

低层大气运动的浑沌吸引子

杨培才 刘锦丽 杨硕文

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文应用低层大气的实测资料以及重构相空间的方法,研究了低层大气运动的浑沌特征,结果发现,在低层大气运动中浑沌吸引子是存在的,就本文给出的四个实例而言,它们的关联维数和最大的李雅普诺夫指数分别在5.5与7.3之间和0.037与0.046 bit/s之间,上述结果对大气运动模式的评估、大气观测方案的设计以及低层大气可预报性问题的研究是有重要参考价值的。

关键词: 浑沌; 分数维; 李雅普诺夫指数

一、引 言

近十余年来,众多的有关大气和其它流体系统的模拟研究,清楚地揭示了流体系统的结构发展的层次,人们对浑沌运动产生的条件和过程已不再陌生,这些成就无疑是巨大的,然而,与这些研究结果相比,人们对实际过程中的浑沌现象的了解还是很少的,这一事实不仅使得理论模型的质量得不到客观实际的检验,而且也限制了浑沌理论在实际中的应用,就大气过程而言,浑沌或不规则性是大气运动的本质特征,这一特征一方面给研究大气运动带来了困难,另一方面也为研究实际过程中的浑沌现象提供了机会,比如,大气运动的浑沌行为给长期天气预报带来了不确定性,然而,首先从浑沌理论研究中得到好处的,也必将是长期天气过程的预报。

在观测或者实验资料的处理上,重构相空间的思想起着十分重要的作用,它使得在理论上研究浑沌的一些概念和方法可以直接移植到实际资料的分析上,一些描述浑沌行为的重要的量,如李雅普诺夫指数和分数维,都可以得到适当的估计,这些估计使得人们对实际过程中的浑沌现象有了量的概念,从而为它在理论上和实际上的应用奠定了基础。

一些大气科学家对某些天气吸引子和气候吸引子的维数已经做了一些有意义的研究^[1-4],这些研究指出,实际大气运动是一个低自由度系统,这一结论对实际大气观测方案的设计和理论模型的建立都有重要意义,本文将利用低层大气的一些实测资料进行另一次尝试,旨在研究尺度较小的低层大气湍流运动的维数和李雅普诺夫指数。

二、资 料

在大气科学领域中,绝大多数资料来自对大气运动过程的直接观测,它们通常由包

含着几个变量的向量时间序列组成, 即

$$\begin{aligned} Z(t) &= \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)\}, \\ t &= t_0 + p\Delta t, \quad p = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 L 为被观测的变量的数目, t 是时间, t_0 是观测的开始时间, Δt 是采样的时间间隔, N 为资料的总长度. 实际上, 序列 (1) 本身就是一个 L 维的状态空间, 但是由于大气运动过程的复杂性或者某些技术上的原因, L 个观测量常常不足以刻画所要研究的系统, 也就是说大气系统具有高于 L 的自由度. 因此, 必须构造一个更高维的相空间, 才能得到可靠的大气吸引子特征的估计.

本文应用中国科学院大气物理所设在燕山地区的铁塔的低层大气运动观测资料, 计算和分析了边界层大气运动的浑沌行为. 资料来自两个连续的观测过程, 时间分别为 1985 年 1 月 21 日和 22 日的 14:00 到 16:20. 它由四个变量 (u, v, w, T) 的时间序列组成, 其中 u, v 和 w 分别是归一化了的风速水平分量和垂直分量的距平值, T 是归一化了的大气温度距平值. 资料的采样间隔为 1 秒, 观测精度为 ± 0.001 . 为了考察浑沌运动的特征随时间的变化, 我们把上述两个观测过程各分成两个时段, 共构成四个资料集, 并分别记为 $D1, D2, D3$ 和 $D4$, 它们的长度均为 4096.

三、算 法

对于向量时间序列 (1), 可以仿照文献 [5] 中处理单一变量的时间序列的方法, 重构一个更高维的相空间. 如果我们用 τ 表示时间滞后, 用 K 表示原始相空间的维数增加的倍数, 那么, 我们将得到一个重建的 $m = K \times L$ 维的动力系统, 即

$$\begin{aligned} \bar{Y}(t) &= \{y_1^{(0)}(t), y_1^{(1)}(t), \dots, y_1^{(k-1)}(t); y_2^{(0)}(t), y_2^{(1)}(t), \dots, y_2^{(k-1)}(t); \\ &\dots y_L^{(0)}(t), y_L^{(1)}(t), \dots, y_L^{(k-1)}(t)\}, \\ t &= t_0 + p\Delta t, \quad p = 1, 2, \dots, (N - (k-1)\tau), \end{aligned} \quad (2)$$

其中变量 $y_i^{(j)}(t) = x_i(t + j\tau\Delta t)$.

