

大气中对称运动的非线性稳定性分析

罗 德 海*

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文利用分岔和突变理论讨论了非线性对称运动的稳定性, 结果表明:

- (1) 在 $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} = 0$ 的情况下, 非线性对称运动方程在平衡点 $P(0,0)$ 和 $Q\left(\frac{f_s}{\beta}, 0\right)$ 附近具有完全不同的性质.
- (2) 在 $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} = 0$ 的情况下, 当 $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} < 0$ 时, 对称运动可以产生亚临界分岔, 而当 $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} > 0$ 时, 对称运动可以产生超临界分岔.
- (3) 在 $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} \neq 0$ 的情况下, 当条件 $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} < 0$ 和 $S < \frac{1}{2f} \left(\frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} \right)^2 / \left(-\frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} \right)$ 同时满足时, 对称运动可以产生尖点(cusp)突变.

关键词: 分岔和突变; 非线性对称运动; 尖点突变.

一、引 言

大气中的非线性问题一直是气象界所关心和重视的问题, 随着现代科学的发展, 人们提出了许多解决非线性问题的方法和途径, 如 Haken 提出的协同学, Thom 提出的突变理论等, 这些理论在不同程度上能解决非线性问题, 它们的应用也越来越广泛, 在气象科学中的应用也逐渐开展起来, 但目前的研究水平还不高, 有待于进一步深入. 国内把分岔(bifurcation)和突变(Catastrophe)理论应用于大气科学方面的工作也不多^[1-3]. 关于大气中对称运动的稳定性问题, Emanuel^[4]曾作过研究, 他在考虑 $u_g = \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u_g}{\partial z} \delta z$ 的情况下讨论了对称运动的线性稳定性问题, 发现当 $R_1 < f / \bar{\xi} \left(\bar{\xi} = f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)$ 时, 对称运动会产生不稳定. 本文利用分岔和突变理论在基本气流 u_g 按 $u_g = u_g^0 + \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} (\delta y)^3 + \frac{\partial u_g}{\partial z} \delta z$ 分布的情况下讨论了非线性对称运动的稳定

1986年12月8日收到, 1987年9月16日收到再改稿.

*现工作单位: 成都气象学院.

性,得到了许多新的结果.

二、非线性对称运动方程

在不考虑摩擦作用下的大气水平运动方程为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{cases} \quad (1)$$

假定大气运动并不改变气压梯度力的分布,并且气压梯度力满足地转平衡:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -fu_s, \end{cases} \quad (2)$$

于是将(2)式代入方程(1)有

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = 0, \\ \frac{dv}{dt} + f(u - u_s) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

设初始时刻空气块位于 $(y=y_0, z=z_0)$ 处,而在 t 时刻空气块位于 (y, z) 处,于是由方程(3)的第一式可得

$$u = u_0 + f\delta y, \quad (4)$$

其中 $\delta y = y - y_0$, u_0 为初始时刻的基本风速,从方程(3)的第二式可以看出,在 $t=0$ 即 $y=y_0, z=z_0$ 时, $u_0 = u_{s0}$, u_{s0} 为 $t=0$ 时刻的地转风速.设基本气流 u_s 按下列分布:

$$u_s = u_{s0} + \frac{\partial u_s}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_s}{\partial y^3} (\delta y)^3 + \frac{\partial u_s}{\partial z} \delta z, \quad (5)$$

上式中的 $\frac{\partial u_s}{\partial y}, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2}, \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_s}{\partial y^3}, \frac{\partial u_s}{\partial z}$ 等均表示在 $y=y_0, z=z_0$ 处的值.于是将(4)和(5)式

代入方程(3)的第二式有

$$\frac{dv}{dt} + f \left[\left(f - \frac{\partial u_s}{\partial y} \right) \delta y - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} (\delta y)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_s}{\partial y^3} (\delta y)^3 - \frac{\partial u_s}{\partial z} \delta z \right] = 0 \quad (6)$$

在本文中假定大气是绝热的,于是位温守恒,这时空气块主要在等位温面上运动,因此在等位温面上有下列关系:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\bar{\theta}_0} = f \frac{\partial u_s}{\partial z} / N^2, \quad (7)$$

