

耦合的八模 Lorenz 系统的分叉特征

杨培才 刘锦丽

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文对两个不同尺度的 Lorenz 系统,通过引入一个耦合参数 α 把它们连接起来,并在二维参数空间 $\alpha \times r$ (Rayleigh 数)中讨论了所建立的耦合系统的解的分叉过程。参数 α 在 $[0, 1]$ 区间中取值。当 $\alpha = 0$ 时,耦合系统与著名的三模 Lorenz 系统相对应;当 $\alpha = 1$ 时,则与一个包含两个 Lorenz 元的系统相对应。文章选取了三个不同的 r 值,研究了 α 从 0 变到 1 时,从单 Lorenz 系统的解到双 Lorenz 系统的解的非线性演化过程。

一、引 言

近些年来,应用 Galerkin 方法研究对流问题的非线性特性及其解的分叉过程取得了很大的进展,特别是在高维截谱系统的数值试验方面,获得了其它数学物理问题难以比拟的结果。做为一个经典例子, Lorenz^[1]提出的最低阶的三维非线性截谱系统,已经在相当宽广的参数范围内被详尽地研究了^[2]。从 70 年代后期开始,人们的兴趣转向了更高维的系统,从不同的对流模式出发,一些高维截谱系统的分叉问题被相继讨论了^[3-5]。就二维 Bénard 对流而言,1978 年, Curry^[6]首先把 Lorenz 系统推广到 14 维相空间,1984 年,我们^[7]继续扩大了他所截取的谱模集合,建立了一个 33 维的截谱系统。文献 [6] 和 [7] 在分叉问题上得到的结果是类似的,即非线性系统的解是经过 Ruelle 和 Takens^[8]指出的分叉过程进入混沌状态的。1984 年, Curry 等^[9]发表了他们所进行的大规模数值试验的结果,对二维 Bénard 对流问题,他们采用不断增加截取谱模数目的方法,得到了原始方程解的较好的近似。对三维 Bénard 问题,他们截取的谱模数目高达几万个,并指出,截谱系统的解依然遵循着 Ruelle-Takens 分叉次序。

然而,在上述这些研究工作中,对因谱模增加引起的解的详细变化过程,却很少讨论。对于同一个物理问题,了解其因空间分辨率的差异而导致的解的改变过程,对认识问题的非线性本质和不同尺度运动之间的相互作用以及截谱系统解的收敛性是有益处的。Tedeschini-Lalli^[10]曾对 Navier-Stokes 方程的一个五维截谱系统和另一个七维截谱系统,通过引入一个参数 ε 连接起来,并把耦合后的系统开拓到一个二维参数空间中去讨论系统的分叉过程。参数 ε 在 $[0, 1]$ 区间中取值,当 $\varepsilon = 0$ 和 1 时,分别对应着五维和七维系

统. 如果令 ε 在 0 和 1 之间变化, 可以观察到五维系统的解到七维系统解的过渡过程. 比如, 原来在低维系统中的一个对于另一参数 Re (Reynolds) 数而言的混沌解区间, 随着 ε 的增大, 而逐渐被一个对于 Re 而言的周期解区间所“吞没”.

本文将在三模 Lorenz 系统的基础上, 应用与文献[10]类似的数学技巧, 通过耦合参数 α , 引入另一个高波数 Lorenz 系统, 建立一个包含八个谱模的耦合系统, 讨论由两个不同尺度的 Lorenz 系统相互作用引起的解的性质的变化过程.

二、耦合系统的建立

在 Boussinesq 近似下, 无因次的二维 Bénard 对流可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial t} = -J(\phi, \Delta \phi) + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sigma \Delta^2 \phi \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -J(\phi, \theta) + R \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta \theta \end{cases} \quad (1)$$

($t > 0$; $0 < x < 2\pi/a$; $0 < z < \pi$)

其边界条件为

$$\begin{cases} \phi = \Delta \phi = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & (x = 0, 2\pi/a) \\ \phi = \Delta \phi = \theta = 0 & (z = 0, \pi) \end{cases} \quad (2)$$

在上式中, ϕ 和 θ 分别表示流函数和扰动温度; R 和 σ 分别为 Rayleigh 数和 Prandtl 数; J 和 Δ 分别代表 Jacobi 算子和 Laplace 算子; a 表示对流区域的高度和长度之比, 也是一个无因次数.

