

轴对称涡旋非线性运动平衡态、失稳 和突变影响因子的研究^{*}

徐 祥 德

(南京气象学院)

提 要

本文采用非线性动力系统数学模型,探讨了轴对称涡旋运动平衡态、失稳和突变现象的影响因子。提出了低涡、台风系统扰动异变现象不仅与对流加热、耗散因子相关,而且还与系统外界热量、动量的非线性平流、下垫面的感热、潜热输送结构相关。本文还导出了系统突变相关因子的临界关系式。

关键词: 非线性; 涡旋。

一、引 言

Lorenz^[1](1963)研究了旋转圆盘中的流型转换,建立了非线性动力学中混沌理论模式,70年代,Charney 和 Devore (1979)^[2]采用高截谱模式研究阻塞高压形成机制,以后国内外很多学者对大气环流非线性问题进行了探讨,并研究了大气运动的稳定性与突变现象^[3,4]。近年来,非线性理论开始用于台风发生、CISK 机制的研究^[5,6]。

本文从非线性运动相路拓扑结构理论出发,研究轴对称涡旋能量平衡态、非线性与线性稳定性结构以及涡旋运动的失稳、突变的相关因子。

本文的研究将台风、低涡系统作为“开放”系统,即在理论模型中不仅引入了下垫面(海、陆表面)潜热、感热输送,而且考虑了台风、低涡侧边界动量、热量的非线性平流因素,建立了非线性动力系统数学模型,研究低涡、台风发生、发展以及突变现象的影响因子。

二、非线性系统的数学模型

将热带气旋系统作为轴对称问题,则切向、径向运动方程、热力学方程、静力方程、连续方程如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = \left(f + \frac{v}{r}\right)v - \frac{\partial \varphi}{\partial r} + F_r, \quad (1)$$

1988年12月6日收到,1989年7月10日收到再改稿。

^{*} 国家气象局气象科学基金台风课题资助项目。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = - \left(f + \frac{v}{r} \right) u + F_z, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = - \frac{RT}{p}, \quad (3)$$

$$C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right) = \alpha \omega + g \frac{\partial}{\partial p} (Q_s + Q_q) + Q^*, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} = - \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (5)$$

式中

$$\begin{pmatrix} Q_s \\ Q_q \\ Q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho C_D C_p (T_s - T_0) v \\ \rho C_D C_p (q_s - q_0) v \\ -L \frac{dq}{dt} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中 Q_s, Q_q, Q^* 为海-气或地-气界面的感热、潜热通量以及积云对流潜热释放加热量; α 为比容; C_D 是曳力系数; T_s, q_s 为海水(地)表层温度和比湿; T_0, q_0 为海面(地面)气温和比湿; v 是地面层风速, 可写为

$$v = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}. \quad (7)$$

利用连续方程(5)及静力方程(3), 并对圆柱台风、低涡区域积分, 则与台风系统能量平衡有关的动能方程、热力学方程积分形式如下:

$$\begin{aligned} \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r_*} \frac{\partial k}{\partial t} 2\pi r dr dp = & - \int_{P_T}^{P_0} [u k]_{r_*} 2\pi r dr - \int_{P_T}^{P_0} [u \varphi]_{r_*} 2\pi r dr \\ & - \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r_*} \alpha \omega r 2\pi dr dp + \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r_*} (u F_r + v F_z) 2\pi r dr dp, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r_*} \frac{\partial H^*}{\partial t} 2\pi r dr dp = & - \int_{P_T}^{P_0} [u H^*]_{r_*} 2\pi r dr + \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r_*} \alpha \omega r 2\pi dr dp \\ & + \pi r_*^2 (Q_s - Q_q) + \tilde{Q}^*, \quad (9) \end{aligned}$$

