

迎风坡面上流场和温度场分布 的分析解

桑 建 国

(北京大学地球物理系)

提 要

本文利用二层模式,分别得到低层大气稳定和不稳定时的大气波动方程表达式,并在特定的斜坡地形上,求出流线扰动的分析解,进一步讨论了不同上游大气条件下,地形造成的流场、温度场和湿度场分布,以及产生地形急流和地形云的判据。

一、引 言

对于地形迎风坡面上的大气运动状况,过去大部分研究工作的注意力集中于上坡风。所谓上坡风是指当地形坡面受太阳辐射加热后,其表面上的空气与同高度自由空气之间产生密度差,于是造成垂直剖面上的闭合环流,在低层,空气由平原或谷地沿坡面流向山顶,而在其上部,则有一强度较弱的反环流,由山顶流向平原。

坡面上的大气运动形式不限于这种热力作用产生的环流,事实上,当气流沿法线方向吹向坡面时,地形的动力作用使气流抬升,流线加密而形成急流,在适当条件下,还会产生抬升凝结现象,本文利用线性化的大气动力-热力学方程组的解析解,分别分析了稳定和不安定大气中,迎风坡面的气流流动状态以及温度场分布,并对急流、地形云等现象的产生机制做了分析。

为了模拟真实大气状况,求解过程是在一个二层模式中进行的,其上层是稳定层结的大气,下层是白天常见的超绝热大气,或夜间常见的强稳定层结大气,两层大气的界面在未受到扰动时设在 $z=0$ 处,下层大气的平均厚度为 h ,地形坡面的中点设在 $x=0$, $z=-h$ 处,它的形状可用一简单函数表示

$$h_m(x) = a \operatorname{arctg} \frac{x}{b}, \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

其中 a, b 分别为表示地形高差和坡度的长度尺度, $h_m(x)$ 为相对于 $z=-h$ 的地形起伏,相当于一个由无限长平原向无限长台地过渡的地形,如后面图1所示。

假定地形是中尺度,可略去科氏力,又假定大气运动是定常、绝热、无粘性的,大气运动状况可用线性化的二维大气动力-热力方程组来表示

$$\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\theta}{\theta_0} g \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0 \quad (5)$$

其中 $\bar{u}$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\theta}(z)$ 为已知的平均状态, u, ρ, w, p, θ 为扰动状态.

若不考虑基本气流的垂直切变, 即 $d\bar{u}/dz = 0$, 并且利用准静力方程、状态方程和位温方程, 由方程 (2)–(5) 可导出关于垂直运动速度 w 的方程^[1-3]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{g\beta}{\bar{u}^2} w = 0 \quad (6)$$

其中 $\beta = \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}$.

设 ζ 为流线的垂直扰动, $\zeta = z - z_0$, 其中 z_0 为未受扰动 (上游无限远处) 的流线高度, z 为扰动后的流线高度. 垂直速度和流线扰动的关系为

$$w = \frac{d\zeta}{dt}$$

其线性化形式为

$$w = \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (7)$$

将 (7) 代入 (6), 可得到关于流线扰动 ζ 的方程^[1],

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{g\beta}{\bar{u}^2} \zeta = 0 \quad (8)$$

下面将利用方程 (8), 分别就稳定的和不稳定的低层大气, 讨论迎风坡面上形成的流场和温度场.

二、低层大气稳定时的解

考虑一个二层模式, 其界面设在 $z=0$ 处, 下层大气平均厚度为 h , 层结稳定, 风速较小; 上层大气稳定度较小, 风速较大. 这个二层模式大致相当于夜间边界层大气的热力结构, 方程 (8) 在上下层可表示成为

$$\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial z^2} + \frac{g\beta_i}{\bar{u}_i^2} \zeta_i = 0 \quad (9)$$

其中下标 $i=1, 2$ 分别表示下层和上层大气.