应用 Galerkin 方法建立(1)和(2)的截谱方程, 为此取

$$\begin{cases} \phi(x, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{m,n}(t) \sin(ax) \sin(nz) \\ \theta(x, z, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \theta_{m,n}(t) \cos(ax) \sin(nz) \end{cases} \quad (3)$$

我们令 $\Omega = \{(m, n) | m = 0, 1, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N\}$ 表示截取的谱模的波数组成的集合.

形式解(3)自动满足条件(2), 将(3)代入(1)之后, 可以得到一组被谱模 $\phi_{m,n}$ 和 $\theta_{m,n}$ 所满足的非线性常微分方程. 当 $\Omega = \{(1, 1), (0, 2)\}$ 时, 即得到著名的三模 Lorenz 系统, 现在我们将谱模集合扩大为 $\Omega = \{(1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 2), (0, 4)\}$ 建立一个空间分辨率比三模系统更高的 Lorenz 系统, 它们满足的方程组为

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{11} = -\frac{7a}{3} \phi_{11} \phi_{22} + \frac{2a\sigma}{3} \theta_{11} - \frac{3\sigma}{2} \phi_{11} \\ \dot{\theta}_{11} = a(\phi_{11} \theta_{02} - \phi_{13} \theta_{02} + \phi_{13} \theta_{22} + \phi_{22} \theta_{13} + 2\phi_{13} \theta_{04}) + aR \phi_{11} - \frac{3}{2} \theta_{11} \\ \dot{\theta}_{02} = \frac{a}{2} (-\phi_{11} \theta_{11} + \phi_{11} \theta_{13} + \phi_{13} \theta_{11}) - 4\theta_{02} \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \dot{\phi}_{13} = -\frac{9a}{19}\phi_{11}\phi_{22} + \frac{2a\sigma}{19}\theta_{13} - \frac{19\sigma}{2}\phi_{13} \\
 \dot{\theta}_{13} = a(-\phi_{11}\theta_{02} - \phi_{11}\theta_{22} - \phi_{22}\theta_{11} + 2\phi_{11}\theta_{04}) + aR\phi_{13} - \frac{19}{2}\theta_{13} \\
 \dot{\phi}_{22} = \frac{4a}{3}\phi_{11}\phi_{13} + \frac{a\sigma}{3}\theta_{22} - 6\lambda\phi_{22} \\
 \dot{\theta}_{22} = a(\phi_{11}\theta_{13} - \phi_{13}\theta_{11} + 4\phi_{22}\theta_{04}) + 2aR\phi_{22} - 6\theta_{22} \\
 \dot{\theta}_{04} = a(-\phi_{11}\theta_{13} - \phi_{13}\theta_{11} - 2\phi_{22}\theta_{22}) - 16\theta_{04}
 \end{cases}$$

实际上,我们所取的波数集合包含了两个不同尺度的 Lorenz 子系统,即 $\{(1, 1), (0, 2)\}$ 和 $\{(2, 2), (0, 4)\}$ (分别记为 L_1 和 L_2)。而波向量 $(1, 3)$ 是为了满足文献[11]中提出的扰动串激条件而引入的。文献[11]指出了不同尺度运动的激发过程存在着一个确定的次序。就上面两个 Lorenz 子系统而言,它们之间扰动的交换,必须通过波向量为 $(1, 3)$ 的波进行,如果初始扰动给在子系统 L_1 上,那么波向量的激发顺序将遵循 $L_1 \rightarrow (\phi_{13}, \theta_{13}) \rightarrow L_2$ 。以后为了叙述方便起见,我们将称 ϕ_{13} 和 θ_{13} 为串激模。

