k\bar{u} + l\eta$ 的特殊的波动。

把 (3) 式代入 (1)(2) 式后可得:

$$\begin{cases} [-v + (\bar{u} + U)k](kV'' - lU'') + kU'(kV' - lU')\beta V \\ \quad = \mu \left(1 - \frac{\eta}{\eta + V} \right) & (5) \\ kU' + lV' = 0 & (6) \end{cases}$$

其中上标“'”“''”表示对 θ 的一次及二次微商, 对 (6) 式积分一次, 令积分常数为零, 则有

$$U = -\frac{l}{k} V \quad (7)$$

把 (7) 式代入 (5) 式经整理得:

$$(\eta + V)V'' + V'^2 - \xi V = -\lambda \frac{V}{\eta + V} \quad (8)$$

其中 $b = \frac{k^2 + l^2}{k} l$, $\xi = \frac{\beta}{b}$, $\lambda = \frac{\mu}{b}$, 以下我们对 $\frac{k}{l} > 0$ 的情形进行讨论, 在 (8) 式中两边乘以 $(\eta + V)V'$ 积分得:

$$[(\eta + V)V']^2 = \xi V(\eta + V)V' - \lambda VV'$$

即

$$[(\eta + V)V']^2 = \frac{2}{3}\xi \left[V^3 + \frac{3}{2}\left(\eta - \frac{\lambda}{\xi}\right)V^2 + \frac{3c_0^*}{2\xi} \right] \quad (9)$$

式中 c_0^* 为积分常数, 令 $\frac{\lambda}{\xi} = \varepsilon$, $\mu = b\lambda = \varepsilon b\xi = \varepsilon\beta$, 或者 $\varepsilon = \frac{\mu}{\beta}$, 则 (9) 式可写成:

$$\begin{aligned} [(\eta + V)V']^2 &= \frac{2\xi}{3} \left[V^3 + \frac{3}{2}(\eta - \varepsilon)V^2 + \frac{3c_0^*}{2\xi} \right] \\ &= \frac{2\xi}{3} f(V) \end{aligned} \quad (9^*)$$

其中 $f(V) = V^3 + \frac{3}{2}(\eta - \varepsilon)V^2 + \frac{3c_0^*}{2\xi}$

式中 $\varepsilon > 0$, $f(V)$ 为 V 的三次式, $f'(V) = 0$ 有二个根, $V = 0$ 和 $V = -(\eta - \varepsilon)$.

二、非线性椭圆余弦波解

令 $(\eta + V)V' = Z$, 于是 (8) 式可化为等价的一阶常微分方程组:

$$\begin{cases} V' = \frac{Z}{\eta + V} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} Z' = \xi V - \frac{\lambda V}{\eta + V} = \frac{V^2 + (\eta - \varepsilon)V}{\eta + V} \xi \end{cases} \quad (11)$$

系统 (10) (11) 的平衡位置为 $Z = 0$, $V = 0$ 及 $Z = 0$, $V = -(\eta - \varepsilon)$. 我们仅讨论 $Z = 0$, $V = 0$ 的情况 (对于第二平衡位置将不会产生波解). 要使 (10) (11) 式在此平衡位置附近有意义, 必须

$$V + \eta < 0 \quad (12)$$

由 (9*) 式知 $f(V) \geq 0$. 要使系统在 $(0, 0)$ 处有周期解, 必须

$$f(0) > 0 \quad f(-(\eta - \varepsilon)) < 0$$

令 $c_0^* = c_0^1$, 则可得到 c_0^1 应满足条件

$$0 < c_0^2 < -\frac{\xi}{3}(\eta - \varepsilon)^3 \quad (13^*)$$

此时 $f(V)$ 有三个实根 V_1, V_2, V_3 , $V_1 < 0 < V_2 < -(\eta - \varepsilon) < V_3$, (见图 1), 当 $V_1 \leq V \leq V_2$ 时轨线是闭合的. 由 (9*) 式可知

$$(\eta + V) \frac{dV}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2\xi}{3}(V - V_1)(V - V_2)(V - V_3)} \quad (13)$$

在上半平面 $Z > 0$ 即 $(\eta + V) \frac{dV}{d\theta} > 0$, 故 (13) 式右边取 + 号, 下半平面 $Z < 0$, 即 $(\eta + V) \frac{dV}{d\theta} < 0$, (13) 式右边取 - 号; 由于 $(\eta + V) \frac{dV}{d\theta} > 0$, 而 $\eta + V < 0$, 从而 $\frac{dV}{d\theta} < 0$, 当 θ 增加时 V 减少, 方向如图 2 所示. $(\eta + V) \frac{dV}{d\theta} < 0$, 此时 $\frac{dV}{d\theta} > 0$, 故当 θ 增加时 V 增加.