式中台风系统区域取半径 r_* , 上下底分别为 P_T, P_0 等压面的圆柱体,

$$\begin{pmatrix} K \\ H^* \\ \tilde{Q}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \\ C_p T \\ \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r_*} Q^* 2\pi r dr dp \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Palmen 和 Riehl (1957) 估计台风潜热释放量中供动能生成占 3% 左右, 符合一般能量转换关系, 因此, 台风暖心结构的力管环流是台风动能供应的重要途径. 方程(8)与(9), 通过斜压位能转换成动能项产生了联系, 反映了暖心结构的斜压力管位能转换

成台风动能的机制。

本文试图建立低涡、台风扰动振幅时间变量的非线性控制方程, 各物理量采用时空分离形式, 且引入有关连续方程、静力方程的各变量制约关系。

假设

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ T \\ \varphi \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \tilde{u}(r, p) \\ X(t) \tilde{v}(r, p) \\ X(t) \tilde{\omega}(r, p) \\ Y(t) \tilde{T}(r, p) \\ Y(t) \tilde{\varphi}(r, p) \\ a^* X(t) v_0(r, p) \end{pmatrix} \quad (11)$$

将假设(11)代入方程(8)、(9), 可得如下非线性动力系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -\alpha X^2(t) - \beta Y(t) + \gamma, \\ \dot{Y}(t) = -\delta X(t) Y(t) + \varepsilon X(t) + Q', \end{cases} \quad (\alpha \neq 0, \delta \neq 0) \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = \int_{P_T}^{P_0} [\tilde{u} \tilde{k}]_{,r} r dr dp / \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} \tilde{k} r dr dp, \\ \beta = \left(\int_{P_T}^{P_0} [\tilde{u} \tilde{\varphi}]_{,r} r dr dp + \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} \frac{R \tilde{T} \tilde{\omega}}{p} r dr dp \right) / \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} \tilde{k} r dr dp, \\ \gamma = \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} (\tilde{u} F_r + \tilde{v} F_\theta) r dr dp / \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} \tilde{k} r dr dp, \\ \delta = \left(\int_{P_T}^{P_0} [\tilde{u} \tilde{H}^*]_{,r} r dr dp - \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} \frac{R \tilde{T} \tilde{\omega}}{p} r dr dp \right) / \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} \tilde{H}^* r dr dp, \\ \varepsilon = \frac{a^*}{2} \tilde{v}_0 \{ r^2 C_D C_p \rho [(T_s - T_0) + (q_s - q_0)] \} / \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} \tilde{H}^* r dr dp, \\ Q' = \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} Q^* r dr dp / \int_{P_T}^{P_0} \int_0^{r^*} \tilde{H}^* r dr dp. \end{cases} \quad (13)$$

方程组(12)构成了非线性动力系统, 此方程组的第一、第二式彼此并非独立, 它们通过参数 β 、 δ 中的斜压位能转换项, 两者构成了相互影响、彼此依赖的关系(见(13)式中 β 、 δ 参数表达式), 这特征与台风 CISK 理论中暖心结构的斜压力管位能转换成扰动动能的重要机制相关, 方程(12)反映了台风发展的动力、热力因素相互影响与制约的关系。

另外, 动力系统(12)中有关参数 α 、 δ 的项为非线性形式, 其包含了侧边界动能、热量的收支因素, 反映了台风、低涡作为“开放”系统周界非线性平流作用。Riehl 等对台风 Daisy 环状区域计算结果表明, 台风系统所耗散的动能, 有相当部分是经过周界由台风以外区域输入的, 本文的动力系统(12)也包括了上述环境场的动力、热力非线性作用因素。 β 参数以及 ε 、 Q' 参数分别反映了动能制造项以及海(陆)-气界面感热、潜热

通量因子, 即强迫源的效应, r 参数为摩擦耗散项, 因此系统(12)中的 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, Q'$ 为与系统能量平衡结构相关的系数, 它们构成的项与动力系统状态的关系呈线性或非线性的影响特征. 它们相互配置的差异可改变系统演变的相路拓扑结构, 甚至导致系统平衡态的失稳与突变现象.

