第14卷 第3期 大 气 科 学 Vol.14, No.3
1990年9月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Sept., 1990

正压大气中非线性重力惯性波的非频散周期解

—— 论Taylor展开的可能性

黄思训 张 铭

(空军气象学院)

提 要

本文论证了正压大气中非线性重力惯性波的非频散周期解存在性及找到了该波解存在条件. 通常来说要得到解析解是困难的,故利用Taylor展开来得到近似解.本文给出了Taylor展开的可能性. 然后在Taylor展开允许的情况下,我们得到了近似解的表达式及波速公式,给出了该波动流场与位势高度场的配置结构, 并揭示了非线性效应使得波动结构变得不对称.

关键词: 正压大气; 非线性重力惯性波; 非频散周期解.

一、引 言

原始方程模式目前已在动力气象和数值预报中得到了广泛的应用. 研究原始方程组中包含非线性波动已成为当前动力气象领域内的一个重要课题, 越来越受到气象界的重视. 在旋转地球上由于科氏力的作用, 即使在最简单的线性化模式的情形下, 波群一般是频散的; 只有一些特殊的波形才不频散. 这些特殊的波解称为非频散解. 在非线性情形下, 由于叠加原理不存在, 波动更加复杂, 但非频散波仍然存在. 曾庆存曾用小参数展开法求得了原始方程组中非频散慢波的特解,他还指出,在原始方程组中除了非频散的慢波特解外, 可能还有非频散的快波型的特解[1]. 本文指出非频散快波型的特解是存在的. 因为非线性问题很复杂, 一般均用Taylor展开求得近似解[2-4], 然而这里必须指出, Taylor展开具有一定的条件, 展开以后有周期解并不能说明原问题一定有周期解, 并且必须说明存在近似周期解的条件不应该破坏原问题的Taylor展开的条件. 本文对Taylor展开的可能性给予严格论证, 然后在局部Taylor展开的基础上我们得到了非线性椭圆余弦波解, 并讨论了波速公式.

二、数学模式和周期解存在的条件

局地坐标系中正压原始方程组模式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)u-fv=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

1986年9月12日收到, 1987年5月15日收到再改稿.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v+fu=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi+c_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \end{cases} \tag{1}$$

由于本文仅讨论重力惯性波，为简单起见，不妨取 f, c_0^2 为常数，我们求(1)的非频散特解，设

$$u=U(\theta),\quad v=V(\theta),\quad \varphi=H(\theta),\ \theta=kx+ly-\nu t,$$

其中θ 为"位相"，k, l 为x, y 方向的"波数"，ν 为"圆频率"，k, l, ν 均取为常数，把上式代入方程组(1)得到

$$\begin{cases} (kU+lV-\nu)U'-fV=-kH', \\ (kU+lV-\nu)V'+fU=-lH', \\ (kU+lV-\nu)H'+c_0^2(kU'+lV')=0. \end{cases} \tag{2}$$

令 $Z=kU+lV$, $\Omega=kV-lU$, 则 Z'为散度，Ω'为涡度，于是(2)式化为

$$\begin{cases} (Z-\nu)Z'-f\Omega=-(k^2+l^2)H', & (3) \\ (Z-\nu)\Omega'+fZ=0, & (4) \\ (Z-\nu)H'+c_0^2Z'=0, & (5) \end{cases}$$

其中"′"表示对 θ 的微商，把(5)式代入(3) 式得到

$$(Z-\nu)Z'-f\Omega=\hat{c}_0^2\frac{Z'}{Z-\nu}. \tag{6}$$

于是可得到Z, Ω 的一阶非线性常微组

$$\begin{cases} \Omega'=-\frac{fZ}{Z-\nu}, \\ Z'=\frac{f(Z-\nu)\Omega}{(Z-\nu)^2-\hat{c}_0^2}, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\hat{c}_0^2=(k^2+l^2)c_0^2$, 系统(7)的平衡位置为 $Z=0$, $\Omega=0$. 在(0,0)点附近非线性方程(7)的近似线性微分方程组为

$$\begin{cases} \Omega'=\frac{f}{\nu}Z, \\ Z'=\frac{-f\nu}{\nu^2-\hat{c}_0^2}\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

要使(8)式在(0,0)点为中心，必须满足条件$f^2/(\nu^2-\hat{c}_0^2)>0$, 即 $\nu^2>\hat{c}_0^2$,也即$|\nu|>\hat{c}_0=\sqrt{k^2+l^2}c_0$. 于是此条件$\nu^2>\hat{c}_0^2$ 亦成为系统(7)存在周期解的必要条件. 在此条件下，可研究系统(7)在(0 , 0)点附近的轨线性质. 由(7)式有:

$$\frac{d\Omega}{dZ}=\frac{-Z[(Z-\nu)^2-\hat{c}_0^2]}{\Omega(Z-\nu)^2}. \tag{9}$$