对这样一个 m 维的流, 我们可以研究它的信息性质和几何性质, 如果流是浑沌的, 那么它的最大的李雅普诺夫指数必定具有正值, 而且它的维数是非整的.

1. 关联维数的计算方法

一个比较适用于实验资料时间序列的吸引子的维数的计算方法是 Grassberger 和 Procaccia^[5] 提出的, 他们的算法的主要步骤是:

- 1) 应用时间序列 (1), 重构一个更高维的相空间 (2).
- 2) 计算关联函数

$$c(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(r - |Y(t_i) - Y(t_j)|),$$

其中 $|Y(t_i) - Y(t_j)|$ 表示相点 Y_i 与 Y_j 之间的距离, $\theta(z)$ 是 Heaviside 函数, 当 $z > 0$ 或 $z \leq 0$ 时, 它取值 1 或 0. 实际上, $c(r)$ 是一个累积分布函数, 它描写了相空间中的吸引子上两点之间的距离小于 r 的概率.

- 3) 对于 r 的某个适当的范围, 吸引子的维数 d 与累积分布函数 $c(r)$ 应满足对数线

性关系,或者说 $c(r)$ 是 r 的幂函数,即

$$\begin{aligned} d(m) &= \ln c(r) / \ln r \\ \text{或} \quad c(r) &= r^{d(m)}. \end{aligned} \quad (3)$$

根据上式,可由关联函数 $c(r)$ 计算出关联维数的估计值 $d(m)$.

4) 增高嵌入维数 m , 并重复计算步骤 (2) 和 (3), 直到相应的维数估计值 $d(m)$ 不再随 m 的增长发生有意义的变化 (即保持在给定的误差范围内) 为止, 亦即

$$d_x = d(m_x) \approx d(m_x + 1) \approx \dots,$$

此时得到的 d_x 即为吸引子的关联维数. Grassberger 与 Procaccia 还给出了关联维数 d 和信息维 σ 以及豪斯道夫维数 D 之间的关系, 即

$$d \leq \sigma \leq D.$$

等号在吸引子的覆盖为均匀的情况下成立.

2. 最大的李雅普诺夫指数的计算方法

本文在计算最大的李雅普诺夫指数时, 采用了文献 [6] 提供的方法, 它的主要步骤为:

1) 应用实测的时间序列重构一个高维的嵌入空间及描述相轨线的点集 (2).

2) 以初始相点 Y_0 为基点, 在点集 $\{Y_i\}$ 的其余点中选取一个与 Y_0 最近的点 $\tilde{Y}_0$ 做为端点, 构成一个初始向量, 记做 $\vec{V}_0$. 算出 $\vec{V}_0$ 的长度, 并记为 $L_0(t_0)$.

3) 令初始向量 $\vec{V}_0$ 在一个适当的时间里沿轨线向前发展, 得到一个新的向量, 我们称此新向量为发展向量, 记为 $\vec{V}_1'$, 其相应的基点和端点分别为 Y_{0+T_0} 和 $\tilde{Y}_{0+T_0}$, 其中 T_0

表示发展时间. 计算发展向量 $\vec{V}_1'$ 的长度, 记为 $L_1'(t_0 + T_0)$, 它表示相长度在 T_0 时间内由 L_0 变成了 L_1' . 如果用 λ_1 表示在此时段内相长度的指数增长率, 那么我们有

$$L_1' = L_0 e^{\lambda_1 T_0}$$

或 $\lambda_1 = \frac{1}{T_0} \log_2 (L_1' / L_0)$.

4) 以 Y_{0+T_0} 为新的基点, 选取一个新的向量来代替发展向量 $\vec{V}_1'$, 并记为 $\vec{V}_1, \vec{V}_1$ 应当具有小的长度, 并与发展向量 $\vec{V}_1'$ 保持小的夹角 (分别用 L_1 和 θ_1 表示).