边界条件可确定如下:

在地表面处, 流线和地表地形起伏重合,

$$\zeta_1 \Big|_{z=-h} = h_m(x) = a \arctg \frac{x}{b} \quad (10)$$

在界面 $z=0$ 处, 上下层流线扰动及流线扰动的梯度连续, 即

$$\zeta_1 = \zeta_2, \quad z=0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} \quad z=0 \quad (12)$$

将变量 ζ_i 在波数空间 k ($0 \leq k < \infty$) 做 Fourier 展开

$$\zeta_i = \int_0^\infty \tilde{\zeta}_i e^{ikx} dk \quad (13)$$

其中 $\tilde{\zeta}_i$ 为波数 k 的 Fourier 分量, 将 (13) 分别代入方程 (9) 及边界条件 (10) — (13) 中, 分别得到关于 $\tilde{\zeta}_i$ 的方程

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_1}{\partial z^2} + (l_1^2 - k^2) \tilde{\zeta}_1 = 0 \quad (14)$$

其中 $l_i = \left(\frac{g\beta_i}{\bar{u}_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ 为 Scorer 参数.

边界条件为

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_1|_{z=-h} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1|_{z=-h} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a \operatorname{arctg} \frac{x}{b} e^{-ikx} dx \\ &= i a e^{-bk}/k \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{\zeta}_1 = \tilde{\zeta}_2, \quad z=0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}_1}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\zeta}_2}{\partial z}, \quad z=0 \quad (17)$$

下层大气中, 方程 (14) 的解为

$$\tilde{\zeta}_1 = A e^{i v_1 z} + B e^{-i v_1 z} \quad (18)$$

其中 $v_1 = \sqrt{l_1^2 - k^2}$.

当 $k > l_2$ 时, 上层大气的解 $\tilde{\zeta}_2$ 中, 包含了 $e^{-\mu z}$ 和 $e^{\mu z}$ 项 (其中 $\mu = \sqrt{k^2 - l_2^2}$), 后一项随 z 无限增长, 物理上是不合理的. 当 $k < l_2$ 时, $\tilde{\zeta}_2$ 中包含 $e^{i v_2 z}$ 和 $e^{-i v_2 z}$ 项 (其中 $v_2 = \sqrt{l_2^2 - k^2}$), 解 $e^{-i v_2 z}$ 反映了向下输送能量的波, 在物理上也是不合理的^[1,3]. 于是解 $\tilde{\zeta}_2$ 可写成

$$\tilde{\zeta}_2 = C e^{-\mu z}, \quad k > l_2 \quad (19)$$

$$\tilde{\zeta}_2 = C e^{i v_2 z}, \quad k < l_2 \quad (20)$$

利用条件 (15) — (17), 求出系数 A , B 和 C , 代入 (18) — (20), 得到 ζ_1 的低波数分量 ($k < l_2$),

$$\tilde{\zeta}_1 = a i \frac{e^{-bk}}{k} \frac{v_1 \cos v_1 z + i v_2 \sin v_1 z}{v_1 \cos v_1 h - i v_2 \sin v_1 h} \quad (21)$$

及高波数分量 ($k > l_2$)

$$\tilde{\zeta}_{1h} = a i \frac{e^{-bk}}{k} \frac{v_1 \cos v_1 z - \mu \sin v_1 z}{v_1 \cos v_1 h + \mu \sin v_1 h} \quad (22)$$

对所有分量求和, 得到 ζ_l

$$\begin{aligned} \zeta_l &= \int_0^\infty \tilde{\zeta}_l e^{ikx} dk \\ &= \int_0^{l_2} \tilde{\zeta}_{1l} e^{ikx} dk + \int_{l_2}^\infty \tilde{\zeta}_{1h} e^{ikx} dk \\ &= \zeta_{1l} + \zeta_{1h} \end{aligned} \quad (23)$$