对(9)式积分一次

$$\frac{\Omega^2}{2}=c_0^*-\frac{(Z-\nu)^2}{2}-\nu(Z-\nu)+\hat{c}_0^2\ln|Z-\nu|-\nu\hat{c}_0^2\frac{1}{Z-\nu}\equiv F(Z) \tag{10}$$

其中 c_0^* 为积分常数. 我们希望 $Z=0$ 时, $F(0)>0$, 即

$$F(0)=c_0^*+\hat{c}_0^2(\ln|v|+1)+\frac{v^2}{2}>0,$$

或者

$$c_0^*>-\left[\frac{v^2}{2}+\hat{c}_0^2(\ln|v|+1)\right]=d_1. \tag{11}$$

下面我们来作 $F(Z)$ 的图象, 为了研究方便, 设 $v>0$ (对 $v<0$ 同样可以研究). $F'(Z)=0$ 的点为 $Z=0$ 与 $Z_0=v-\hat{c}_0$. 当 $Z\in(-\infty,0)$ 时, $F'(Z)>0$; 当 $Z\in(0,v-\hat{c}_0)$ 时, $F'(Z)<0$; 当 $Z\in(v-\hat{c}_0,v)$ 时, $F'(Z)>0$, 且当 $Z\to v^-$ 时, $F(Z)\to+\infty$, 于是 $F(Z)$ 的图象如图 1 所示. 为了 $F(Z)$ 在 $(-\infty,v)$ 之间有三个根(不妨设为 Z_i, $i=1,2,3$, 如图 1 所示), 则必须有:

$$F(v-\hat{c}_0)=c_0^*+2v\hat{c}_0+\hat{c}_0^2\left(\ln\hat{c}_0-\frac{1}{2}\right)<0,\text{或}$$

$$c_0^*<-\left[\hat{c}_0^2\left(\ln\hat{c}_0-\frac{1}{2}\right)+2v\hat{c}_0\right]=d_2. \tag{12}$$

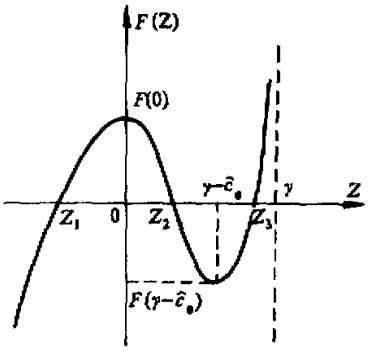

图 1

下面在条件

$$d_1<c_0^*<d_2 \tag{13}$$

下, 让我们证明轨线是闭合的. 在相平面 Z, Ω 上, 由于图象关于 Z 对称, 故只需讨论 I, II 象限. 当 Z 从 Z_2 减少到 0 时, $\Omega'>0$, 故 Ω 从 0 增加到 $[2F(0)]^{1/2}$; 当 Z 从 0 减少到 Z_1 时, $\Omega'<0$, 故 Ω 从 $[2F(0)]^{\frac{1}{2}}$ 减少到 0, 于是系统(7)在平衡点附近且当条件(13)满足时, 轨线是闭合的(见图 2), 有

$$\Omega=\pm\sqrt{2F(Z)},$$

其中"+"号对应于相平面上上半平面半支, "−"号对应于下半平面半支. 下面阐明一下 c_0^* 的物理意义. 记 $\Omega_0=\Omega|_{Z=0}$, $D_0=Z_0'=Z'|_{Z=0}$, 即 D_0 为 $Z=0$ 时的散度称为特征散度, 于是有如下关系

$F(0)=\Omega_0^2/2$, $c_0^*-d_1=\Omega_0^2/2$, $0<c_0^*-d_1<d_2-d_1$,

$Z_0'=D_0=-vf\Omega_0/v^2-\hat{c}_0^2$.

从而得到关系式

$$c_0^*=\frac{(v^2-\hat{c}_0^2)^2}{2f^2v^2}D_0^2+d_1. \tag{14}$$

由此可见 c_0^* 与特征散度有关, 通过计算, 条件(13)转为

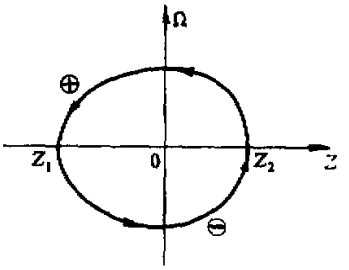

图 2

$$0<D_0^2<\frac{f^2v^2}{(v^2-\hat{c}_0^2)^2}\left[(v-2\hat{c}_0)^2-\hat{c}_0^2+2\hat{c}_0^2\ln\frac{v}{\hat{c}_0}\right].$$

引进参数 $a=\hat{c}_0^2/v^2$, 由 $v>\hat{c}_0$ 知, $0<a<1$, 故上式为

$$0<D_0^2<\frac{f^2}{(1-a)^2}\left[(1-2a)^2-a-a\ln a\right]. \tag{15}$$

由以上讨论可知，正压大气中非线性重力惯性波的非频散周期解有二条重要性质：

(1) $v>\hat{c}_0>0$，也即波动的相速要比线性化的纯重力外波的波速c_0来得大.