其中 $N = \left(g \frac{\partial \ln \bar{\theta}_0}{\partial z} \right)^{\frac{1}{2}}$ 为 Brunt-Väisälä 频率, $\bar{\theta}_0$ 为基本场的位温,令 $\theta = \delta y$,并使用(7)式

于是方程(6)变为:

$$\ddot{\theta} + f[fs\theta - \beta\theta^2 - r\theta^3] = 0, \quad (8)$$

其中 $\delta = \frac{\bar{\xi}}{f} - \frac{1}{Ri}$, $\bar{\xi} = f - \frac{\partial u_g}{\partial y}$ 为基本气流的绝对涡度, $Ri = N^2 / \left(\frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2$ 为 Richard-

son 数, $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2}$, $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3}$, (8) 式就是我们今后讨论非线性对称不稳定的方程.

三、对称运动的稳定性及分岔

现分如下几个方面对非线性方程(8)进行讨论:

1. $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} = 0$, 这时方程(8)变为

$$\ddot{\theta} + f[fs\theta - \beta\theta^2] = 0. \quad (9)$$

令 $\dot{\theta} = W$, 于是上述方程可改写为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = W = F(\theta, W), \\ \dot{W} = -f[fs\theta - \beta\theta^2] = G(\theta, W). \end{cases} \quad (10)$$

从方程(10)可求得平衡点分别为 $P(\theta, W) = (0, 0)$ 和 $Q(\theta, W) = (fs/\beta, 0)$.

(1) 对于平衡点 $P(\theta, W) = (0, 0)$, 其导算子为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f^2s & 0 \end{pmatrix}$, 于是可得其特征值为:

$$\lambda = \pm f\sqrt{S} \quad (11)$$

(i) 当 $S > 0$, 即 $Ri > f/\bar{\xi}$ 时, λ 为纯虚根, 这时平衡点是中心点, 也就是说当大气满足 $Ri > f/\bar{\xi}$ 时, 大气运动是对称稳定的.

(ii) 当 $S < 0$, 即 $Ri < f/\bar{\xi}$ 时, λ 为两个符号相反的实根, 这时平衡点是不稳定的鞍点, 因而在对称稳定性指数 S 的负值区, 大气运动是对称不稳定的. 此结论与线性情况相同, 一般在急流的南侧容易满足这个条件.

(2) 对于平衡点 $Q(fs/\beta, 0)$, 其导算子为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f^2s & 0 \end{pmatrix}$, 于是其特征值为:

$$\lambda = \pm f\sqrt{S}. \quad (12)$$

(i) 当 $S > 0$ 时, 同样由(12)式可知平衡点 $(fs/\beta, 0)$ 是不稳定的鞍点, 也就是说在考虑基本气流的非线性水平切变 $\left(\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} \neq 0 \right)$ 情况下, 由于非线性的作用, 也可以使对称稳定性指数 S 的正值区 ($S > 0$) 产生不稳定.

(ii) 当 $S < 0$, 即 $Ri < f/\bar{\xi}$ 时, 平衡点 $(fs/\beta, 0)$ 是中心点, 这时运动是稳定的, 在线性理论中 $S < 0$ 即 $Ri < f/\bar{\xi}$ 正是对称不稳定产生的条件, 但当 $\partial^2 u_g / \partial y^2 \neq 0$ 时, 这种对称不稳定的条件在平衡点 $(fs/\beta, 0)$ 附近不再成立, 而转化为稳定性条件.

可见从上面的讨论可以看出,非线性方程(9)在平衡点 $P(0,0)$ 和 $Q(fS/\beta,0)$ 附近具有不同的性质和结构,在平衡点 $P(0,0)$ 附近非线性方程(9)的性质与线性情况相同,而对于平衡点 $Q(fS/\beta,0)$,其结论正好与线性情况相反.

2. $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = 0$, 这时基本气流按 $u_s = u_{s0} + I_1 \theta + I_3 \theta^3$ 分布,其中 $I_1 = \frac{\partial u_s}{\partial y}$, $I_3 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_s}{\partial y^3}$, 于是方程(8)可改写为二阶非线性保守系统:

$$\ddot{\theta} = M(\theta), \quad (13)$$

式中 $M(\theta) = -f[fS\theta - r\theta^3]$.