在上式第一个积分中, 被积函数 $\tilde{\zeta}_{1l}$ 包含有因子 e^{-bk}/k , 见式 (21), 它随 k 的增大而衰减很快, 因而这个积分的主要贡献来自于低波数, 即 $k=0$ 附近, 此积分可表示成为

$$\begin{aligned} \zeta_{1l} &= \int_0^{l_2} \tilde{\zeta}_{1l} e^{ikx} dk \\ &= \int_0^\infty a i \frac{e^{-bk}}{k} \frac{l_1 \cos l_1 z + i l_2 \sin l_1 z}{l_1 \cos l_1 h - i l_2 \sin l_1 h} e^{ikx} dk \quad (\text{取实部}) \\ &= a \operatorname{arctg} \frac{x}{b} P (l_1^2 \cos l_1 h \cos l_1 z - l_2^2 \sin l_1 h \sin l_1 z) \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $P = (l_1^2 \cos^2 l_1 h + l_2^2 \sin^2 l_1 h)^{-1}$

(23) 式的第二个积分为

$$\zeta_{1h} = a i \int_{l_2}^\infty \frac{e^{-bk}}{k} \frac{v_1 \cos v_1 z - \mu \sin v_1 z}{v_1 \cos v_1 h + \mu \sin v_1 h} e^{ikx} dk \quad (25)$$

此积分在 $k=k^*$ 处有奇点, 在该点处, 被积函数的分母为零,

$$v_1^* \cos v_1^* h + \mu^* \sin v_1^* h = 0 \quad (26)$$

其中 $v_1^* = \sqrt{l_1^2 - k^{*2}}$, $\mu^* = \sqrt{k^{*2} - l_2^2}$.

按留数定理, 此积分可表示成为

$$\zeta_{1h} = \pi i R$$

其中 R 为留数

$$R = i a \frac{e^{-bk^*}}{k^*} \frac{v_1^* \cos v_1^* z - \mu^* \sin v_1^* z}{\left[\frac{\partial}{\partial k} (v_1 \cos v_1 h + \mu \sin v_1 h) \right]_{k=k^*}} e^{ik^* x}$$

经过整理, 得到

$$\zeta_{1h} = \pi \frac{a e^{-bk^*}}{k^{*2}} \frac{v_1^* \mu^* \sin v_1^* (z+h) \cos k^* x}{\sin^2 v_1^* h (v_1^{*2} + \mu^{*2}) (1 + \mu^* h)} \quad (27)$$

类似地, 可得到上层流线的解为,

$$\begin{aligned}\zeta_2 &= \zeta_{2l} + \zeta_{2h} \\ &= a \arctg \frac{x}{b} P(l_1^2 \cos l_1 h \cos l_1 z - l_1 l_2 \sin l_1 h \sin l_2 z) \\ &\quad + \pi a \frac{e^{-h k^*}}{k^{*2}} \frac{v_1^{*3} \mu^* e^{-\mu^* z} \cos k^* x}{\sin v_1^* h (v_1^{*2} + \mu^{*2})(1 + \mu^* h)}\end{aligned}\quad (28)$$

由式(24)、(27)和(28)中看出,流线扰动的解中包含了低波数的部分 ζ_{1l} 、 ζ_{2l} 和高波数的部分 ζ_{1h} 、 ζ_{2h} 。地形扰动中的低波数部分属于非陷波(untrapped wave),它可以透过上层大气无衰减地向大气上界传播^[1]。扰动的高波数部分为陷波(trapped wave),它在大气上层中以 $e^{-\mu^* z}$ 形式随高度衰减。这类陷波被上层大气反射,并在下层大气中以简谐波形式水平传播^[1-3]。由于波的相速度总是小于气流的平均速度,所以波只能向下游传播。

三、稳定大气中的计算实例

例 1. 设大气下层为稳定层结, $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 1.8 \text{ K}/100 \text{ m}$, 厚度 $h = 500 \text{ m}$, $\bar{\theta} = 280 \text{ K}$, $\bar{u} = 5 \text{ m/s}$; 上层大气中 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0.35 \text{ K}/100 \text{ m}$, $\bar{\theta} = 290 \text{ K}$, $\bar{u} = 10 \text{ m/s}$ 。于是得到 Brunt-Väisälä 频率 $N_1 = 0.025 \text{ s}^{-1}$, $N_2 = 0.01 \text{ s}^{-1}$, Scorer 参数 $l_1 = 0.005 \text{ m}^{-1}$, $l_2 = 0.001 \text{ m}^{-1}$ 。式(1)中的地形参数取为 $a = 150 \text{ m}$, $b = 500 \text{ m}$, 相当于一个高差为 450 m 左右的台地。