(2) 波动的特征散度 D_0 受(14)式限制. 也即 $Z=0$ 处的散度不能过大，否则波要破碎，而使非频散解遭到破坏.

三、周期解的近似解析解表达式

前面我们讨论了系统(7)存在周期解的条件(13)，然而要求得解析解，这是非常困难的，一般来说要采用近似求解的方法，如进行 Taylor 展开等. 这里必须说明几点：第一，Taylor 展开具有一定的条件，这条件不能破坏原问题周期解的条件；第二，Taylor 展开后所得新的近似方程若存在周期解又有新的条件，此条件必须与原问题的条件相协调. 如果这二点都满足，那么，我们才确信求得的解可以作为原问题的近似解.

第一个问题，我们首先导出 Taylor 展开的条件. 由图 1 知，$Z_1\leqslant Z\leqslant Z_2<v-\hat{c}_0<v$，故 $Z<v$ 条件是显然的，但对 Z 的下界未作任何限制，为了能对 $\ln(v-Z)$ 进行 Taylor 展开，必须假定 $-v<Z$，在图 1 中可见 $-v<Z$ 等价于 $F(-v)<0$，即

$$F(-v)=c_0^*+\hat{c}_0^2\left(\ln 2v+\frac{1}{2}\right)<0\ , \tag{16}$$

或者

$$c_0^*<-\hat{c}_0^2\left(\ln 2D+\frac{1}{2}\right)=d_3\ .$$

上面我们给出的条件 $-v<Z$ 或(16)式是人为的还是自然满足的条件呢？为此让我们考察函数

$$\psi(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\ln 2-1\ ,\ (0<x<1) \tag{17}$$

由于 $\psi'=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}<0$，故 $\psi(x)$ 是单调减少函数，特别 $\psi(1)=1-\ln 2>0$，故当 $x\in(0,1)$ 时 $\psi(x)>0$，令 $x=\sqrt{a}$，于是：

$$\ln\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}-\ln 2-1>0,$$

亦即

$$\hat{c}_0^2\left(\ln\hat{c}_0-\frac{1}{2}\right)+2v\hat{c}_0>\hat{c}_0^2\left(\ln 2v+\frac{1}{2}\right).\ (\text{或}\ d_2<d_3)$$

由此可见当 $d_2<d_3$ 时，保证了 $-v<Z_1$，亦即(16)成立，从而 $|Z|<v$. 故当 $d_1<c_0^*<d_2$ 时，Taylor 展开条件自然满足.

由(9)式可知

$$\frac{d\Omega}{dZ}=-\frac{Z}{\Omega}\left[1-\frac{\hat{c}_0^2}{(Z-v)^2}\right]=-\frac{Z}{\Omega}\left\{1-\frac{\hat{c}_0^2}{v^2}\left[1+\frac{2Z}{v}+O\left(\left(\frac{Z}{v}\right)^2\right)\right]\right\}$$

$$\approx-\frac{Z}{\Omega}\left[1-\frac{\hat{c}_0^2}{v^2}\left(1+\frac{2Z}{v}\right)\right]=-\frac{Z}{\Omega}\left[(1-a)-\frac{2a}{v}Z\right]. \tag{18}$$

积分(18)式或直接由(10)式进行 Taylor 展开，可得到

$$\frac{\Omega^2}{Z}=(c_0^*-d_1)-\frac{1-a}{2}Z^2+\frac{2a}{3v}Z^3=\widetilde{F}(Z) \tag{19}$$

记 $c^*=c_0^*-d_1$，(19)式并非在任何条件下存在周期解. 用前面同样方法可得到(19)式存在周期解的条件为

$$0<c^*<\frac{1}{24}\frac{(1-a)^3v^2}{a^2}=d_4 \tag{20}$$

$\widetilde{F}(Z)$ 的图象见图 3，$\widetilde{F}(Z)=0$的三个根仍记为$Z_i(i=1,2,3)$.