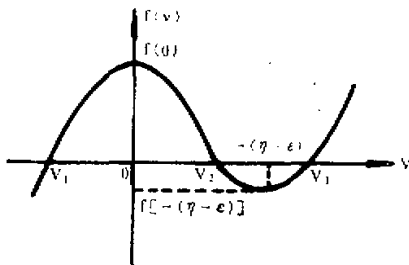


图 1

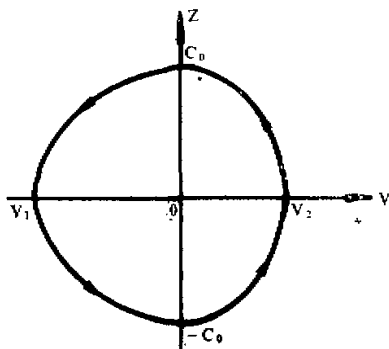


图 2

由 (13) 式积分可得:

$$\int \frac{(\eta + V)dV}{\sqrt{(V - V_1)(V - V_2)(V - V_3)}} = \int \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \xi d\theta + \alpha^\pm$$

于是通过复杂计算可得

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\eta + V_1 + h^2}{h} F(\sin^{-1} Z, m) - 2hE(\sin^{-1} Z, m) \\ &= \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(kx + ly - vt) + \alpha^\pm \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $0 < m = \frac{h'}{h} = \sqrt{\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_1}} < 1$, $z = \sqrt{\frac{V - V_1}{V_2 - V_1}}$, $h^2 = V_3 - V_1$, $h'^2 = V_2 - V_1$, $h > h' > 0$. 而 $F(\sin^{-1} z, m)$ 、 $E(\sin^{-1} z, m)$ 为第一类、第二类椭圆积分. 由于

$$\eta + V_1 + h^2 = \eta + V_1 + (V_3 - V_1) = \eta + V_3 > \varepsilon$$

又因为 $F(\sin^{-1} z, m) = \sin^{-1}(z, m)$, 于是 (14) 式转化为:

$$F(\sin^{-1}z, m) = S_n^{-1}(z, m)$$

$$= \frac{h}{2(\eta + V_3)} \left[\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(kx + ly - vt) + 2hE(\sin^{-1}z, m) + \alpha^\pm \right]$$

从而

$$\sqrt{\frac{V - V_1}{V_2 - V_1}} = S_n \left\{ \frac{h}{2(\eta + V_3)} \left[\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(kx + ly - vt) + 2hE(\sin^{-1}z, m) + \alpha^\pm \right] \right\}$$

由上式可知:

$$V = V_2 - (V_2 - V_1)c_n^2 \left\{ \frac{h}{2(\eta + V_3)} \left[\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \xi(kx + ly - vt) + 2hE(\sin^{-1}z, m) + \alpha^\pm \right] \right\} \quad (15)$$

这是一支非线性椭圆余弦波, 其中 $\alpha^\pm$ 为常数, $\alpha^\pm$ 的选取使二支波解光滑啮合, 取“+”号则对应于 $\frac{dV}{d\theta} < 0$ 的这一支, 取“-”号对应于 $\frac{dV}{d\theta} > 0$ 的这一支。

在以上式子中符号 sn, cn 为 Jacobi 椭圆函数椭圆正弦和椭圆余弦, sn^{-1} 为反椭圆正弦。

此时周期 Θ 通过积分可得:

$$\Theta = \frac{4}{\sqrt{\frac{2\xi}{\beta}}} \left[-\frac{\eta + V_3}{h\nu} F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) + \frac{h}{\nu} E\left(\frac{\pi}{2}, m\right) \right] \quad (16)$$

其中 $F\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$ 、 $E\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$ 为第一类、第二类完全椭圆积分。