为了观察由于子系统 L_2 的导入,而引起的单 Lorenz 系统的解到双 Lorenz 系统解的变化过程,我们在(4)中的串激模 θ_{13} 的方程里加进一个耦合系数 $\alpha \in [0, 1]$,即

$$\begin{cases}
 \dot{\phi}_{11} = -\frac{7a}{3}\phi_{13}\phi_{22} + \frac{2a\sigma}{3}\theta_{11} - \frac{3\sigma}{2}\phi_{11} \\
 \dot{\theta}_{11} = a(\phi_{11}\theta_{02} - \phi_{13}\theta_{02} + \phi_{13}\theta_{22} + \phi_{22}\theta_{13} + 2\phi_{13}\theta_{04}) + aR\phi_{11} - \frac{3}{2}\theta_{11} \\
 \dot{\theta}_{02} = \frac{a}{2}(-\phi_{11}\theta_{11} + \phi_{11}\theta_{13} + \phi_{13}\theta_{11}) - 4\theta_{02} \\
 \dot{\phi}_{13} = -\frac{9a}{19}\phi_{11}\phi_{22} + \frac{2a\sigma}{19}\theta_{13} - \frac{19\sigma}{2}\phi_{13} \\
 \dot{\theta}_{13} = \alpha a(-\phi_{11}\theta_{02} - \phi_{11}\theta_{22} - \phi_{22}\theta_{11} + 2\phi_{11}\theta_{04}) + aR\phi_{13} - \frac{19}{2}\theta_{13} \\
 \dot{\phi}_{22} = \frac{4a}{3}\phi_{11}\phi_{13} + \frac{a\sigma}{3}\theta_{22} - 6\sigma\phi_{22} \\
 \dot{\theta}_{22} = a(\phi_{11}\theta_{13} - \phi_{13}\theta_{11} + 4\phi_{22}\theta_{04}) + 2aR\phi_{22} - 6\theta_{22} \\
 \dot{\theta}_{04} = a(-\phi_{11}\theta_{13} - \phi_{13}\theta_{11} - 2\phi_{22}\theta_{22}) - 16\theta_{04}
 \end{cases} \quad (5)$$

上式即是我们将讨论的基本方程组,并称之为耦合的八模 Lorenz 系统。可以看到:当 $\alpha = 0$ 时,由于从 L_1 到 L_2 的扰动串激路线被切断,从 L_1 出发的相轨线被完全关闭在它自身所张开的子相空间中,系统(5)实际上退化成为一个三模单 Lorenz 系统;当 $\alpha = 1$ 时,系统(5)变成了系统(4),即包含两个子 Lorenz 元的双 Lorenz 系统;当 α 在 $(0, 1)$ 之间变化时,我们将看到从单 Lorenz 系统到双 Lorenz 系统解的演化过程,亦即由于模态集合的扩大而引起的系统运动状态的改变所经历的非线性过渡过程。

三、计算结果

根据对系统(5)所做的稳定性分析可知,当 $r = (R/6.75) < 1$ 时,零解是一个稳定的定态解。当 $r > 1$ 时,零解失稳,系统将通过分叉产生新的稳定的运动状态。由于非线性

性问题的复杂性,我们不得不借助于数值方法,来确定系统(5)随着 r 和 α 的改变所出现的其它形式的解。

为了利用三模 Lorenz 系统已有的结果,在对方程(5)进行数值积分时,我们将采用同文献[1]一样的参数值和积分初值,即 $\sigma = 10$, $a = \sqrt{2}/2$ 和 $t = 0$ 时 $\theta_{11} = 1$,其它谱模皆取零。我们采用的求解方法是有四阶精度的龙盖-库塔方法,积分步长 Δt 取 0.005,积分步数为 12000 步。

关于 $\alpha = 0$ 时系统的分叉情况,已经有了详细的讨论,大体上是, $r \geq 1$ 时,零解失稳,系统分叉出两个对称的非零定态解,当 $r \geq 24.74$ 时,这一对解失稳,系统经过一个亚临界 Hopf 分叉进入混沌解。在对应于混沌解的参数区间内,镶嵌着一些周期解子区间,或称之为周期窗口,在本文涉及到的是 $99.524 < r \leq 100.795$ 那个窗口。在下面我们只讨论 $0 < \alpha \leq 1$ 的情况。