第二个问题，证明了 Taylor 展开后，问题有周期解，且与原问题有周期解是相协调的. 从图 3 可见，

$$v-\hat{c}_0<\frac{v}{2a}(1-a),\ (0<a<1)$$

故近似方程周期解条件为

$$0<c^*<d_4.$$

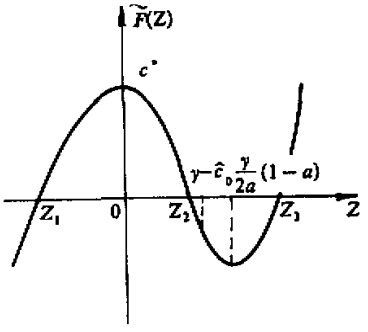

图 3

当把(18)式代入(7)式时，还须保证 $Z_2<v-\hat{c}_0$，否则，当 $Z=v-\hat{c}_0$ 时，方程组出现奇性，为了避免此情况，于是还须额外加条件

$$\widetilde{F}(v-\hat{c}_0)=c^*-\frac{1}{2}(1-a)(v-\hat{c}_0)^2+\frac{2a}{3v}(v-\hat{c}_0)^3<0, \tag{21}$$

或者

$$c^*<(1-\sqrt{a})^3v^2\left[\frac{1+\sqrt{a}}{2}-\frac{2}{3}\right]=d_5. \tag{22}$$

由于 $\widetilde{F}(Z)$ 在 $\left(Z_2,\ \frac{v}{2a}(1-a)\right)$ 区间中单调性，$\widetilde{F}(v-\hat{c}_0)<0$ 保证了 $\widetilde{F}\left(\frac{v}{2a}(1-a)\right)<0$，于是可得到 $d_5<d_4$. 从而条件(22)成立保证了条件(20)的成立.

下面证明当条件 $d_1<c_0^*<d_2$ 或者 $0<c_0^*<d_2-d_1$ 满足时，条件(22)自然满足，即要证明 $d_2-d_1<d_5$. 这就是说只要原问题有周期解，经过 Taylor 展开后仍有周期解，且存在周期解条件包含在原问题的条件之中. 这就是对(10)式进行 Taylor 展开的理论根据. 现在证明

$$d_2-d_1<d_5,$$

即要证明

$$-\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}-2\sqrt{a}-\frac{a}{2}\ln a\right)+(1-\sqrt{a})^3\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{a})-\frac{2}{3}a\right]>0. \tag{23}$$

先作辅助函数

$$\widetilde{\psi}(x)=-\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}-2x-x^2\ln x\right)+(1-x)^3\left(\frac{1+x}{2}-\frac{2}{3}x^2\right), \tag{24}$$

研究当 $0<x<1$ 时，$\widetilde{\psi}(x)$ 情况.

$$\tilde{\psi}(0)=\tilde{\psi}(1)=0;$$

$$\tilde{\psi}'(x)=(1-x)^2\frac{10x^2-10x-3}{3}+2x\ln x+2(1-x),$$

$$\tilde{\psi}'(0)=1>0,\ \tilde{\psi}'(1)=0;$$

$$\tilde{\psi}''(x)=\frac{(x-1)(40x^2-50x+4)}{3}+2\ln x,$$

$$\tilde{\psi}''(1)=0,\ \tilde{\psi}''(0)=-\infty;$$

$$\tilde{\psi}'''(x)=40x^2-60x+18+\frac{2}{x}.$$

令 $y_1=40x^2-60x+18$，$y_2=-2/x$，利用作图可知在(0，1)之间存在唯一的 x_0，使当 $x\in(0,\ x_0)$时，$\tilde{\psi}'''>0$，当 $x\in(x_0,1)$时，$\tilde{\psi}'''<0$，于是 $\tilde{\psi}''$，$\tilde{\psi}'$，$\tilde{\psi}$ 的图象如图4所示.

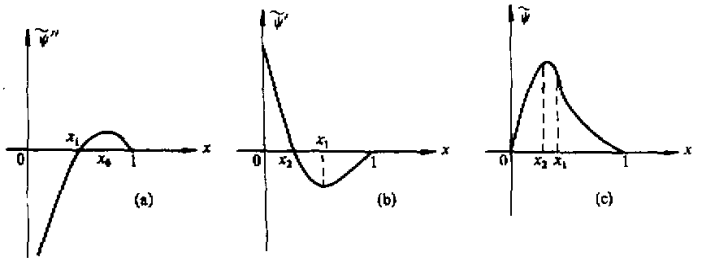

图 4

由此可见,当 $x\in(0,\ 1)$时，$\tilde{\psi}>0$. 故若在(24)式中令 $x=\sqrt{a}$ 就可得到结果(23)，即确有 $d_2-d_1<d_5$.