三、线性系统相路特征

若假设台风、低涡系统侧边界动量、热量平流因子为线性形式, 即环境流场为定常状态($\bar{u}$), 且斜压位能与动能转换项中比容亦为定常值($\bar{\alpha}$), 则动力系统(12)成为线性结构.

由线性动力系统讨论可知, 台风边界动量、热量的收支对其稳定性结构特征有显著影响, 呈“开放”体系特征. 线性动力系统稳定性结构与动量、热量输送的合成效应相关, 例如, 若高层流失大量热量, 而低层存在动量的强辐合带, 仍可维持系统的发展. 而观测事实也表明, 台风发展初期往往与低层强辐合场相联系.

考察线性动力系统相路拓扑结构发现, 只要系统存在动能制造和感热输送, 系统总是以结点曲线方式偏离平衡态. 这说明台风发展对于感热项十分敏感. 另外, 若台风移到冷洋面, 且侧边界能量收支项较弱, 则系统可能以螺旋曲线形式趋于平衡态, 即扰动强度逐渐减弱, 判别方法同文献[7,8].

四、非线性平衡态

上述非线性动力系统(12)的平衡态为

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = 0, \quad (14)$$

即

$$\begin{cases} -\alpha X^2 - \beta Y + \gamma = 0, \\ -\delta XY + \varepsilon X + Q' = 0. \end{cases} \quad (\alpha \neq 0, \delta \neq 0) \quad (15)$$

经整理, 可得一元三次方程

$$X^3 + \frac{\varepsilon\beta - \delta\gamma}{\alpha\delta} X + \frac{Q'\beta}{\alpha\delta} = 0. \quad (16)$$

方程(16)可化为如下形式:

$$X^3 + \tilde{P}X + \tilde{q} = 0, \quad (17)$$

式中

$$\tilde{P} = \frac{\varepsilon\beta - \delta\gamma}{\alpha\delta}, \quad \tilde{q} = \frac{Q'\beta}{\alpha\delta}. \quad (18)$$

求解方程(17), 可得非线性系统(12)的平衡点为

$$\begin{cases} X_1 = \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{P}^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{P}^3}{27}}}, \\ X_2 = \omega_1 \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{P}^3}{27}}} + \omega_1^2 \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{P}^3}{27}}}, \\ X_3 = \omega_1^2 \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{P}^3}{27}}} + \omega_1 \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{P}^3}{27}}}, \end{cases} \quad (19)$$

式中 $\omega_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$.

为了简化问题, 在非线系统 (12) 中, 略去参数 Q' , 则方程 (12) 可写为

$$\begin{cases} \dot{X} = -\alpha X^2 - \beta Y + \gamma = P(X, Y, \alpha, \beta, \gamma), \\ \dot{Y} = -\delta XY + \varepsilon X = Q(X, Y, \delta, \varepsilon). \end{cases} \quad (20)$$

由方程 (20) 可解得三个平衡点 (X_i, Y_i) ($i=1, 2, 3$)

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \\ (X_2, Y_2) \\ (X_3, Y_3) \end{cases} = \begin{cases} (0, \frac{\gamma}{\beta}) \\ \left(\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right) \frac{1}{\alpha}}, \frac{\varepsilon}{\delta} \right) \\ \left(-\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right) \frac{1}{\alpha}}, \frac{\varepsilon}{\delta} \right) \end{cases}. \quad (21)$$

由非线性系统控制方程的解 (19)、(21) 式可知, 台风、低涡系统运动的平衡态与系统能量平衡结构、非绝热热源、强迫耗散因子相关, 而且系统侧边界动量、热量输送以及感热、潜热湍流输送均对台风系统平衡态有显著影响.