用图解法由(26)式中求得

$$k^* = 0.0027 \text{ m}^{-1}, \text{ 相应地 } v_1^* = 0.0042 \text{ m}^{-1}, \mu^* = 0.0025 \text{ m}^{-1}.$$

将上述参数代入(24)、(27)和(28), 得到

$$\begin{aligned}\zeta_{1l} &= (-183 \cos l_1 z - 5.5 \sin l_1 z) \arctg \frac{x}{b} \\ \zeta_{1h} &= 77 \sin v_1^* (z + h) \cos k^* x \\ \zeta_{2l} &= (-183 \cos l_2 z - 28 \sin l_2 z) \arctg \frac{x}{b} \\ \zeta_{2h} &= 66 e^{-\mu^* z} \cos k^* x\end{aligned}\quad (\text{单位: m})$$

地形扰动的高频部分 ζ_{1h} 和 ζ_{2h} ,在低层以波 $\sin v_1^* (z + h)$ 形式向上传播。在界面以上则以 $e^{-\mu^* z}$ 形式衰减。它的最大振幅出现在 $z = \frac{1}{v_1^*} \frac{\pi}{2} - h = -126 \text{ m}$ 处。它的水平传播

速度为 $C_x = \pm \frac{N_1}{\sqrt{k^{*2} + v_1^{*2}}} = \pm 5 \text{ m/s}$ 。数值上和平均气流速度相同,因此它只能向

下游传播,而不可能在扰动源的上游出现。高波数扰动的振幅在低层为 77 m ,而低波数扰动的幅度可达二百多米,因此在地形起伏地区附近,流线扰动的幅度主要由低波数扰动决定。

如果只取扰动的低波数部分,得到流线图如图 1 所示。图中流线分布的显著特征是台地上空的流线密集现象,反映了稳定大气中由于地形而产生的低空急流。由(24)式可

知, 当下部稳定层中, 风速和温度层结满足关系

$$l_1 h > \frac{\pi}{2} \quad (29)$$

则在界面 $z=0$ 处, 有 $\zeta_1 < 0$. 这时界面附近的流线下沉, 如图 1 所示. 上游高空的动量沿下沉流线向台地上空输送, 因而台地上空流线密集形成急流. (29) 式中的 lh 实际上是低层大气 Froude 数的倒数, 因此产生急流的判据可表示成为

$$Fr = \frac{\bar{u}}{N h} = \frac{1}{l_1 h} < \frac{2}{\pi} \quad (30)$$

例 2. 上例中的深厚强逆温层并非多见. 本例讨论 lh 较小的情况, 设大气低层 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0.4 \text{ K}/100\text{m}$, 其它条件同例 1. 这时 $l_1 = 0.0022 \text{ m}^{-1}$. 按判据 (29), $l_1 h = 1.1 < \frac{\pi}{2}$, 没有急流发生. 根据 (24) 式, 算得流线如图 2 所示, 此图表明当低层稳定度减少到一定数值时, 地形急流消失, 只在界面上部有流线密集现象, 但强度要小得多.

例 3. 如将低层稳定层加厚, 取 $h = 1000\text{m}$, 其它条件皆同例 2, 得到流线分布如图 3, 根据判据 (29), $l_1 h = 2.1 > \frac{\pi}{2}$, 表明有急流产生.