由以上结果可知，当 $0<c^*<d_2-d_1$ 时，$\tilde{F}(Z)=0$ 有三个实根，满足条件:

$$-v<Z_1<Z_2<v-\hat{c}_0.$$

当 $Z_1\leqslant Z\leqslant Z_2$ 时保证了 $\tilde{F}(Z)\geqslant 0$，于是

$$\Omega=\pm\sqrt{\frac{4a}{3v}}\sqrt{\prod_{i=1}^{3}(Z-Z_i)}=\alpha\left[\prod_{i=1}^{3}(Z-Z_i)\right]^{\frac{1}{2}},\tag{25}$$

其中 $\alpha=\pm\sqrt{4a/3v}$. 把(25)式代入(7)式中第二式则有

$$Z'=\frac{\alpha f(Z-v)\left[\prod_{i=1}^{3}(Z-Z_i)\right]^{\frac{1}{2}}}{(Z-c_1)(Z-c_2)},\tag{26}$$

其中 $c_1=v-\hat{c}_0$，$c_2=v+\hat{c}_0$. 故

$$I=\int\frac{(Z-c_1)(Z-c_2)dZ}{(Z-v)\left[\prod_{i=1}^{3}(Z-Z_i)\right]^{\frac{1}{2}}}=\int\alpha f d\theta=\alpha f(kx+ly-vt)+b^{\pm}.$$

下面计算积分 I. 引进变量

$$Z-Z_1=\tau^2,\ Z_3-Z_1=h^2,\ Z_2-Z_1=h'^2,$$

$$\tilde{c}_1^2=\frac{c_1-Z_1}{h'^2},\ \tilde{c}_2^2=\frac{c_2-Z_1}{h'^2},\ \tilde{c}^2=\frac{v-Z_1}{h'^2},$$

$$z=\frac{\tau}{h'}=\sqrt{\frac{Z-Z_1}{Z_2-Z_1}},\ 0<m=\frac{h'}{h}=\sqrt{\frac{Z_2-Z_1}{Z_3-Z_1}},$$

则积分 I 变为

$$I=\int\frac{[\tau^2-(c_1-Z_1)][\tau^2-(c_2-Z_1)]2\tau d\tau}{[\tau^2-(v-Z_1)]\sqrt{\tau^2(\tau^2-(Z_2-Z_1))(\tau^2-(Z_3-Z_1))}}$$

$$=\int\frac{2(\tau^2-h'^2\tilde{c}_1^2)(\tau^2-h'^2\tilde{c}_2^2)d\tau}{(\tau^2-h'^2\tilde{c}^2)\sqrt{(\tau^2-h'^2)(\tau^2-h^2)}}=2\frac{h'^2}{h}\int\frac{(z^2-\tilde{c}^2)-\tilde{\gamma}\ \frac{1}{z^2-\tilde{c}^2}}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}dz,$$

其中 $\tilde{\gamma}=(\tilde{c}^2-\tilde{c}_1^2)(\tilde{c}_2^2-\tilde{c}^2)=\hat{c}_0^2/h'^4$. 于是

$$I=\frac{2h'^2}{h}\int\frac{(z^2-\tilde{c}^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}-\frac{2h'^2}{h}\tilde{\gamma}\int\frac{dz}{(z^2-\tilde{c}^2)\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}$$

$$=-\frac{2h'^2}{h}\tilde{c}^2F(\arcsin z,\ m)+2h[F(\arcsin z,m)-E(\arcsin z,m)]$$

$$+\frac{2h'^2\tilde{\gamma}}{\tilde{c}^2h}\Pi(\arcsin z,\ -\frac{1}{\tilde{c}^2},\ m),\tag{27}$$

其中 F, E, Π 为第一、二、三类椭圆积分，于是我们得到了解析解的表达式:

当 $Z_3\neq v$ 时，有

$$Z=Z_2-(Z_2-Z_1)c_n^2\left\{\frac{h}{2(Z_3-v)}[\alpha\ f\cdot(kx+ly-vt)+2hE(\arcsin z,\ m)]-\right.$$

$$\left.-\frac{2\hat{c}_0^2}{(v-Z_1)h}\Pi\left(\arcsin z,\ -\frac{1}{\tilde{c}^2},\ m\right)+b^{\pm}\right\};\tag{28}$$

当 $Z_3=v$ 时，有

$$-2hE(\arcsin z,m)+\frac{2h'^2\tilde{\gamma}}{\tilde{c}^2h}\Pi\left(\arcsin z,-\frac{1}{\tilde{c}^2},m\right)=\alpha f\ (kx+ly-vt)+b^{\pm},\tag{28*}$$

式中 $b^{\pm}$ 为积分常数，由于 $\alpha=\pm\sqrt{\frac{4a}{3v}}$，故正号代表相图上上半支，负号代表下半支，这二支通过积分常数 $b^{\pm}$ 来光滑地拟合. 注意在 z 中包含 Z 故上述的解由隐函数定义.