五、系统突变现象的相关因子

若考虑非线性动力系统 (12) 的突变特征以及相关因子, 根据一元三次代数方程的性质, 动力系统 (12) 平衡态随外源特征参数 $\tilde{q}$ 、 $\tilde{p}$ 的变化状态呈曲面形式 (图 1 所示), 且特征参数 $\tilde{q}$ 、 $\tilde{p}$ 与上述诸因素相关, 即与台风、低涡系统侧边界动量、热量输送, 下垫面感热、潜热输送及积云潜热释放等非绝热因素相关,

$$\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(Q', \beta, \alpha, \delta), \\ \tilde{p} = \tilde{p}(\varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha), \end{cases} \quad (22)$$

由图 1 可见, 平衡态 X 曲面具有折叠特征, 图上显示出折叠区域在 $\tilde{p}$ 、 $\tilde{q}$ 平面上的投影. 对于方程 (17), 若

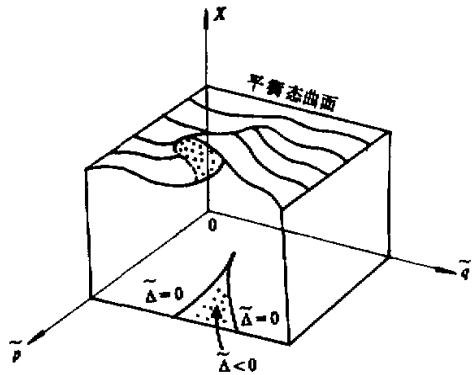


图 1 平衡态曲面

$$\tilde{\Delta} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0, \text{ 则解 } X \text{ 有 } \begin{cases} \text{一个实根, 一对共轭复根} \\ \text{三个实根, 二根重合} \\ \text{三个不同实根} \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$\tilde{\Delta} = \left(\frac{\tilde{q}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{p}}{3} \right)^3 = \left(\frac{Q'\beta}{2\alpha\delta} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon\beta - \delta\gamma}{3\alpha\delta} \right)^3. \quad (24)$$

如图 1 所示, 在 $\tilde{\Delta} \leq 0$ 区域内, X 曲面具有折叠特征, 台风、低涡系统动力、热力

以及非绝热因素发生变化, 即 $\tilde{p}$ 、 $\tilde{q}$ 参数也相应改变, 在外源状态特征参数变动过程中, X 值就沿着平衡态曲面变化, 有可能从曲面某一页进入折叠多值区, 一旦移出时, 就会发生突变现象, 即此时 X 值急速从某一页跳跃到另一页, 引起台风系统扰动状态的急剧变化。

由(24)式可知, 对应于 $\tilde{\Delta} \leq 0$ 区域, 即 X 曲面折叠特征区, 台风系统动力、热力因素的相互配置关系需满足如下关系:

$$\left(\frac{Q'\beta}{2\alpha\delta} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon\beta - \delta\gamma}{3\alpha\delta} \right)^3 \leq 0, \quad (25)$$

即

$$Q'^2 \geq \frac{4}{27\beta^2} \frac{(\varepsilon\beta - \delta\gamma)^3}{\alpha\delta}. \quad (26)$$

凝结潜热因子 Q' 可写为

$$Q' \propto -L_c \left(\vec{v}_h \cdot \nabla q_s + \omega \frac{\partial q_s}{\partial p} \right), \quad (27)$$

由上式可知, 台风系统水汽积累越显著, Q' 值越大, 越易满足(26)式, 就可能出现系统突变现象。

另外, 若略去对流加热有关项 Q' , 则可能产生突变的条件为

$$\frac{(\varepsilon\beta - \delta\gamma)^3}{\alpha\delta} \leq 0. \quad (28)$$

对于初始弱涡旋, 可不考虑凝结释放潜热因子 ($Q' \approx 0$); $r < 0$ (摩擦耗散项), $\beta < 0$ 系统动能制造; $\varepsilon > 0$ 感热输送为正; 若系统侧边界动量、热量输入, 即 $\alpha < 0$, $\delta < 0$, 则可使(28)式成立, 满足 $\tilde{\Delta} \leq 0$ 的条件, 于是系统可能出现突变现象, 引起初始弱涡旋的突然发展。