1. $\alpha = 1$ 时系统(5)的分叉情况

$\alpha = 1$ 时,系统(5)变成了系统(4),即成为一个八模的双 Lorenz 系统。它的分叉次序与 $\alpha = 0$ 的情况不同,在 $r > 1$ 以后,系统首先经历了一个正向 Hopf 分叉,由定态解变为周期解,然后再经由间歇性混沌过渡到混沌解。与 Curry 的 14 模系统也不同,系统进入混沌解不是通过 Ruelle-Takens 过程^[6],而是通过 Pomeau-Mondeville 过程^[12],即所谓切分叉道路。根据计算结果,这个系统的分叉次序可由图 1a 表示。

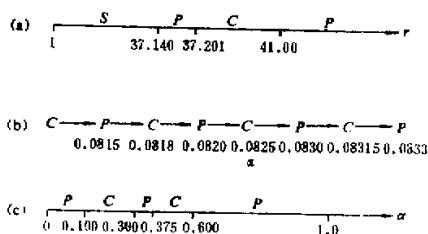


图 1 几个分叉过程的示意图

(a) $\alpha = 1$ 时,系统(5)随 r 的分叉次序 (b) $r = 28$ 时,系统(5)随 α 的分叉次序
(c) $r = 100$ 时,系统(5)随 α 的分叉次序

图中 S——定态解, P——周期解, C——混沌解

由图 1a 可知,在 $1 < r < 37.140$ 时,系统存在着非零定态解(图 2a);在 $r \geq 37.140$ 之后,定态解失稳,在一个狭小的参数区间内出现了稳定的周期解(图 2b),解的振荡频率保持在 $f = 2.002$ 这个值上。在 $r > 37.201$ 之后,周期解失稳,间歇性混沌出现,此时解随时间的变化时而呈周期性振荡,时而呈无规则振荡(图 2c)。根据对谱模分量 $\phi_n(t)$ 所做的 Lorenz 映射,也说明了解的这种特性(图略)。当 r 增加到 37.210 以后,那些间歇出现的周期性振荡消失,此时解完全过渡到混沌状态(图 2d)。在 $r > 40$ 之后,解再次通过间歇性混沌,变成稳定的周期解(图略)。根据我们在参数区间 $41 \leq r \leq 100$ 所做的粗略扫描,没有再发现其它性质的解。处于此区间的解的振荡频率随 r 的增长做缓慢的漂移。