波长与振幅为:

$$L = \frac{\nu}{k} \Theta = \frac{4}{k\sqrt{\frac{2\xi}{\beta}}} \left[-\frac{\eta + V_3}{h} F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) + hE\left(\frac{\pi}{2}, m\right) \right] \quad (17)$$

$$\hat{\nu} = V_2 - V_1 = h'' \quad (18)$$

三、M 判 据

方程 (9*) 右边的函数 $f(V)$ 有三个实根, 利用韦达定理知:

$$\begin{cases} V_1 + V_2 + V_3 = -\frac{3}{2}(\eta - \varepsilon) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} V_1V_2 + V_1V_3 + V_2V_3 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} V_1V_2V_3 = -\frac{3c_0^2}{2\xi} \quad 0 < c_0^2 < \frac{1}{3}(\eta - \varepsilon)^2 \end{cases} \quad (21)$$

令 $V_1 = (\gamma - 1)\hat{\nu}$, $V_2 = \gamma\hat{\nu}$, $V_3 = \delta\hat{\nu}$, 则有 $\gamma - 1 < 0 < \gamma < M < \delta$, 其中

$$M = \frac{-(\eta - \varepsilon)}{\hat{\nu}} \quad (22)$$

式中 $\varepsilon = \frac{\mu}{\beta}$, 于是我们有:

$$\begin{cases} (2\gamma - 1) + \delta = \frac{3}{2}M \\ \gamma(\gamma - 1) + (2\gamma - 1)\delta = 0 \\ \gamma(\gamma - 1)\delta = -\frac{3c_0^2}{2\xi\hat{\nu}^3} \end{cases}$$

利用关系式 $\gamma - 1 < 0 < \gamma < M < \delta$ 得:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1+M}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - \frac{1}{3}} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \delta = \frac{M}{2} + \sqrt{M^2 - \frac{1}{3}} \end{cases} \quad (24)$$

把 (23) (24) 式代入 (21) 式可得:

$$M > \frac{2}{3} \quad (25)$$

由此可见, 当 $M = \frac{-(\eta - \varepsilon)}{\hat{\nu}} > \frac{2}{3}$ 时, 此时才有可能存在周期解, 因此, 我们可把 M 当作周期解是否存在的判据。

四、非线性椭圆余弦波的波速公式

下面推导非线性 Rossby 椭圆余弦波的波速公式。由 (9*) 式有:

$$[(\eta + \nu)V']^2 = c_0^2 + \frac{2}{3}\xi V^3 + \xi(\eta - \varepsilon)V^2 = \frac{2\xi}{3}f(V)$$

由于 $f(V_i) = 0$ ($i = 1, 2$), 于是

$$\begin{cases} \frac{2\xi}{3}f((\gamma - 1)\hat{\nu}) = c_0^2 + \frac{2}{3}\xi((\gamma - 1)\hat{\nu})^3 + \xi(\eta - \varepsilon)((\gamma - 1)\hat{\nu})^2 = 0 \\ \frac{2\xi}{3}f(\gamma\hat{\nu}) = c_0^2 + \frac{2}{3}\xi(\gamma\hat{\nu})^3 + \xi(\eta - \varepsilon)(\gamma\hat{\nu})^2 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

可知 γ 与 $\hat{\nu}$ 之间有如下关系:

$$\frac{2}{3}(3\gamma^2 - 3\gamma + 1)\hat{\nu} + (\eta - \varepsilon)(2\gamma - 1) = 0$$

于是

$$\hat{\nu} = \frac{-(\eta - \varepsilon)(2\gamma - 1)}{\frac{2}{3}(3\gamma^2 - 3\gamma + 1)} \quad (27)$$

把 (27) 代入 (26) 式得到:

$$c_0^2 = \left(-\frac{2}{3}\xi\gamma\hat{\nu} - \xi(\eta - \varepsilon)\right)(\gamma\hat{\nu})^2 = -\xi(\eta - \varepsilon)\frac{(1 - \gamma)^2\gamma^2}{3\gamma^2 - 3\gamma + 1}\hat{\nu}^2 \quad (28)$$

而 c_0 又与特征涡度(平衡位置处的涡度) $|\zeta_0| = \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right|_{v=0}$ 有关

$$\begin{aligned} |\zeta_0| &= \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right|_{v=0} = |kV'_0 - lU'_0| \\ &= \left| kV'_0 + \frac{l}{k} V'_0 \right| = \frac{k^2 + l^2}{k} |V'_0| \end{aligned}$$