设 v 为位势,则按照 Thom 理论中的位势原理^[5]有

$$\theta = -\frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (14)$$

于是由(14)式并利用(13)式可得

$$v = \frac{fr}{4} \theta^4 - \frac{f^2 S}{2} \theta^2. \quad (15)$$

令 $\dot{\theta} = W$, 于是可把方程(13)改写为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = W, \\ \dot{W} = -f[fS\theta - r\theta^3]. \end{cases} \quad (16)$$

由此可知平衡态是 θ 轴 ($W=0$) 上的 $M(\theta)=0$ 的点,即 $M|_{\theta=\theta_0}=0$, 其导算子矩阵的特征值为

$$\lambda^2 = -\left. \frac{d^2 v}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} = -v|_{\theta=\theta_0}. \quad (17)$$

可见平衡点附近的稳定性完全是由 $\ddot{v}(\theta_0)$ 的符号所决定的,当 $\ddot{v}(\theta_0) < 0$ 时,平衡点是不稳定的鞍点,当 $\ddot{v}(\theta_0) > 0$ 时,平衡点是中心点.

(1) $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_s}{\partial y^3} < 0$, 其讨论如下:

(i) 当 $S > 0$ 时,由方程(13)可求得平衡点为 $\theta_0 = 0$, 这时有 $v|_{\theta_0=0} = -f^2 S < 0$, 可见平衡点 $\theta_0 = 0$ 是位势的极大值点,根据(17)式可知平衡点是不稳定的.

(ii) 当 $S < 0$ 时,方程(13)有三个平衡点,即 $\theta_0 = 0$, $\theta_0 = \pm \sqrt{fS/r}$, 于是有 $v|_{\theta_0=0} = -f^2 S > 0$, $v|_{\theta_0 = \pm \sqrt{fS/r}} = 2f^2 S < 0$, 可见平衡点 $\theta_0 = 0$ 是中心点, $\theta_0 = \pm \sqrt{fS/r}$ 是不稳定的鞍点.

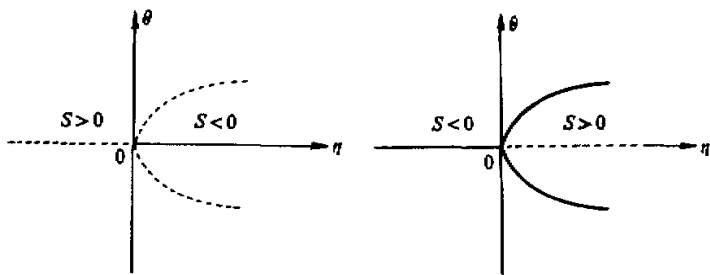
令 $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$, 于是可得平衡态曲线如图 1 所示.

当参数 $\eta < 0$ ($S > 0$) 变到 $\eta > 0$ ($S < 0$) 时,运动可在平衡点 $\theta_0 = 0$ 附近产生亚临界分

岔,也就是说当条件 $\partial^2 u_g / \partial y^2 = 0$, $\partial^3 u_g / \partial y^3 < 0$ 满足时,对称运动可以产生亚临界分岔,当空气块从急流北侧($\partial u_g / \partial y < 0$)移到急流南侧($\partial u_g / \partial y > 0$)时,这种条件容易满足.

(2) $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} > 0$, 同样可分两种情况来讨论:

(i) 当 $S > 0$ 时, 我们同样可得方程(13)的三个平衡点分别为 $\theta_0 = 0$, $\theta_0 = \pm \sqrt{Sf/r}$, 显然 $v|_{\theta_0=0} = -f^2 S < 0$, $v|_{\theta_0 = \pm \sqrt{Sf/r}} = 2f^2 S > 0$, 可见在这三个平衡态中, 有两个是稳定的, 另一个是不稳定的.

图 1 $\eta = fS/r, r < 0$ 图 2 $\eta = fS/r, r > 0$

(ii) 当 $S < 0$ 时, 方程(13)只有一个稳定的平衡态 $\theta_0 = 0$.

令 $\partial v / \partial \theta = 0$, 可得平衡态曲线如图 2 所示.