波的相角周期 Θ 可沿轨线积分求得.

$$\Theta=2\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{(Z-c_1)(Z-c_2)dZ}{\alpha f(Z-v)\left[\prod_{i=1}^{3}(Z-Z_i)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2}{\alpha f}\left\{\frac{2(Z_3-v)}{h}F\left(\frac{\pi}{2},m\right)-2hE\left(\frac{\pi}{2},m\right)+\frac{2\hat{c}_0^2}{(v-Z)h}\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{1}{\tilde{c}^2},\ m\right)\right\},\tag{29}$$

(29) 式中 α 取负号，$F\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$，$E\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$，$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\hat{c}^2}, m\right)$ 为第一、二、三类完全椭圆积分.

波的周期

$$T=\frac{1}{\nu}\Theta \tag{30}$$

波动在 x,y 方向的波长 L_x，L_y 分别为

$$L_x=\frac{\nu}{k}T,\ L_y=\frac{\nu}{l}T, \tag{31}$$

波的振幅为

$$\hat{Z}=Z_2-Z_1=h'^2. \tag{32}$$

四、非线性椭圆余弦波的结构

以上我们得到了 Z 的解析解的近似表达式，它是一支非线性椭圆余弦波，Ω 解析解的近似表达式可由(13)式求得，H 解析解的近似表达式通过积分(5)式得出：

$$H=-c_0^2\ln(\nu-Z)+c, \tag{33}$$

其中 c 是积分常数，可以这样确定，当 $\hat{Z}\to 0$ 时，也即波动振幅无穷小时，非线性波动退化为线性波动，此时位势 φ 即趋于其平衡位置 $\overline{\varphi}=c_0^2$. 即当 $\hat{Z}\to 0$ 时，$Z\to 0$，此时 $\varphi\to\overline{\varphi}$，由此可得：$c_0^2=-c_0^2\ln\nu+c$，即 $c=c_0^2(1+\ln\nu)$. 把 c 代入(33)式可得

$$H=c_0^2\left[1-\ln\left(\frac{\nu-Z}{\nu}\right)\right] \tag{34}$$

根据相图(图 2)和(34)式可给出 Z，Ω，H 的波形示意图(图 5)，由此可见 Z，Ω，H 的波形与正弦波不同，且这三者的波形也不同，H 与 Z 同位相，而 Ω 则相差一相位，当 $Z=0$，$H=c_0^2$ 时 $|\Omega|$ 最大，当 $\Omega=0$ 时，则 H，Z 达到极值.

为了进一步弄清波动的结构，我们考虑仅沿 x 方向传播、在 y 方向均匀的波动，即考虑 $l=0$ 的波动，此时 $Z=KU$，$\Omega=KV$，分别与 x 方向和 y 方向的风速成比例，在这种假定下，图 6 给出水平面上该非线性波动的流线和气压场、散度场的配置关系. 这种配置关系定性地看与线性化的结果类似. 但现在辐合中心并不位于二个辐散中心正中，而是有一个偏移. 高压区(高位势区)位于辐散和辐合中心之间，占的位置较大，而低压区(低位势区)占的位置较小. 南风最大处对应着辐合中心，而北风最大处对应于辐散中心. 由

图 5

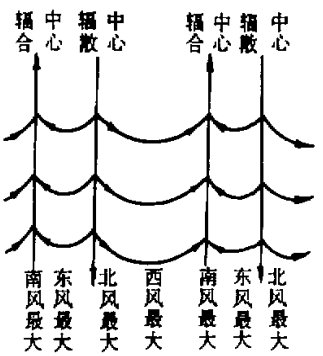

图 6

图6可见，非线性效应使得高压范围大于低压范围，且使系统的负涡度比正涡度来得大。在线性情形下对称的重力惯性波在非线性情形下就不对称了。

五、波速公式讨论

由前面讨论可知，当 $0<c^*<d_2-d_1$ 时，$\tilde{F}(Z)=0$ 的三个根 $Z_i\ (i=1,2,3)$ 满足韦达定理：

$$\begin{cases} Z_1+Z_2+Z_3=\dfrac{3v}{2a}\left(\dfrac{1-a}{2}\right), \\ Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3=0, \\ Z_1\cdot Z_2\cdot Z_3=-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{v}{a}\right)c^*. \end{cases} \tag{35}$$