又 $\eta^2 V'_0 = c_0^2$, 故

$$\eta^2 \frac{k^2}{(k^2 + l^2)^2} |\zeta_0|^2 = -\xi(\eta - \varepsilon) \frac{(1 - \gamma)^2 \gamma^2}{3\gamma^2 - 3\gamma + 1} \hat{v}^2$$

由此可得:

$$\eta^2 = -(\eta - \varepsilon)a \quad (29)$$

其中

$$a = \frac{(1 - \gamma)^2 \gamma^2}{3\gamma^2 - 3\gamma + 1} \cdot \frac{\hat{v}^2}{|\zeta_0|^2} \cdot \frac{(k^2 + l^2)^2}{k^2} \xi \quad (30)$$

由 (29) 式知

$$\eta = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a\varepsilon}}{2} \quad (30^*)$$

由于 $\eta < 0$, 故根式前取负号, 从而有

$$\eta = \frac{-1}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4a\varepsilon}) \quad (31)$$

由 (27) 式可得:

$$\eta = \varepsilon - \frac{2}{3} \frac{(3\gamma^2 - 3\gamma + 1)}{(2\gamma - 1)} \hat{v} = \varepsilon - \sigma_1(\gamma) \hat{v} \quad (32)$$

其中 $\sigma_1(\gamma) = \frac{2}{3} \frac{(3\gamma^2 - 3\gamma + 1)}{(2\gamma - 1)}$. 再由 $\eta = \frac{k}{l} (c - \bar{u})$, 可得到非线性 Rossby 波的第一波速公式(波速 c 与振幅 $\hat{v}$ 之间的关系)

$$c = \bar{u} + \frac{l}{k} \frac{\mu}{\beta} - \sigma_1(\gamma) \frac{l}{k} \hat{v} \quad (33)$$

当不考虑外源时则 $\mu = 0$, 此时有:

$$c = \bar{u} - \sigma_1(\gamma) \frac{l}{k} \hat{v} \quad (33^*)$$

由于 $\gamma = \frac{1+M}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - \frac{1}{3}}$, 而 $M > \frac{2}{3}$, 故 $\frac{d\gamma}{dM} < 0$, 当 M 由 $\frac{2}{3}$ 增大至 $+\infty$ 时, γ 从 $\frac{2}{3}$ 减小到 $\frac{1}{2}$. 又 $\frac{d\sigma}{d\gamma} = \frac{4}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{(2\gamma-1)^2} < 0$, 由 $\frac{d\gamma}{dM} < 0$ 和 $\frac{d\sigma}{d\gamma} < 0$ 可知 $\frac{d\sigma}{dM} > 0$, 故在上述情况下, $\sigma_1(\gamma)$ 从 $\frac{2}{3}$ 增大到 $+\infty$, $\sigma_1(\gamma) > 0$.

我们还要注意当 $M \rightarrow +\infty$ (即 $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$) 时, $\hat{v} \rightarrow 0$ 这时非线性波动退化为线性

波动, 此时 (32) 式中 $\sigma_1(\gamma)\hat{\nu} < +\infty$, 其极限存在. 在不考虑外源 $\mu = 0$ 时, 在数学上可证明非线性方程的解 (15) 式可退化为:

$$V = \frac{1}{2} \hat{\nu} \cos[A(kx + ly - \nu t) + B]$$

在此 $A = \sqrt{-\xi/\eta}$, B 为初位相, 也即退化为简谐波的形式. 将上式与标准模

$$V = V^* \cos(k^*x + l^*y - \nu^*t + B^*)$$

对比可知:

$$\hat{\nu} = 2V^*$$

$$Ak = k^* \quad Al = l^* \quad Av = \nu^* \quad (*)$$

在此 V^* 为标准模的振幅, k^*, l^*, ν^* 为标准模真正的波数和圆频率.

在讨论非线性波动时我们为便于与线性的情形相比较, 仍可按 (*) 式的定义将 k, l, ν 乘上 $\sqrt{-\xi/\eta}$ 后引入量 k^*, l^*, ν^* , 我们称其为非线性波动真正的波数和圆频率.