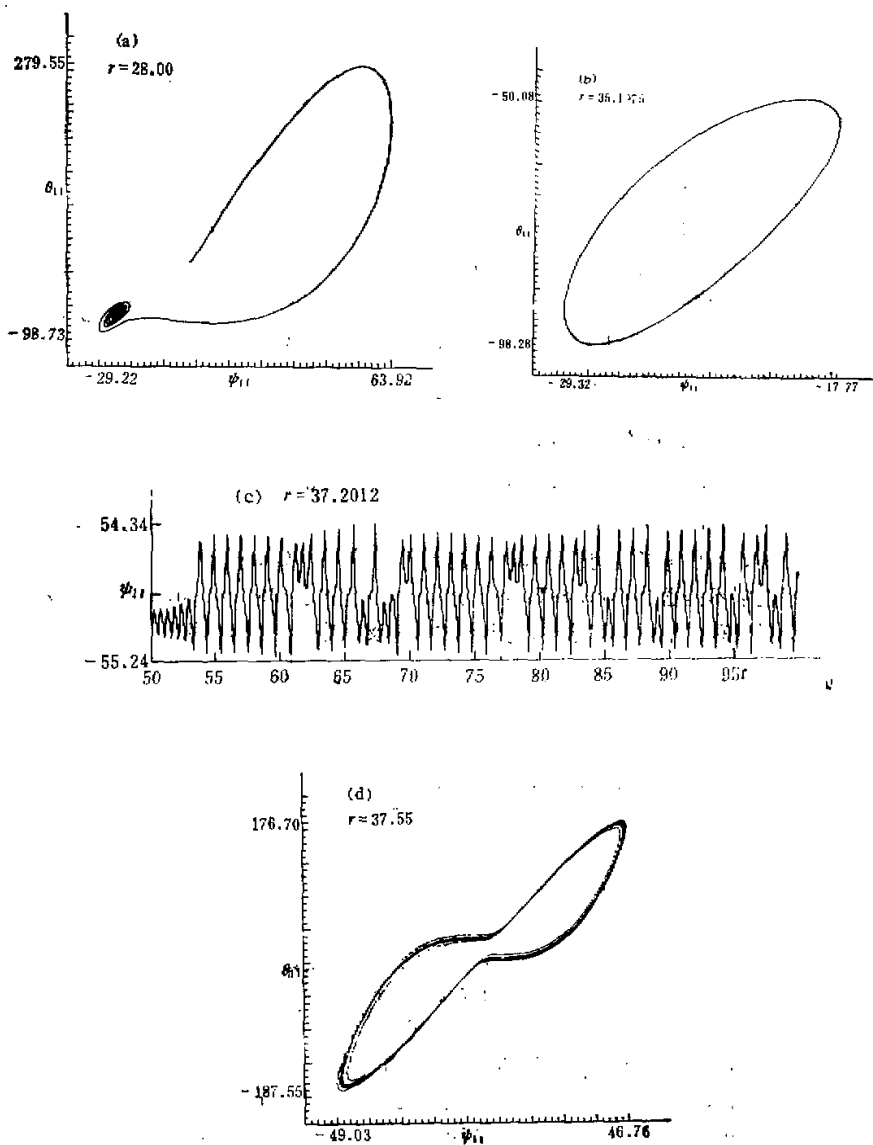


图2 $\alpha = 1$ 时, 系统(5)的解, 其中(a),(b)和(d)分别是 $r = 28.00, 37.1975$ 和 37.35 时, 相轨线在相平面 (ψ_{11}, θ_{11}) 上的投影, (c)是 $r = 37.2012$ 时, ψ_{11} 随时间的演变

2. $0 < \alpha < 1$, 系统(5)的几个算例

在这个耦合参数区间内, 我们选择了三个不同的 r 值进行了计算, 以考察系统(5)的

状态随耦合参数 α 的演变情况.

(1) $r = 15.00$

在这个控制参数值下, α 的起点和终点 ($\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$) 所对应的解都是稳定的非零定态解. 当 α 在 $(0, 1)$ 中取值时, 系统(5)的解随 α 的变化表现得比较简单. 就整个情况来说, 在这个区间内, 除了定态解之外, 没有发现其它性质的解. 但是解在 $\alpha = \alpha_c = 0.25837\cdots$ 发生了一次跳跃式突变. 从计算结果来看, 当 α 在 $[0, \alpha_c]$ 之间变化时, 系统的解缓慢地呈线性增长, 但 α 一旦越过 α_c , 解即跳到另外一个对称的定态解, 且随 α 的增加连续地趋向 $\alpha = 1$ 对应的解. 根据对积分结果的更仔细的分析, 我们发现, 这个突变过程具有与三维 Lorenz 系统的同宿突变 (Homoclinic Explosion)^[2] 一样的特征. 对处于 $\alpha = \alpha_c$ 两边的一些不同的 α 值, 我们观察了它们对应的相空间的轨线, 对小于 α_c 的那些参数值对应的轨线, 都呈螺旋状弯曲朝同一侧的不动点靠近; 对于大于 α_c 的那些参数值对应的轨线, 则朝另一侧的不动点靠近; 对于十分接近 α_c 的参数值, 可以看到在接近相空间的原点时, 出现了滞留(或慢化)现象(见图 3). 这表明在 $\alpha = \alpha_c$ 时, 确实存在一条趋于相空间原点的同宿轨道.