5) 以 $\vec{V}_1$ 为新的初始向量, 重复步骤 3), 得到

$$\lambda_2 = \frac{1}{T_1} \log_2 (L_2' / L_1).$$

上述过程一直进行到点集 $\{Y_i\}$ 的终点, 我们取指数增长率 λ_k 的平均值作为最大的李雅普诺夫指数的估计值, 即

$$\lambda = \frac{1}{N_k} \sum_{k=1}^{N_k} \frac{1}{T_{k-1}} \log_2 (L_k' / L_{k-1}).$$

其中 N_k 表示发展的总步数, λ 的单位为 (bit/s), 表示单位时间内信息量的变化, 上述过程如图 1 所示.

6) 增加嵌入维数 m , 并重复上面的计算步骤, 直到指数的估计值随 m 保持平稳为止. 此时得到的计算结果即为所求之最大的李雅普诺夫指数.

为了得到一个好的最大的李雅普诺夫指数的估计值, 必须要求给出的观测资料的时

间序列有足够的长度,文献[6]给出了这个长度的估计范围,它大致应在 10^d 到 30^d 之间,其中 d 是吸引子的维数.

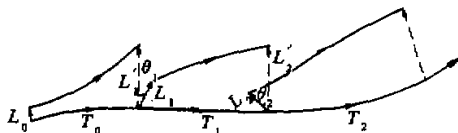


图1 最大的李雅普诺夫指数计算步骤示意图

四、结 果

对于前面给出的四个实际的向量时间序列

$$S_i^{(L)} = \{u_i^{(L)}, v_i^{(L)}, w_i^{(L)}, T_i^{(L)}\}, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, 4096; L = 1, 2, 3, 4.$$

我们重新构造四个 m 维的动力系统,它们是

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i^{(L)} = & \{u_i^{(L)}, v_i^{(L)}, w_i^{(L)}, T_i^{(L)}; u_{i+\tau}^{(L)}, v_{i+\tau}^{(L)}, w_{i+\tau}^{(L)}, T_{i+\tau}^{(L)}; \\ & \dots u_{i+(k-1)\tau}^{(L)}, v_{i+(k-1)\tau}^{(L)}, w_{i+(k-1)\tau}^{(L)}, T_{i+(k-1)\tau}^{(L)}\}, \quad (5) \\ & i = 1, 2, \dots, 4096 - (k-1)\tau; L = 1, 2, 3, 4, m = 4k. \end{aligned}$$

其中 τ 是时间滞后, L 是时间序列的标号,标号由 1 到 4 分别与资料集 D1, D2, D3 和 D4 对应.应用上节给出的算法,我们可以求出力系统(5)的关联维数和最大的李雅普诺夫指数.

1. 关联维数的估计

实际计算结果表明,动力系统(5)的关联维数的估计值对于参数 N 和 τ 有很好的收敛性,在图2中,我们给出了其中的一个算例,由图可以看出,只要 $N \geq 2048$, $\tau \geq 2$ 即可得到一个较好的维数估计值.

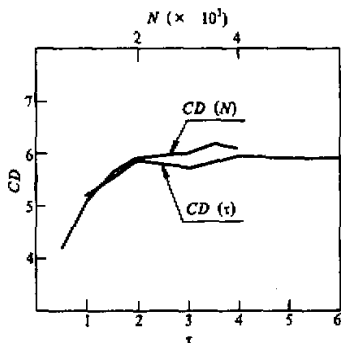


图2 动力系统 $\tilde{S}_i^{(1)}$ 的关联维数 CD 对于相点总数 N ($m=40$, $\tau=2$ 时) 和时间滞后 τ ($m=40$, $N=2048$ 时) 的依赖性

关联维数的估计值随嵌入维数 m 的变化对判断系统的性质有着重要意义,如果它收敛到一个稳定(饱和)值,则表明系统存在吸引子.如果它随 m 的增长而增长,则表明所考虑的系统是一个随机时间序列.对于动力系统(5),计算表明,它的关联维数的估计值随 m 的增长趋于稳定的数值,其结果给出在图3中,其中图3(a)~(d)是关联函数曲线,由图可以看到,在一个相当宽广的范围内 $\ln c(r)$ 线性地依赖于 $\ln r$.这说明方程(3)被很好地满足了.图3(e)表示的是关联维数的估计值随 m 的变化,我们可以看到它们稳定地趋于确定的数值.这些数值依标号 L 的次序,分别是 6.2, 7.2, 5.5 和 6.3.这表明系统(5)的维数不仅不是非整的,而且是有限的,它意味着系统至少有 6 个自由度,或者说,在我们

所考察的边界层大气系统中至少包含 6 个不同的运动尺度.