将此标准模代入线性化的方程(将非线性的方程组 (4*) 线性化后即可得此方程):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

则可得到不计外源 Q 时线性化情形下的 Rossby 长波公式:

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^{*2} + l^{*2}}$$

由于当 $\hat{\nu} \rightarrow 0$ 时, 根据以上讨论, 非线性方程组及其解退化为线性化的情况, 因而 $c = \bar{u} - \sigma_1(\gamma) \frac{l}{k} \hat{\nu} = \bar{u} - \sigma_1(\gamma) \frac{l^*}{k^*} \hat{\nu}$ 其应与线性化后求得的 Rossby 长波公式 $c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^{*2} + l^{*2}}$ 相等. 由此可知, 当 $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, 应有

$$\sigma_1(\gamma) \cdot \hat{\nu} \rightarrow \frac{k}{l} \frac{\beta}{k^{*2} + l^{*2}} = \frac{k^*}{l^*} \cdot \frac{\beta}{k^{*2} + l^{*2}}$$

下面求第二波速公式(波速 c 与 β 之间的关系). 由 (30*) 式可得:

$$c = \bar{u} - \frac{l}{k} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4a\varepsilon}}{2} \right) \quad (34)$$

其中

$$a = \frac{(1-\gamma)^2 \gamma^2}{(3\gamma^2 - 3\gamma + 1)} \left(\frac{\hat{\nu}^2}{|\zeta_0|^2} \frac{k^2 + l^2}{kl} \right) \beta = 2\sigma_2(\gamma) \left(\frac{\hat{\nu}^2}{|\zeta_0|^2} \frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^* l^*} \right) \beta$$

而

$$\sigma_2(\gamma) = \frac{\gamma^2}{2} \frac{(1-\gamma)^2}{(3\gamma^2 - 3\gamma + 1)}$$

(34) 式为第二波速公式, 它是十分复杂的, 当不考虑外源时, 由于 $\mu = 0$ 故 $\varepsilon = 0$, 此时

$$c = \bar{u} - \frac{l}{k} a = \bar{u} - 2\sigma_2(\gamma) \frac{l}{k} \left(\frac{\hat{\nu}^2}{|\zeta_0|^2} \frac{k^2 + l^2}{kl} \right) \beta = \bar{u} - 2\sigma_2(\gamma) \frac{l^*}{k^*}$$

$$\cdot \left(\frac{\hat{v}^2}{|\zeta_0|^2} \cdot \frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^* l^*} \right) \cdot \beta = \bar{u} - \bar{\sigma}(\gamma) \frac{\beta}{k^{*2} + l^{*2}} \quad (35)$$

其中

$$\bar{\sigma}(\gamma) = 2\sigma_2(\gamma) \left(\frac{\hat{v}}{|\zeta_0|} \cdot \frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^*} \right)^2 > 0,$$

此即为不考虑外源时的非线性 Rossby 波的波速公式, 它与线性 Rossby 波的波速公式很类似。

五、孤立波方程及孤立波解

以上得到了周期解存在的条件为 $M > \frac{2}{3}$, 当 $M \rightarrow \frac{2}{3}$ 时 V_3, V_2 退缩为一点, 此时 $V_2 = V_3 = -(\eta - \varepsilon)$, $V_1 = \frac{1}{2}(\eta - \varepsilon)$, 即 $\gamma = \frac{2}{3}$, $\delta = \frac{2}{3}$ (如图 3 所示), 而

$$f(-(\eta - \varepsilon)) = 0$$

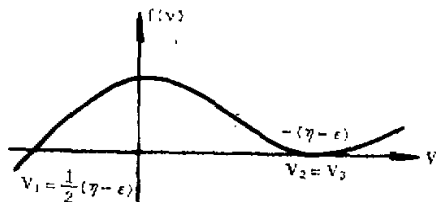


图 3

可得 $c_0^2 = -\frac{\xi}{3}(\eta - \varepsilon)^3$. $M \rightarrow \frac{2}{3}$ 也可等价于 $\theta \rightarrow \pm\infty$ 时, $V' \rightarrow 0$, $V \rightarrow \frac{2}{3}\hat{v}$. 在这种情形下 (9*) 式退化为:

$$\begin{aligned} [(\eta + V)V']^3 &= -\frac{2}{3}\xi(\eta - \varepsilon)^3 + \xi(\eta - \varepsilon)V^3 \\ &+ \frac{2}{3}\xi V^3 = \frac{2}{3}\xi[V + (\eta - \varepsilon)]^2 \left[V - \frac{1}{2}(\eta - \varepsilon) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

积分 (36) 式可得

$$V = \frac{2}{3}\hat{v} - \hat{v} \operatorname{Sec}^2 h \left\{ \frac{\sqrt{\hat{v}}}{2\varepsilon} \left[\pm \sqrt{\frac{2}{3}\xi} (kx + ly - vt) + 2\sqrt{V + \frac{1}{3}\hat{v}} \right] \right\} \quad (37)$$