在 $\eta < 0$ ($S < 0$) 的区域, 运动是稳定的, 而在 $\eta > 0$ ($S > 0$) 的区域却存在不稳定的平衡态, 因而当参数 η 由 $\eta < 0$ 变到 $\eta > 0$ 时, 可在 $\theta_0 = 0$ 附近产生超临界分岔.

实际大气中, 在急流的南侧, $S < 0$ 容易满足, 而在急流的北侧, 则条件 $S > 0$ 容易满足, 因此在 $\frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} > 0$ 的情况下, 当空气块从急流南侧移到急流北侧时便会产生超临界分岔.

四、对称运动中的突变现象

在下面的讨论中, 为了方便, 不妨将方程(8)化成标准型, 这时可令 $\theta = q + \delta$, 于是方程(8)可写为

$$\ddot{q} + f[(fS\delta - \beta\delta^2 - r\delta^3) + q(fS - 3\beta\delta - 3r\delta^2) - (\beta + 3r\delta)q^2 - rq^3] = 0. \quad (18)$$

取 $\delta = -\beta/3r$, 这时方程(18)可变为

$$\ddot{q} + f[1 - \beta(fS + \beta^2/9r)/3r + (fS + \beta^2/3r)q - rq^3] = 0. \quad (19)$$

Haken 认为新的有序结构的产生, 应该用 Thom 突变理论中的位势来描述^[5], 即

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = a + b(\quad) + c(\quad)^2 - d(\quad)^3 = -\frac{\partial V}{\partial(\quad)} \quad (d > 0). \quad (20)$$

比较方程(19)与(20)可以发现,只有当 $r = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} < 0$ 时,方程(19)才有可能出现平衡态的突变.因此在以后的讨论中,只考虑 $r < 0$ 的情况.

作变换 $q \rightarrow (-f r)^{-1/2} q$,可把方程(19)改写为

$$q - a - bq + q^3 = 0, \quad (21)$$

其中

$$a = -\frac{\beta f^{3/2}(fS + \beta^2/9r)}{3(-r)^{1/2}}, \quad b = -f(fS + \beta^2/3r).$$

再把上述方程写成 Thom 位势的形式,有

$$q = a + bq - q^3 = -\frac{\partial v}{\partial q}. \quad (22)$$

于是由(22)式可得位势为

$$v = \frac{1}{4} q^4 - \frac{1}{2} bq^2 - aq. \quad (23)$$

在 $b > 0$ 的情况下,令 $\partial v / \partial q = 0$,于是可确定平衡态曲线如图3所示.

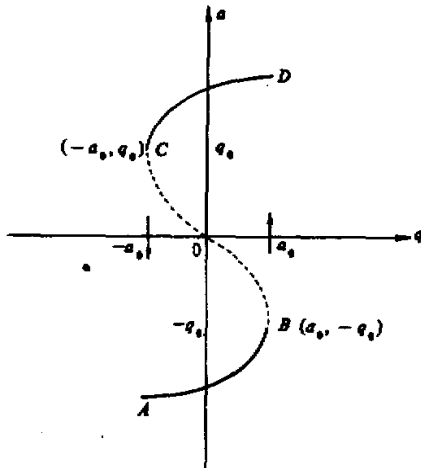


图3 $a_0 = \frac{2}{3} b \sqrt{b/3}$, $q_0 = \sqrt{b/3}$

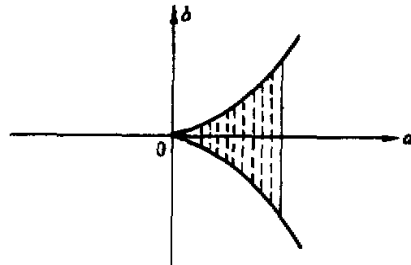


图4 $b > 0$

由(23)式可得位势的二阶导数为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial q^2} = 3q^2 - b. \quad (24)$$

在图3中虚线BC表示 $|q| < \sqrt{b/3}$ 的区域,由(24)式可知虚线对应于位势的极大值,代表不稳定的平衡态,是排斥子(repeller);而实线 $|q| > \sqrt{b/3}$ 对应于位势的极小值,代表稳定的平衡态,是吸引子(attractor).当参数 a 从 $a < 0$ 变到 $a > 0$ 时,这时运动沿着平衡态的AB曲线到达B点,并从B点跳跃到上面平衡态的D点,从而发生突变.反之,当参数 a 从 $a > 0$ 变到 $a < 0$ 时,跳跃并不是发生在D点,而是发生在C点,这种现象称为

突变的滞后性(hysteresis), 亦称尖点突变.