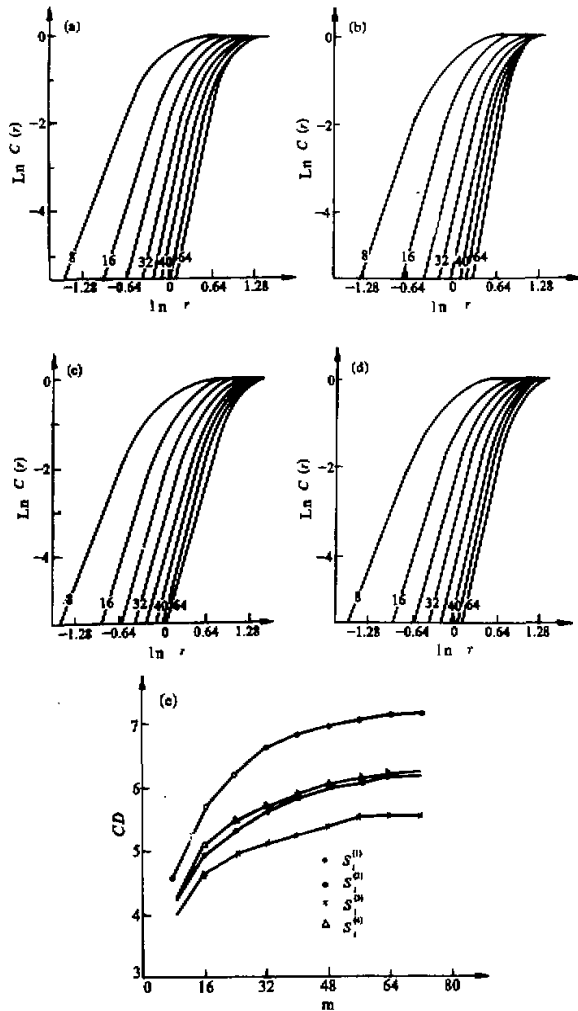


图 3 当 $N=2048$, $\tau=2$ 时, 关联维数对嵌入维数 m 的依赖性.

其中 (a), (b), (c) 和 (d) 分别是动力系统 $\tilde{S}_i^{(1)}$, $\tilde{S}_i^{(2)}$, $\tilde{S}_i^{(3)}$ 和 $\tilde{S}_i^{(4)}$ 的累积分布函数, 曲线上标出的数字为 m 的值. (e) 是关联维数的估计值随 m 的变化

另外, 从系统 $\tilde{S}_i^{(1)}$ 到 $\tilde{S}_i^{(2)}$ 和 $\tilde{S}_i^{(3)}$ 到 $\tilde{S}_i^{(4)}$ 的维数变化, 我们还看到系统的自由度的数目随着时间的推移而增加, 这表明 (就给出的算例而言) 大气的状态随时间趋于复杂化.

除了向量时间序列外, 我们还计算了由它的一个分量构成的单变量子时间序列的维数. 例如, 对于 $S_i^{(1)}$ 的子列 $\{u_i^{(1)}\}$, 它的维数 (当 N 取 4096 时) 与 $S_i^{(1)}$ 的维数 (当 N 取 2048 时) 吻合得非常好 (见图 4). 这个结果说明, 对于估计吸引子的关联维数来说, 增

加观测变量的数目与减少变量的数目而同时增加观测资料序列的总长度之间存在着某种等价性。

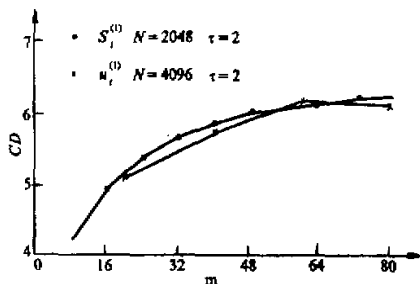


图4 向量时间序列 $S_i^{(1)}$ 与其子列 $\{u_i^{(1)}\}$ 关联维数估计值的比较

2. 最大的李雅普诺夫指数的估计

同关联维数的结果比较, 就上面的四个例子来看, 系统 (5) 的最大李雅普诺夫指数随 N 和 m 的收敛速度慢得多, 从图 5 (a) 可以看到, 在 $m \geq 120$, $N \geq 3000$ 时, 最大的李雅普诺夫指数才达到它的饱和值。此外, 我们还可以看到, 为了得到一个满意的指数估计值, 所需要的资料远小于文献 [6] 中所提出的数目 (见第三节)。从图 5 (b) 可以看到, 最大的李雅普诺夫指数的估计值随 τ 的变化是很小的, 当 τ 从 2 变到 6 时, 它的值在 0.038 到 0.042 之间摆动。