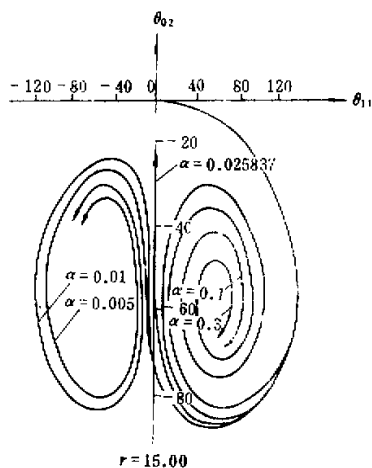


图 3 $r = 15.00$ 时, 系统(5)的解在 $\alpha = \alpha_c$ 发生的同宿突变现象

(2) $r = 28.00$

在这种情况下, 当耦合参数 $\alpha = 0$ 时, 系统(5)的解是一个奇异吸引子, 而在 $\alpha = 1$ 时, 系统(5)的解则是一个定态吸引子. 当 α 在 $(0, 1)$ 中取值时, 可以看到从单 Lorenz 系统的混沌解向双 Lorenz 系统的定态解转化的过程. 在这个区间内, 解的行为大致上可以做如下划分: 当 $0 < \alpha < 0.0815$ 时, 解始终保持着混沌行为(图 4a), 这表明在弱耦合情况下, 系统保持着子系统 L_1 表现出的运动特性. 当 $0.0815 \leq \alpha \leq 0.0833$ 时, 系统的行为发生了十分复杂的变化. 在这样一个狭小的耦合参数区间内, 解经历了由混沌

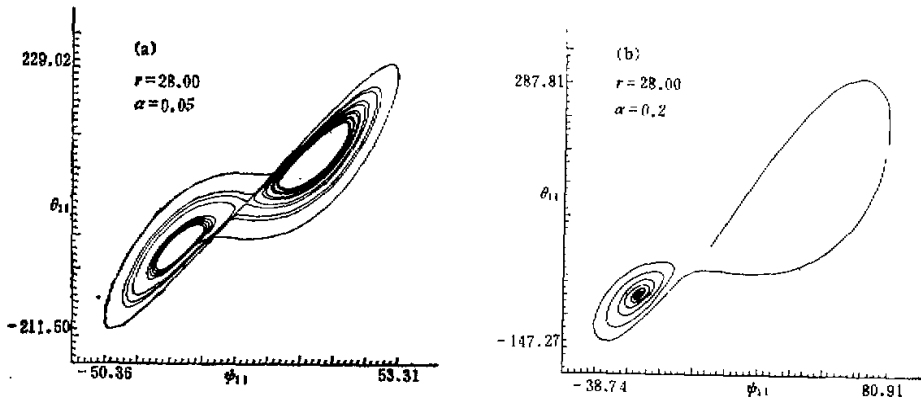


图4 $r = 28.00$ 时系统(5)的解,其中(a)和(b)分别是 $\alpha = 0.05$ 和 0.20 时,相轨线在相平面 (ψ_{11}, θ_{11}) 上的投影

解向周期解和由周期解向混沌解的多次分叉过程(图1b)。这说明在这个耦合参数区间内,系统对 α 的依赖是十分敏感的,它标志着系统处于一个结构很不稳定的状态。当 $\alpha \geq 0.0835$ 以后,系统开始进入一个稳定的有序运动阶段。 α 从 0.0835 到 0.0900 ,解表现为一个稳定的周期性振荡,其频率 $f = 2.381$ 。在 $\alpha \geq 0.1$ 以后,系统的解变成了一个定态吸引子(见图4b),而且与 $\alpha = 1$ 对应的解相差极其微小。这表明,此时解随 α 的收敛速度是极快的。同时也表明 α 增大到一定的值以后,耦合因子 α 对系统的运动状态不再起有意义的作用。