利用关系式 (4) 和 (7), 可由 ζ 分布求出扰动风速 u , 并利用条件 $x = -\infty, u = 0$, 即假定上游无限远地面平坦处, 水平风速没有扰动发生, 得到:

$$u_1 = \bar{u}_1 a \left(\arctg \frac{x}{b} + \frac{\pi}{2} \right) P (l_1^3 \cos l_1 h \sin l_1 z + l_2^2 l_1 \sin l_1 h \cos l_2 z) \quad (31)$$

$$u_2 = \bar{u}_2 a \left(\arctg \frac{x}{b} + \frac{\pi}{2} \right) P (l_1^2 l_2 \cos l_1 h \sin l_2 z + l_1 l_2^2 \sin l_1 h \cos l_2 z) \quad (32)$$

计算得到的 $\bar{u}_1 + u_1$ 以虚线表示在图 3 中. 图中最大风速轴线出现在地面上空 200 — 300 m 处. 这个低空急流在空间上并不连续, 只是有地形抬升时才出现.

四、低层大气不稳定时的解

在二层模式中, 假定下层大气不稳定, 位温随高度减少, $\beta_1 = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0$. 此时设 $-\frac{g\beta_1}{\bar{u}_1^2} = n^2 > 0$, 其中 n 为正实数, 上层大气是稳定的, 仍取 $\frac{g\beta_2}{\bar{u}_2^2} = l_2^2$. 上述条件类似于白天不稳定边界层中的温度场结构.

边界条件仍取节 2 中的 (10) — (12), 其中 (12) 应加以变化. 由于在不稳定边界层顶附近经常出现位温跃变, 因而可能造成流线扰动垂直梯度的不连续. 假定界面上位温跃升为 $\Delta \theta$, 产生密度不连续, 则

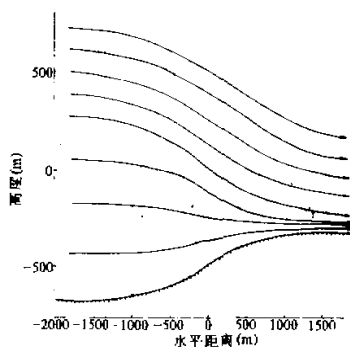


图1 二层模式例1中的流线分布

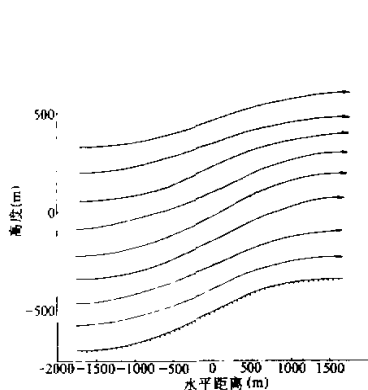


图2 例2中的流线分布

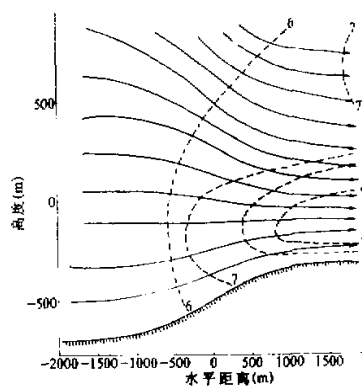


图3 例3中的流线分布

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = - \frac{\Delta \theta}{\theta}$$

设 $\varepsilon = - \frac{\Delta \rho}{\rho}$, 有 $\bar{\rho}_2 = (1 - \varepsilon) \bar{\rho}_1$.

根据 Bernoulli 原理, 沿界面两侧的流线, 下列关系式为^[1,4]

$$\frac{P_0}{\rho_1} + \frac{1}{2} U^2 = \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} [(U + u_1)^2 + w_1^2] + g \zeta_1 \quad (33)$$

$$\frac{P_0}{\rho_2} + \frac{1}{2} U^2 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} [(U + u_2)^2 + w_2^2] + g \zeta_2 \quad (34)$$

其中左侧为未受扰动状态, 右端为扰动后状态, P_0 为未受扰动界面两侧气压, U 为界面上的平均风速. 利用假定 $P_1 = P_2$ 及关系 $u = -U \frac{\partial \zeta}{\partial z}$, $w = U \frac{\partial \zeta}{\partial x}$, 得

$$\bar{\rho}_1 U^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = g \zeta_1 \bar{\rho}_1 - g \zeta_2 \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_2 U^2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial z}$$

近似地可有

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = \gamma \zeta_1 + \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} \quad (35)$$

其中 $\gamma = \frac{\varepsilon g}{U^2}$.