另外, 若侧边界动量、热量为支出情况 ($\alpha > 0$, $\delta > 0$), 当下垫面(洋面)有较强的感热输送, ε 正值大, 也会满足(28)式, 使平衡态曲面的折叠区存在, 系统也可能发生突变现象, 否则就不可能出现。

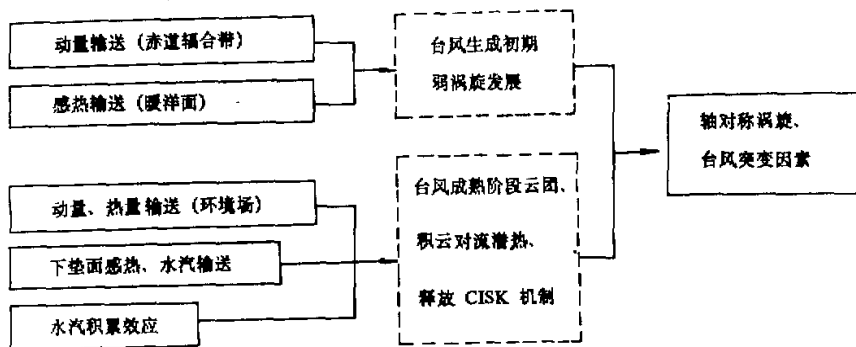


图2 突变影响因子的动力、热力机制框图

由(28)式可见, 动量、热量在周界流入、流出的配置方式差异对于系统是否可能存在“折叠区”有明显影响, 若动量输出 ($\alpha > 0$), 热量流入 ($\delta < 0$), 只要感热为正值或

零, (28)式总不成立, 因此 α, δ 这种配置形式, 系统不可能出现突变, 反之热量输出, 动量输入, 其它因素状态相同, 则会使(28)式成立, 有突变特征的可能性.

由上述讨论可知, 对于台风初期弱涡旋之突然发展, 流场辐合因素与感热、潜热输送是两个重要环节, 这与台风突然生成于暖洋面与赤道辐合带区域密切相关, 见图 2.

六、非线性系统稳定性结构

将方程 (20) 作平移变换

$$\begin{cases} \zeta = X - X_i, \\ \eta = Y - Y_i, \end{cases} \quad (29)$$

其中 (X_i, Y_i) 为平衡点位置, 则非线性系统 (20) 的线性近似方程可写为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p(X_i, Y_i)}{\partial x} & \frac{\partial p(X_i, Y_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(X_i, Y_i)}{\partial x} & \frac{\partial Q(X_i, Y_i)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (30)$$

即

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X_i\alpha & -\beta \\ -Y_i\delta + \varepsilon & -X_i\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中 (X_i, Y_i) ($i=1, 2, 3$) 分别为三个平衡点 $\left(0, \frac{\gamma}{\beta}\right), \left(\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)} \frac{1}{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\delta}\right), \left(-\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)} \frac{1}{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\delta}\right)$.

上面三个平衡点相应的线性近似方程(31)的特征根方程为

$$\det(A_1 - \lambda_1 E) = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & -\beta \\ -\frac{\gamma\delta}{\beta} + \varepsilon & -\lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (32)$$

$$\det(A_2 - \lambda_2 E) = \begin{vmatrix} -2\alpha\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)} \frac{1}{\alpha} & -\lambda_2 & -\beta \\ 0 & -\delta\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)} \frac{1}{\alpha} & -\lambda_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (33)$$

$$\det(A_3 - \lambda_3 E) = \begin{vmatrix} 2\alpha\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)} \frac{1}{\alpha} & -\lambda_3 & -\beta \\ 0 & \delta\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)} \frac{1}{\alpha} & -\lambda_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

设方程(32)–(34)的特征根为 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ ($i=1, 2, 3$), 则可使方程(31)得如下对角化形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (i=1, 2, 3) \quad (35)$$

即

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$\text{其中 } \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, 3).$$

将方程(35)变换为如下形式:

$$\frac{1}{2} \frac{dR_i}{dt} = \lambda_{i1}\zeta^2 + \lambda_{i2}\eta^2 = \tilde{\varphi}(\zeta, \eta), \quad (37)$$

其中 $R_i = \zeta^2 + \eta^2$ ($i=1, 2, 3$).