在此设 $\theta = 0$ 时 $V = -\frac{1}{3}\hat{v}$, 解的图形如图 4 所示. 若我们给定振幅 $\hat{v}$, 则波速由下式决定:

$$\eta = \varepsilon - \frac{2}{3}\hat{v} = \frac{\mu}{\beta} - \frac{2}{3}\hat{v} \quad (38)$$

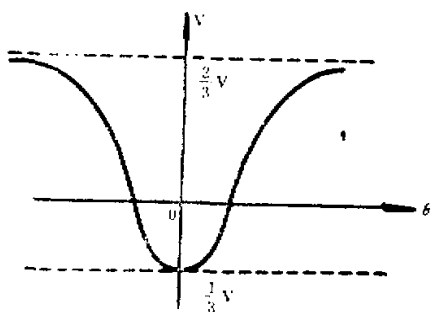


图 4

由于我们事先取了圆频率 $\nu = k\bar{u} + l\eta$, 则两边除以 k 后有:

$$c = \bar{u} + \frac{l}{k} \eta = \bar{u} - \frac{2}{3} \frac{l}{k} \hat{\nu} + \frac{l}{k} \frac{\mu}{\beta} = \bar{u} - \frac{2}{3} \frac{l}{k} \hat{\nu} - \frac{l}{k} \frac{\mu}{|\beta|} \quad (39)$$

由 (39) 式可知, $\hat{\nu}$ 越大, 则 c 越小。在此还可见到孤立波的波速 c 在波数 k, l 给定后与参数 η 有关。由 (38) 式还可得到 $\hat{\nu} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu}{\beta} - \eta \right)$, 故孤立波的振幅由外参数 μ, β, η 来决定。

六、讨 论

1. 外源的物理意义

外源 Q 由外加的绝对涡度的源或汇 Q_2 (真正的外源) 和 ν 的平流效应 Q_1 这两部份组成。若在前面提到的条件下忽略 Q_1 , 则此时 $Q = Q_2$ 可解释为外加的绝对涡度的源或汇。由以上讨论可知, 当加入 $Q = \mu \left(1 - \frac{\eta}{\eta + \nu} \right)$ 形式的源后方方程 (1) (2) 有椭圆余弦波解 (15), 将 (15) 的表达式代入外源 Q 中的 ν , 则此时外源 Q 可看作已知, 这是一个作周期变化的外源, 这时 (15) 式仍为此已知的具有周期变化外源的方程组的解。这种具有周期变化的外源可以解释为大尺度系统与次级系统之间的耦合作用, 这种耦合是通过绝对涡度的交换来实现的。当大尺度系统的绝对涡度向次级系统输送时, 则其本身涡度减少, Q 为涡汇; 反之, Q 为涡源。而 μ 可看作这种绝对涡度交换的交换系数。当 $\mu = 0$ 时, 则不发生上述交换, 此时则有 $Q = 0$, 方程和解退化为文 [10] 中结果。上述的次级系统可由地形、热源、海陆分布等外界影响所激发, 而涡度交换则只能在运动中发生, 当 $\nu = 0$ 时则 $Q = 0$, 此时无涡度交换, 也没有大尺度系统与次级系统的耦合, 这与湍流中的输运过程相类似, 只不过次级系统的尺度要比湍流的尺度大很多量级。一般情形下 Q 的具体作用机理, 由于问题的复杂性, 在此不拟讨论, 值得深入研究。当然 Q 也许还可以有别的解释。上面提到的这种涡度的交换过程具有明显的非线性性质, 在线性波动情况下, ν 的振幅很小, 此时 Q 也几乎不存在, 当 $\nu \rightarrow 0$ 时 $Q \rightarrow 0$ 。而当系统为有限振幅波时 $\nu \neq 0$, 此时

$Q \approx 0$, 且 Q 随 ν 的振幅不同而不同。

此外, 由于在本文中我们仅讨论特定的“圆频率” $\nu = k\bar{u} + l\eta$ 下的波动, 故系统的“圆频率” ν 与外源中的参数 η 紧密地联系在一起, 在某种意义上这有点类似于系统与外源的“共振”。因而我们在此讨论的是一种很特殊的情况。当 $\eta, \bar{u}, k, l$ 等给出后我们总可找到一个特定的“圆频率” $\nu = k\bar{u} + l\eta$ 。