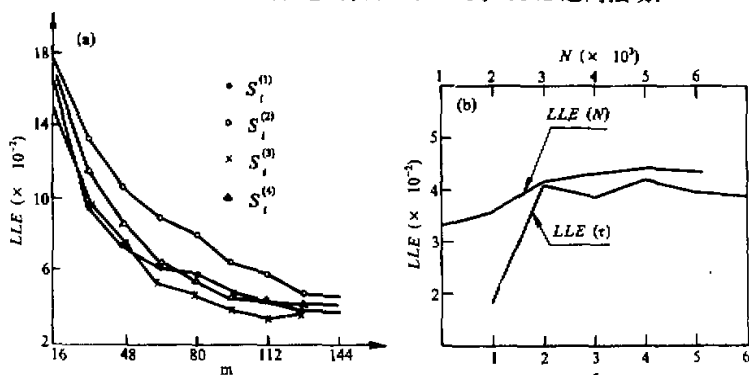


图5 最大的李氏指数估计值 (LLE) 随参数的变化。

其中 (a) 为 LLE 随 m 的变化 (当 $N=3072$, $\tau=2$ 时);

(b) 为 LLE 随 N (当 $m=128$, $\tau=2$ 时) 和随 τ (当 $m=120$, $N=3072$ 时) 的变化

动力系统 (5) 的最大的李雅普诺夫指数的饱和值被列在表 1 中, 由表可知, 四个算例的结果都是正的, 它们在 0.030 到 0.050 之间。这意味着, 任何给定的初始不确定性将随时间的增长而增长。例如, 对于第一个算例, 它的最大的李雅普诺夫为 $\lambda = 0.043$ bit/s, 如果初始观测误差为 $1/1024$, 那么, 大约在 230 秒之后, 大气的状态将成为不可预报的了。此外, 最大的李氏指数随时间的变化具有与关联维数一样的增长趋势, 这表明大气状态的可预报性将随时间的增长而降低。

表1 系统 (5) 的最大李雅普诺夫指数

系统	$S_i^{(1)}$	$S_i^{(2)}$	$S_i^{(3)}$	$S_i^{(4)}$
LLE (bit/s)	0.043	0.046	0.037	0.039

五、结 论

综上所述, 就本文所讨论的有关低层大气的四个实例而言, 我们可以得到如下一些

结论.

(1) 低层大气系统的关联维数是非整的, 最大的李氏指数是正的, 这表明低层大气运动确实存在混沌吸引子.

(2) 低层大气吸引子的关联维数在 5.5 和 7.3 之间, 这表示低层大气是一个低自由度系统, 同时也指出需要 6 个以上的变量 (或不同的运动尺度) 才能较好地描述低层大气的动力学行为.

(3) 向量时间序列同由它的一个分量组成的单变量时间序列在关联维数计算上的一致性说明, 在变量数目和资料长度之间存在某种定量关系. 这一结果可应用于观测或实验方案的设计上.

(4) 从低层大气吸引子的最大的李雅普诺夫指数, 我们可以给出低层大气未来状态预报时效的一个上限. 对于第二节中给出的资料的观测误差, 这个预报时效在 220 — 270 秒之间.

致谢: 本研究是在国家自然科学基金委员会资助下完成的. 我们对于在观测资料上给予热情帮助的周乐义副研究员表示深切的谢意.

参 考 文 献

- [1] Nicolis, C. & G. Nicolis, 1984, Is there a climatic attractor, *Nature*, **311**, 529—532.
- [2] Fraedrich, K., 1986, Estimating the Dimensions of weather and climate attractors, *J. Atmos. Sci.*, **43**, 331—344.
- [3] Fraedrich, K., 1987, Estimating weather and climate predictability on attractors, *J. Atmos. Sci.*, **44**, 722—728.
- [4] 郑祖光、刘式达, 1988, 用大气潮流资料计算 Lyapunov 指数和分维, *气象学报*, **46**, 41—48.
- [5] Grassberger, P. & I. Procaccia, 1983, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica 9D*, 189—208.
- [6] Wolf, A., J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, 1985, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica 16D*, 285—317.