由方程 $a+bq-q^3=0$ 与方程 $b-3q^2=0$ 消去 q 可得尖点方程为

$$27a^2 = 4b^3. \quad (25)$$

在图 4 中, 阴影部分表示 $27a^2-4b^3 < 0$, 它对应于位势的两个极小值, 而阴影部分之外的部分表示 $27a^2-4b^3 > 0$, 它对应于位势的一个极小值, 当参数 a, b 发生改变时, 平衡态便会从一个位势的极小值跳跃到另一个极小值而发生尖点突变.

Zeeman^[6]指出, 当 $b < 0$ 时平衡态不能出现突变现象, 也就是说要使平衡态产生尖点突变, 必须 $b > 0$, 即 $S < -\beta^2 / 3f r$ ($r < 0$), 可见在 $\partial^2 u_g / \partial y^2 \neq 0$ 的情况下, 当基本

气流 u_g 满足 $\frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} < 0$, 并且对称稳定性指数 S 满足 $S < -\frac{1}{2f} \left(\frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} \right)^2 / \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3}$ 时, 对称

运动的平衡态可以产生尖点突变. 李崇银^[3]在讨论大气大尺度水平运动的稳定性时曾指出, 在 $\partial^3 u_g / \partial y^3 < 0$ 的情况下当满足惯性不稳定条件且初始扰动的地转偏差达到一定程度时, 运动可以产生尖点突变, 而本文在所讨论的对称运动问题中指出, 即使初始扰动的地转偏差存在, 只要 $\partial^2 u_g / \partial y^2 \neq 0$, $\partial^3 u_g / \partial y^3 < 0$ 并且 S

$< S_c \left(S_c = -\frac{1}{2f} \left(\frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} \right)^2 / \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} > 0 \right)$ 满足时, 运动也可以产生尖点突变, 这就说明对

称运动中的尖点突变, 并不一定要求初始扰动的地转偏差存在, 并且指出要产生尖点突变, 对称稳定性指数 S 必须小于某一个正值或者为负. Emanuel^[7]曾用 $S = \frac{\bar{z}}{f} - \frac{1}{Ri}$ 作为对称稳定性指数, 利用观测资料计算了 S 剖面, 结果发现强飑线大都产生在 S 的小值和负值区, 这正是我们讨论对称运动要产生尖点突变所得到的条件, 而飑线的产生是一种跳跃过程, 因此用尖点突变来解释飑线的激发过程似乎是一种途径.

五、结 束 语

分岔、突变以及耗散结构理论在气象上的应用可能是未来气象科学取得重要突破的途径, 大气科学中的许多天气现象都可以用这些理论来解释, 过去人们经常用对称不稳定来解释飑线的激发过程, 认为飑线的产生是对称不稳定的结果. 本文着重讨论了对称运动的分岔和突变性质, 认为用尖点突变来解释大气中飑线的激发机制可能是一种途径.

参 考 文 献

- [1] 刘式达、刘式适, 1984, 大气运动中的对流分岔和突变模型, 力学学报, 第16卷, 第1期, 10—18.
- [2] 李麦村等, 1983, 6月和10月大气环流突变的非线性机制, 中国科学(B), 第2期, 187—197.
- [3] 李崇银, 1986, 大气大尺度水平运动的稳定性, 大气科学, 第10卷, 第3期, 240—249.
- [4] Emanuel, K. A., 1980, Forced and free mesoscale motion in atmosphere, Collections of Lectures notes on Dynamics of meso Meteorological Disturbances, preceeding of CIMMS symposium, 191—259.
- [5] 刘式达等, 1989, 非线性动力学和复杂现象, 气象出版社.
- [6] Zeeman, E. C., 1977, Catastrophe theory, selected paper (1972—1977), 329—331.
- [7] Emanuel, K. A., 1982, Inertial instability and mesoscale convective systems, part II: Symmetric CISK in a baroclinic flow, J. Atmos. sci., 39, 1080—1097.