2. 非线性 Rossby 椭圆余弦波

由以上讨论可知, 当 $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$ 时 $\hat{\nu} \rightarrow 0$, 此时 $M \rightarrow \infty$, 故 M 是表征非线性 Rossby 波非线性程度的一个量, 当 M 为 ∞ 时非线性 Rossby 波退化为线性的波动。当 M 越小时则非线性程度越大, 当 $M \rightarrow \frac{2}{3}$ 时则非线性最强, 但在无外源 ($Q = 0$) 时则 M 始终达不到 $\frac{2}{3}$, 在有外源的情形下 M 可达到 $\frac{2}{3}$, 此时非线性椭圆余弦波退化为一支孤立波解。由此可知孤立波是非线性效应达到最强时的极限。

下面我们看一下没有外源时的情形, 此时 $\varepsilon = 0$, $M = -\frac{\eta}{\hat{\nu}}$, 当 $M \rightarrow \infty$ 时应有 $\hat{\sigma}(\gamma) \rightarrow 1$, 而在线性 Rossby 波的情形下 $\frac{\hat{\nu}}{|\zeta_0|} \frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^*} = 2$ 。在非线性情况下, 当 M 变化时, 由于波形的变化, $\frac{\hat{\nu}}{|\zeta_0|} \frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^*}$ 也要随 M 而变。作为一种近似估计, 可以认为当 $M \gg \frac{2}{3}$ 时, 由于此时波动的振幅 $\hat{\nu}$ 不太大, 线性化的结果带来的误差尚不大, 则还可以认为此时仍有 $\frac{\hat{\nu}}{|\zeta_0|} \frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^*} \simeq 2$, 在这种情况下波速公式可表示为:

$$c = \bar{u} - 8\sigma_2(\gamma) \frac{\beta}{k^{*2} + l^{*2}} = \bar{u} - \sigma^*(\gamma) \frac{\beta}{k^{*2} + l^{*2}}$$

其中 $\sigma^*(\gamma) = 8\sigma_2(\gamma)$

表 1 给出当 M 变化时 γ 与 $\sigma^*(\gamma)$ 的值

M	$\frac{2}{3}$	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	5.0	10.0	∞
γ	$\frac{2}{3}$	0.652	0.623	0.605	0.592	0.558	0.543	0.517	0.508	$\frac{1}{2}$
$\sigma^*(\gamma)$	0.593	0.645	0.747	0.807	0.847	0.936	0.964	0.994	0.999	1

我们由表 1 看到, 当 $M > 2$ 时, 此时 $\sigma^*(\gamma)$ 与 1 之差仅为 0.036, 故可认为此时非线性效应已很弱, 采用线性化的方程已能相当精确地描述实际的波动了。由于 $\hat{\sigma}(\gamma) > 0$, 故非线性 Rossby 椭圆余弦波与线性 Rossby 波一样, 其相速度比基本气流 $\bar{u}$ 要小, 即相对于基本气流它是后退的。

以下讨论有外源的情形, 注意到此时 $\beta > 0$, $\mu > 0$, 故

$$a = 2\sigma_2(\gamma) \left(\frac{\hat{\nu}^2}{|\zeta_0|^2} \frac{k^{*2} + l^{*2}}{kl} \right) \cdot \beta = 2\sigma_2(\gamma) \left(\frac{\hat{\nu}^2}{|\zeta_0|^2} \frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^*l^*} \right) \beta > 0,$$

且 $\varepsilon = \frac{\mu}{\beta} > 0$, 故 $\sqrt{a^2 + 4a\varepsilon} > a$. 在这种情形下考虑了外源后非线性 Rossby 波的移速要比不考虑外源时来得慢. ε 越大, 波移动得越慢, 也即当 μ 较大, β 较小时波将移得慢些, 当 $\frac{\mu}{\beta}$ 达到一定大小时则 c 为零, 此时即为静止的 Rossby 波, 这时的振幅称为临界振幅 $\hat{\psi}_c$. 由(33)式可知临界振幅

$$\hat{\psi}_c = \frac{1}{\sigma_1(\gamma)} \left[\frac{k}{l} \bar{u} - \frac{\mu}{\beta} \right] = \frac{1}{\sigma_1(\gamma)} \left[\frac{k^*}{l^*} \bar{u} - \frac{\mu}{\beta} \right] \quad (40)$$