令 $\hat{Z}=Z_2-Z_1$，$\dfrac{Z_1}{\hat{Z}}=\gamma^*$，$\dfrac{Z_2}{\hat{Z}}=\gamma$，$\dfrac{Z_3}{\hat{Z}}=\delta$，$\gamma^*$，$\gamma$，$\delta$ 为 Z_1 与振幅 $\hat{Z}$ 的比值，显然 $\gamma-\gamma^*=1$，即 $\gamma^*=\gamma-1$，于是

$$Z_1=(\gamma-1)\hat{Z},\ Z_2=\gamma\hat{Z},\ Z_3=\delta\hat{Z}. \tag{36}$$

令 $M=\dfrac{v}{a}\left(\dfrac{1-a}{2}\right)/\hat{Z}>0$，把(36)式代入(35)式经整理得：

$$\begin{cases} (2\gamma-1)+\delta=\dfrac{3}{2}M, \\ \gamma(\gamma-1)+(2\gamma-1)\delta=0, \\ \gamma(\gamma-1)\delta=-\dfrac{3}{2}\dfrac{v}{a}\dfrac{c^*}{\hat{Z}^3}. \end{cases} \tag{37}$$

由图3可知

$$\gamma-1<0<\gamma<M<\delta, \tag{38}$$

由(37)式解得：

$$\begin{cases} \gamma=\dfrac{1}{2}\left(1+M-\sqrt{M^2-\dfrac{1}{3}}\right) \text{或} \quad M=\dfrac{2}{3}\dfrac{(3\gamma^2-3\gamma+1)}{(2\gamma-1)}, \\ \delta=\dfrac{M}{2}+\sqrt{M^2-\dfrac{1}{3}}. \end{cases} \tag{39}$$

由 $c^*<d_2-d_1$ 及(38)式我们可从(39)式得到 $M>2/3$。显然，当 $M\to\infty$ 时，$\gamma\to1/2$；$M\to2/3$ 时，$\gamma\to2/3$。由 $\tilde{F}(Z_i)=0\ (i=1,2)$ 消去 c^* 可得：

$$\hat{Z}=\frac{3v(1-a)(2\gamma-1)}{4a(3\gamma^2-3\gamma+1)},\quad c^*=\frac{(1-\gamma)^2\gamma^2}{3\gamma^2-3\gamma+1}\left(\frac{1-a}{2}\right)\hat{Z}^2. \tag{40}$$

又由(14)式可知 $c^*=\dfrac{(v^2-\hat{c}_0^2)^2}{2f^2v^2}D_0^2$，于是

$$D_0^2=f^2\sigma^2(\gamma)\frac{\hat{Z}^2}{v^2(1-a)}, \tag{41}$$

其中 $\sigma(\gamma)=\dfrac{(1-\gamma)\gamma}{\sqrt{3\gamma^2-3\gamma+1}}>0$。由上可得

$$v^2=\hat{c}_0^2+f^2\sigma^2(\gamma)\frac{\hat{Z}^2}{D_0^2}. \tag{42}$$

令 $c=v^2/k^2+l^2$，c 为波动的相速，则由 $v>0$ 可知 $c>0$，则可得到波速公式：

$$c=\sqrt{c_0^2+\frac{f^2}{k^2+l^2}\left[\sigma(\gamma)\frac{\hat{Z}}{D_0}\right]^2}. \tag{43}$$

由(43)式可见，波速 c 与 $\hat{Z}$ 和波形(由参数 γ、D_0 代表)有关，这体现了非线性波动的特点.

首先考虑参数 $\gamma=Z_2/\hat{Z}=Z_{max}/\hat{Z}$，当 $\gamma\to 1/2$ 时，即 $M\to\infty$ 或者说 $\hat{Z}\to 0$ 即波动为线性时，$Z_{max}=\hat{Z}/2$ 与正弦函数是合拍的. 当 γ 增大时，即 $Z_{max}/\hat{Z}$ 增大，$|Z_{min}|/\hat{Z}$ 变小，波形不对称性加大，波动与正弦波的偏差加大，即波动非线性程度加大. 又由(39)式可知 γ 与 M 一一对应，故 M 也表示非线性程度.