(3) $r = 100.00$

在控制参数 r 取这个值的情况下; $\alpha = 0$ 和 1 所对应的解都是周期解,相应的振荡频率分别为 $f_{\alpha=0} = 1.361$ 和 $f_{\alpha=1} = 1.980$ 。当 α 在 $[0, 1]$ 中取值时,与 $r = 28$ 的情况类似,系统的解也可以划分为包含一个调整过程在内的三个区间,其分布如图1c所示。首先在 $\alpha < 0.1$ 时,系统的解保持着 α 的起点所具有的周期运动性质(见图5a),但是其振荡频率却经历了一个突然的变化,对于这个变化的发展过程尚不很清楚,从计算的结果来看,只要 α 相对于起点 ($\alpha = 0$) 稍有偏离,运动的振荡频率便迅速变高。比如当 α 由零增加到 0.00003 时,振荡频率迅即由 1.361 增加到 2.326 ,而此后振荡频率则随 α 的增长,以渐变的形式发生飘移。这表明在 $\alpha = 0$ 附近,系统的振荡周期对 α 的依赖是十分敏感的。

当 $0.1 \leq \alpha \leq 0.6$ 时,系统处于混沌运动区间(见图5b)。数值计算的结果表明,当 α 增大到 0.1 附近时,系统经由一次切分叉,从周期运动变为混沌运动。如图1c所示,在这个混沌区间内,存在着一个狭窄的周期解窗口,它的位置大致在 $0.300 \leq \alpha \leq 0.375$ 之间,它的振荡频率随 α 的增加,由 2.714 向 1.942 飘移。与 $r = 28$ 的情况一样,解的混沌行为标志着系统在进行调整。这个调整过程导致了系统向新的有序状态演变,只是过程所对应的参数区间比 $r = 28$ 时长得多。当 $\alpha \geq 0.7$ 以后,调整过程结束,系统进入了

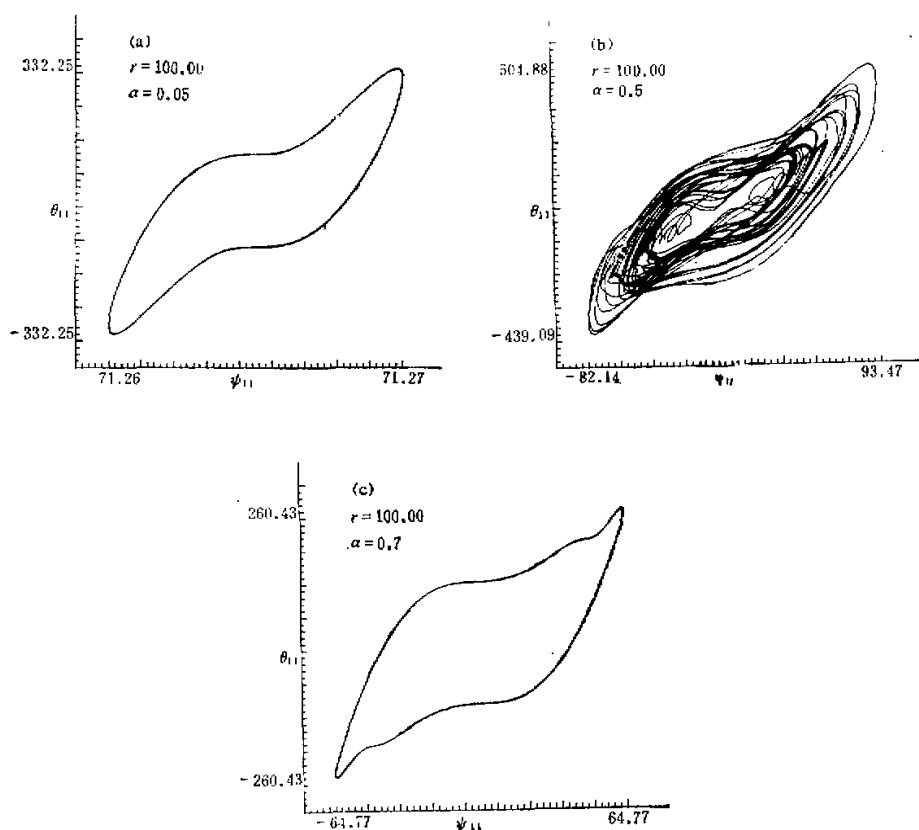


图5 $r = 100$ 时, 系统(5)的解。图中 (a), (b) 和 (c) 分别为 $\alpha = 0.05, 0.50$ 和 0.70 时相轨线在 (ψ_{11}, θ_{11}) 平面上的投影