显然, 若没有位温不连续, $\gamma=0$, 则条件 (35) 退化为条件 (12).

将 ζ_i 做 Fourier 展开, 得到下层大气中 $\tilde{\zeta}_1$ 的方程

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_1}{\partial z^2} - (n^2 + k^2) \tilde{\zeta}_1 = 0 \quad (36)$$

上层大气中, $\tilde{\zeta}_2$ 的方程

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_2}{\partial z^2} + (l^2 - k^2) \tilde{\zeta}_2 = 0 \quad (37)$$

其中略去了 l_2 的下标.

边界条件为

$$\tilde{\zeta}_1|_{z=-h} = a i e^{-bk}/k \quad (38)$$

$$\tilde{\zeta}_1 = \tilde{\zeta}_2, \quad z=0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}_1}{\partial z} = \gamma \tilde{\zeta}_1 + \frac{\partial \tilde{\zeta}_2}{\partial z}, \quad z=0 \quad (40)$$

方程 (36) 的解为,

$$\tilde{\zeta}_1 = A e^{\lambda z} + B e^{-\lambda z} \quad (41)$$

其中 $\lambda = \sqrt{n^2 + k^2}$.

方程 (37) 的解为

$$\tilde{\zeta}_2 = C e^{i\nu z}, \quad k < l \quad (42)$$

$$\tilde{\zeta}_2 = C e^{-\mu z}, \quad k > l \quad (43)$$

其中 $\nu = \sqrt{l^2 - k^2}$, $\mu = \sqrt{k^2 - l^2}$.

利用条件 (38) — (40), 得到系数 A , B 和 C . 类似于节 2 中的处理方法, 得到下层流线扰动的低波数部分,

$$\begin{aligned} \zeta_{1l} = & a \operatorname{arctg} \frac{x}{b} P [n^2 \operatorname{ch}(nh) \operatorname{ch}(nz) - \gamma n \operatorname{sh}(nh) \operatorname{ch}(nz) \\ & - \gamma^2 \operatorname{sh}(nh) \operatorname{sh}(nz) + \gamma n \operatorname{ch}(nh) \operatorname{sh}(nz) - l^2 \operatorname{sh}(nh) \operatorname{sh}(nz)] \end{aligned} \quad (44)$$

其中 $P = \{[n \operatorname{ch}(nh) - \gamma \operatorname{sh}(nh)]^2 + l^2 \operatorname{sh}^2(nh)\}^{-1}$.

流线扰动的高波数部分为,

$$\zeta_{1k} = \pi a \frac{e^{-bk^*}}{k^{*2}} \frac{\lambda^{*3} \mu^* e^{-\mu^* z} \cos k^* x}{\operatorname{sh}(\lambda^* h) [(\gamma - \mu^*) \mu^* + \lambda^{*2} (1 + \mu^* h) - (\gamma - \mu^*)^2 \mu^* h]} \quad (45)$$

其中 $k = k^*$, 使得

$$\lambda^* \operatorname{cth}(\lambda^* h) = \gamma - \mu^*, \quad (46)$$

并且 $\lambda^* = \sqrt{n^2 + k^{*2}}$, $\mu^* = \sqrt{k^{*2} - p^2}$.

上层流线的解为,

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \zeta_{2l} + \zeta_{2h} \\ &= a \operatorname{arctg} \frac{x}{b} P n \{ \cos lz [n \operatorname{ch}(nh) - \gamma \operatorname{sh}(nh)] - l \sin lz \operatorname{sh}(nh) \} \\ &\quad + \pi a \frac{e^{-bk^*}}{k^{*2}} \frac{\lambda^{*3} \mu^* e^{-\mu^* z} \cos k^* x}{\operatorname{sh}(\lambda^* h) [(\gamma - \mu^*) \mu^* + \lambda^{*2} (1 + \mu^* h) - (\gamma - \mu^*)^2 \mu^* h]} \end{aligned} \quad (47)$$