下面考察一下当 $\hat{Z}\to 0$ 时频率方程(43)的形式. 由于 $\hat{Z}\to 0$，此时非线性波动退化为线性波动. 非线性椭圆余弦波退化为正弦函数形式的标准模. 下面为了讨论简化起见，设 $l=0$，即设波动仅沿 x 方向传播，此时 $Z=KU$，$\Omega=KV$，二维问题退化为一维问题. 此时(42)式改为

$$v^2=\hat{c}_0^2+f^2\sigma^2(\gamma)\frac{K^2U^2}{D_0^2}. \tag{44}$$

当 $\hat{U}\to 0$ 时，U 退化为标准模形式 $U=U_0e^{i(k^*x-v^*t)}$. 若引入本文中振幅 $\hat{U}$，则 $U=\frac{\hat{U}}{2}e^{i(k^*x-v^*t)}$，其中 k^*，v^* 为标准模的波数与圆频率. 则有

$$D_0=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{U=0}=k^*U_0=\frac{k^*\hat{U}}{2},$$

显然非线性波动的"波数"k 与"圆频率"v 与线性化的 k^*，v^* 可相差一个固定比例系数. 即有 $c=\frac{v}{k}=\frac{v^*}{k^*}$，故当 $M\to\infty$ 时($\gamma\to 1/2$)有

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ \sigma(\gamma)\frac{k\hat{U}}{D_0}=\sigma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{k\hat{U}}{k^*\hat{U}/2}=\frac{k}{k^*},$$

这样(44)式可变成

$$v^2=\hat{c}_0^2+f^2\left(\frac{k}{k^*}\right)^2,$$

也即 $k^2c^2=k^2c_0^2+(f/k^*)^2k^2$，于是

$$c=\sqrt{c_0^2+\left(\frac{f}{k^*}\right)^2}. \tag{45}$$

(45)式即为人们熟知的线性化情形下重力惯性外波的波速公式. 于是(45)式是(43)式当

$M \to \infty$ 时的结果. (43)式给出了 c 与波形(用 γ, D_0 或 M, D_0 代表)、振幅($\dot{Z}$)之间的诊断关系.

下面讨论 v 与 $\dot{Z}$ 之间的诊断关系. 由定义

$$M = \frac{v(1-a)}{2a} \Big/ \dot{Z}, \tag{46}$$

于是

$$v^3 - \hat{c}_0^2 v - 2M \dot{Z} \hat{c}_0^2 = 0. \tag{47}$$

故 v 与 $\hat{c}_0$, M, $\dot{Z}$ 有关, v 由(47)式中三次方程的根所确定, 将(47)式除以 $\hat{c}_0^3$, 且令 $\mu = \frac{v}{\hat{c}_0}$, 显然由 $v > \hat{c}_0$ 可知 $\mu > 1$. 同时令 $M_a = \frac{\dot{Z}}{2\hat{c}_0}$, 则(47)式可化为无量纲方程

$$\mu^3 - \mu - 4MM_a = 0. \tag{47*}$$

令 $G(\mu) = \mu^3 - \mu - 4MM_a$, 则 $G'(\mu) = 3\mu^2 - 1 = 0$ 有二个根, $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{3}/3$, 故 $G(\mu)$ 的图象如图 7 所示. 由于 $G(1) = G(0) < 0$, 故从图形上来看存在唯一实根 $\mu_1 > 1$. 当 MM_a 增大时, 图形向下平移, 则根 μ_1 增大.

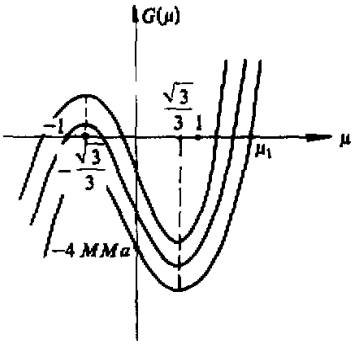

图 7

为了进一步讨论, 设 $l=0$, 此时 $\mu = \frac{v}{\hat{c}_0} = \frac{c}{c_0}$, c 为波动沿 x 方向传播的相速, c_0 为静止大气中重力惯性外波的波速. $M_a = \hat{U}/2c_0$, M_a 可以视为 Mach 数. 此时(47)式即为

$$c^3 - c_0^2 c - 2M c_0^2 \hat{U} = 0 \tag{48}$$

由(48)式可知, 在 c_0 相同的大气中, 非线性程度相同的二个波动(即 M 相同)若其振幅 $\hat{U}$ 大的则其相速较大, 而 $\hat{U}$ 小的则其相速小; 若 $\hat{U}$ 固定, M 越小(即非线性程度高)的波动其相速 c 反而较小; 若 M, $\hat{U}$ 固定不变, c_0 不同, 此时

$$c\left[\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - 1\right] = 2M\hat{U} \tag{49}$$

当 c_0 减小, c 必须减小, 这个结论定性上与线性波动一致.

参 考 文 献

[1] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 科学出版社.

[2] 刘式达等, 1982, 大气中的非线性椭圆余弦波和孤立波, 中国科学 B 辑, No.4, 372—384.

[3] 刘式适等, 1983, 正压模式中的非线性波动, 大气科学, 7, 125—135.

[4] 刘式达等, 1982, 大气非线性波动的解, 气象学报, 40, 279—288.