引入临界振幅 $\hat{\psi}_c$ 后我们有:

$$c = \sigma_1(\gamma) \frac{l}{k} (\hat{\psi} - \hat{\psi}_c) = \sigma_1(\gamma) \frac{l^*}{k^*} (\hat{\psi} - \hat{\psi}_c) \quad (41)$$

非线性 Rossby 椭圆余弦波的振幅 $\hat{\psi} < \hat{\psi}_c$ 时, 则波前进; 当 $\hat{\psi} = \hat{\psi}_c$ 时波静止; 当 $\hat{\psi} > \hat{\psi}_c$ 时则波后退. 由(40)式可知当基本气流 $\bar{u}$ 强, 且 β 较大时则 $\hat{\psi}_c$ 大, 波不易静止, 反之, 则易于静止, 这与西风带中的实际情形是一致的. 此外, 我们还可见到在考虑外源后, μ 大, 即外源强度强, 则有利于波的静止. 这可以用来解释在某些地区(如东亚沿海)经常存在着准静止的长波大槽的原因. 这是由于在那些地方存在着由地形、海陆分布、热源等激发出的有利于长波准静止的外源 Q 的缘故.

3. 非线性 Rossby 孤立波

与以上类似我们同样可引进非线性 Rossby 孤立波的临界振幅

$$\hat{\psi}_{ck} = \frac{3}{2} \left[\frac{k}{l} \bar{u} - \frac{\mu}{\beta} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{k^*}{l^*} \bar{u} - \frac{\mu}{\beta} \right] \quad (42)$$

引入 $\hat{\psi}_{ck}$ 后, 孤立波移动的相速有

$$c = \frac{2}{3} \frac{l}{k} (\hat{\psi} - \hat{\psi}_{ck}) = \frac{2}{3} \frac{l^*}{k^*} (\hat{\psi} - \hat{\psi}_{ck}) \quad (43)$$

前面已指出非线性 Rossby 孤立波是在特定外源下对特定的圆频率 ν 非线性作用增强到极限时的结果. 当外源不存在时 $Q = 0$, 由于 M 不能达到 $\frac{2}{3}$, 故孤立波不能产生. 因而我们猜想在西风带中出现 Rossby 孤立波的条件是非常苛刻的, 要出现静止的孤立波则更加困难.

以上我们讨论了特定外源下当 $\frac{k}{l} > 0$ 时非线性 Rossby 波和孤立波, 对于 $\frac{k}{l} < 0$ 的情形, 也可同样讨论, 这里不再赘述.

参 考 文 献

- [1] Long, R. R., 1964, *J. Atmos. Sci.*, **21**, p. 197.
- [2] Benney, D. J., 1966, *J. Math. and Phys.*, **45**, p. 52.
- [3] Rederopp, L. G., 1977, *J. Fluid Mech.*, **82**, p. 725.
- [4] Kawahara, T., 1968, Effect of Random in Homogeneities on Nonlinear Propagation of Water Waves.
- [5] Maslowe, S. A., Rederopp, L. G., 1979, *Geophy and Astro. Fluid Dynamics*.
- [6] 刘式达、刘式适, 1982, 中国科学, B 辑 4.
- [7] 刘式达、刘式适, 1982, 气象学报, **40**, p. 279—288.

- [8] 许 秦, 1983, 中国科学, B 辑, 1.
[9] 张锦炎, 1981, 常微分方程几何理论与分支问题, 北京大学出版社.
[10] 黄思训、吕荣庆, 1984, 空军气象学院学报, 1.

NONLINEAR ROSSBY WAVE AND SOLITARY WAVE INFLUENCED BY THE HEAT SOURCE IN THE BAROTROPIC NONDIVERGENT ATMOSPHERE

Huang Sixun Zhang Ming

(*Institute of Meteorology, The PLA Air Force*)

Abstract

In this paper, we deal with the nonlinear Rossby wave and solitary wave influenced by the heat source in the barotropic nondivergent atmosphere. First, the condition of wave solution and expression of analytic solution are inferred by using the quantitative theory of ordinary differential equation. Then the criterion M is introduced. When $M < 2/3$, there exists a periodic solution. When $M \rightarrow 2/3$, the solitary wave equation and solitary wave that are different from the KdV equation can be obtained. Finally, the wave-speed formula and a series of discussions are given.