五、不稳定大气中的计算实例

例 4. 取下层不稳定大气厚度为 $h = 1000\text{m}$, 位温递减率为 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -0.1\text{K}/100\text{m}$, $\bar{\theta} = 300\text{K}$, $\bar{u}_1 = 5\text{m/s}$, 界面附近的位温跃升为 $\Delta\theta = 3\text{K}$, 于是有 $n = 0.001\text{m}^{-1}$, $\gamma = 0.004\text{m}^{-1}$; 上层稳定大气中 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0.35\text{K}/100\text{m}$, $\bar{u}_2 = 10\text{m/s}$, $l = 0.001\text{m}^{-1}$.

由关系 (46) 得到, $k^* = 0.002\text{m}^{-1}$, $\lambda^* = 0.0022\text{m}^{-1}$ 及 $\mu^* = 0.0017\text{m}^{-1}$.

按与第三节同样的分析, 取低波数部分, 计算得

$$\zeta_{1l} = [-42 \operatorname{ch}(nz) - 182 \operatorname{sh}(nz)] \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \quad (\text{单位: m})$$

流线分布如图 4, 在迎风坡面上, 下层流线抬升, 上部流线下沉, 在台地上空由于流线压缩, 风速加大. 在这种状态下, 抬升运动只能发生在低层, 因而抬升凝结现象也只能发生在较低层次, 即山顶云或雾.

由 (44) 式可看出, 在低层大气的顶部 $z=0$ 附近, 流线的状态 (即 $\zeta > 0$, 或 $\zeta < 0$), 由 $\operatorname{ch}(nz)$ 项的系数 $[n \operatorname{ch}(nh) - \gamma \operatorname{sh}(nh)]$ 的符号决定, 当 $n \operatorname{ch}(nh) - \gamma \operatorname{sh}(nh) > 0$, 则 $\zeta > 0$, 流线抬升. 于是得到判据

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cth}(nh) &> \frac{\gamma}{n}, & \text{流线抬升} \\ \operatorname{cth}(nh) &< \frac{\gamma}{n}, & \text{流线下沉} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

一般情况下, 不稳定层总会发展到一定厚度, 使得 $\operatorname{cth}(nh) \simeq 1$, 因此判据 (48) 也可以表示成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{n} &< 1 & \text{流线抬升} \\ \frac{\gamma}{n} &> 1 & \text{流线下沉} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

例 5. 考虑一个整层抬升的例子. 取低层不稳定大气层中, $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -0.28\text{K}/100\text{m}$.

$\bar{\theta} = 300\text{K}$, $\Delta\theta = 1\text{K}$, 其它条件和例 4 一样. 得到参数为, $n = 0.002\text{m}^{-1}$, $\gamma = 0.0013\text{m}^{-1}$, $h = 1000\text{m}$, $l = 0.001\text{m}^{-1}$.

按判据 (48) 或 (49), 得到

$$\text{cth}(nh) > \frac{\gamma}{n}, \text{ 或 } \frac{\gamma}{n} = 0.65 < 1$$

因而本例中整层流线都是抬升的.

如果假定地表和大气之间无热交换, 可得到线性化的绝热方程

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{g}{C_p} w = 0 \quad (50)$$

其中 $\bar{T}(z)$ 为平均温度. 于是得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{w}{\bar{u}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{g}{C_p} \right) \\ &= -\frac{w}{\bar{u}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \end{aligned} \quad (51)$$

积分 (51) 式, 并利用条件 $x = -\infty$, $T = 0$, 可得到扰动温度 $T(x, z)$ 的分布

$$\begin{aligned} T &= -a \left(\text{arctg} \frac{x}{b} + \frac{\pi}{2} \right) P \left[n^2 \text{ch}(nh) \text{ch}(nz) - \gamma n \text{sh}(nh) \text{ch}(nz) \right. \\ &\quad \left. - \gamma^2 \text{sh}(nh) \text{sh}(nz) + \gamma n \text{ch}(nh) \text{sh}(nz) - l^2 \text{sh}(nh) \text{sh}(nz) \right] \\ &\quad \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \end{aligned} \quad (52)$$

给定一个未受扰动的温度场 $\bar{T}(z)$, 按 (52) 可求出受地形扰动后的温度场 $\bar{T}(z) + T(x, z)$, 如图 5 中虚线所示.