另一个新的周期运动区间(图 5c)。这个状态一直保持到耦合参数的终点 ($\alpha = 1$)。

四、结 语

通过引入耦合参数来讨论两个不同系统的解之间的演化过程, 是研究非线性系统的一个有意义的尝试。可以看到, 在本文所采用的控制扰动串激路线的连接方式下, 从单 Lorenz 系统到双 Lorenz 系统, 它们的解的变化是十分复杂的, 在 α 较小时, 即 L_1 和 L_2 之间的耦合较弱时, 系统(5)主要表现 L_1 的行为; 当 α 较大时, 则主要表现双 Lorenz 系统(即系统(4))的行为。但是表现前者的耦合参数区间远比后者的小, 这表明 L_1 的行为的转化更敏感地依赖于 α 。同时, 从系统(5)的数值积分结果还可以看到, 这个转化是通过一系列分叉来实现的。就上面的三个算例而言, 除了从单 Lorenz 系统的定态解到双

Lorenz 系统的定态解的转化是通过同宿突变实现的外, 另外两个例子都是通过“周期 $\rightarrow$ 间歇浑沌 $\rightarrow$ 浑沌 $\rightarrow$ 间歇浑沌 $\rightarrow$ 周期”的链条实现的. 这些转化步骤反映了两个不同尺度的 Lorenz 系统之间的调整过程, 调整的结果导致了单 Lorenz 系统的解到双 Lorenz 系统的解的过渡.

参 考 文 献

- [1] Lorenz, E. N., 1963, *Deterministic Nonperiodic Flow*, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130—141.
- [2] Sparrow, C., 1982, *The Lorenz Equation: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York.
- [3] McLaughlin, J. B. & Martin, P. C., 1975, *Transition to Turbulence in a Statically Stressed Fluid System*, *Phys. Rev.*, (A) **12**, 186—203.
- [4] Shiner, H. N., 1980, *Bifurcation and Stability in a Model of Moist Convection in a Shearing Environment*, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1586—1602.
- [5] McLaughlin, J. B. & Orszag, S. A., 1982, *Transition from Periodic to Chaotic Thermal Convection*, *J. Fluid Mech.*, **122**, 123—142.
- [6] Curry, J. H., 1978, *A Generalized Lorenz System*, *Commun. Math. Phys.*, **60**, 193—204.
- [7] Zhong Wenyi & Yang Peicai, 1986, *The Transition of a Multi-Dimensional Lorenz System*, *Adv. Atmos. Sci.*, **3**, 290—301.
- [8] Ruelle, D., Takens, F. and Newhouse, S. E., 1978, *Occurrence of Strange Axiom A Attractors near Quasi-Periodic Flows on T^2 , $m \geq 3$* , *Commun. Math. Phys.*, **64**, 35—40.
- [9] Curry, J. H., Herring, J. R., Loncaric, J. and Orszag, S. A., 1984, *Order and Disorder in Two- and Three-Dimensional Benard Convection*, *J. Fluid Mech.*, **147**, 1—38.
- [10] Tedeschini-Lalli, L., 1982, *Truncated Navier-Stokes Equations: Continuous Transition From a Five-Mode to a Seven-Mode Model*, *J. Statis. Phys.*, **27**, 365—388.
- [11] 杨培才, 1987, 33 模 Lorenz 系统的某些总体特征, *大气科学*, **11**, 48—57.
- [12] Pomeau, Y. & Manneville, F., 1980, *Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative System*, *Commun. Math. Phys.*, **74**, 189—197.