积分水汽守恒方程

$$\bar{u} \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = 0$$

利用条件 $x = -\infty$, $q = 0$, 可得到由于流线扰动引起的扰动比湿的表达式, 类似于 (52),

只是将其右端的 $\left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ 用 $\frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$ 代替. 将求得的扰动比湿叠加在原来的平均

比湿 $\bar{q}(z)$ 上, 得到比湿分布如图 5 点划线所示. 按绝热图表可求出比湿达到饱和的区域, 在图 5 中以阴影表示. 这就是抬升形成的地形云.

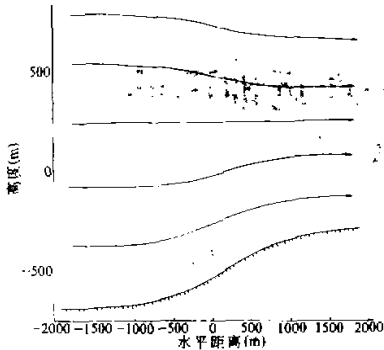


图4 例4中的流线分布

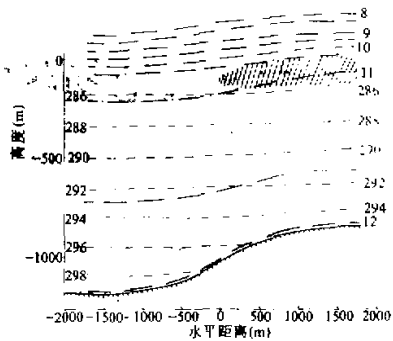


图5 例5中等温线、等比湿线和凝结区的分布

六、结 论

本文从线性化的大气动力—热力学方程组出发得出流线扰动的波动方程,分别求出低层大气稳定和不安定条件下,地形迎风坡面上定常的流线扰动分布,以及相应的水平风速、垂直速度(公式从略)、温度和湿度分布。

1. 地形引起的流线扰动由两部分组成。其中高波数部分振幅较小,只出现在地形扰动的下游。流线扰动的低波数部分出现在地形的迎风坡面上,它的振幅远超过扰动的高波数部分。

2. 在稳定的低层大气中,低波数扰动在垂直方向上以正弦波形式向上传播,振幅不衰减,垂直波长在上下层中分别为 $\frac{2\pi}{l_2}$ 和 $\frac{2\pi}{l_1}$ 。

3. 在稳定层结大气中,当满足判据 $l_1 h > \frac{\pi}{2}$ 时,界面附近流线下沉,因而在台地上空,流线密集形成低空急流。

4. 在不稳定的低层大气中,低波数扰动以双曲函数形式向上传播,在界面以上的稳定大气层中,扰动以波动形式向上传播。

5. 在不稳定的低层大气中,若满足条件 $\frac{\gamma}{n} < 1$,即低层大气强不稳定,边界层顶位温跃升较小,则整层流线在迎风面上抬升,有利于产生抬升凝结现象。

若 $\frac{\gamma}{n} > 1$,则上层流线顺气流方向下沉,低层大气中流线密集,有利于在台地上空形成急流。

参 考 文 献

- [1] Scorer, R. S., 1978, *Environmental Aerodynamics*, Ellis Horwood Limited Publishers, 488.
- [2] Yih, C. S., 1980, *Stratified Flows*, Academic Press, 366.
- [3] Smith, R. B., 1979, The influence of mountains on the atmosphere, *Advances in Geophysics*, 21: 87—230.
- [4] Sang, J. G., 1985, A theoretical study of airflow over an obstacle in neutral or slightly unstable atmosphere, *Arch. Met. Geoph. Biocl., Ser. A*, 34, 213—222.