函数 R_i 随 t 演变特征与特征根 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ 相关, 即可根据参数 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ 讨论非线性系统在各平衡点 (X_i, Y_i) 的稳定性问题.

显然对于 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ 为实特征根, 线性近似方程在平衡点 (X_i, Y_i) 的稳定性分为四类情况:

- (i) $0 < \lambda_{i1} < \lambda_{i2}$, $\frac{dR_i}{dt} > 0$, (X_i, Y_i) 是不稳定平衡点;
- (ii) $0 = \lambda_{i1} = \lambda_{i2}$, $\frac{dR_i}{dt} = 0$, (X_i, Y_i) 是稳定平衡点;
- (iii) $0 > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$, $\frac{dR_i}{dt} < 0$, (X_i, Y_i) 是稳定平衡点;
- (iv) $\lambda_{i1} < 0 < \lambda_{i2}$, $\frac{d^2R_i}{dt^2} > 0$, (X_i, Y_i) 是不稳定平衡点.

下面我们考察台风动力系统的稳定性结构问题.

由特征根方程(32)可得

$$\lambda_i^2 = \gamma\delta - \beta\varepsilon \quad (39)$$

若 $\delta < 0$, $\gamma < 0$ 以及 $\varepsilon > 0$, $\beta < 0$ 方程(32)有两不等实根, 且 $\lambda_{i1} < 0 < \lambda_{i2}$, 这符合(38)式第四类情况, 如图3所示, 存在 $(0, 0) = (\zeta, \eta)$ 的一个邻域 S , S 被在原点相交曲线 $\tilde{\varphi}(\zeta, \eta) = 0$ 分成四个区域, 左右两区域中 $\tilde{\varphi}(\zeta, \eta) < 0$; 上下两区域中 $\tilde{\varphi}(\zeta, \eta) > 0$.

若将(37)式左端 $\frac{dR_i}{dt}$ 对 t 微商, 可得

$$\frac{1}{4} \frac{d^2R_i}{dt^2} = \lambda_{i1}^2\zeta^2 + \lambda_{i2}^2\eta^2 = \tilde{\varphi}_*(\zeta, \eta), \quad (40)$$

这里 $\lambda_{i1}^2 > 0$, $\lambda_{i2}^2 > 0$, 因此非原点 $\tilde{\varphi}_*(\zeta, \eta) > 0$, 平衡点 $\left(0, \frac{\gamma}{\beta}\right)$ 成为非线性系统(1.2)

的鞍点不稳定平衡点(图3所示).

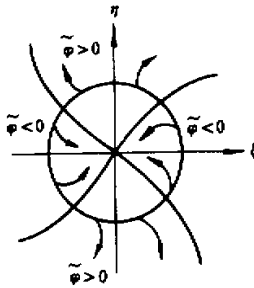


图3 不稳定平衡点(鞍点)

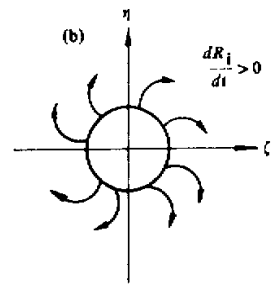
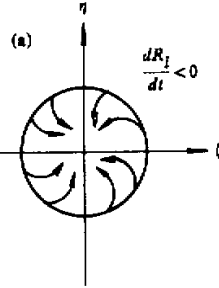


图4 稳定平衡点(汇点)(a)与不稳定平衡点(源点)(b)

由特征方程(33)、(34)可知,若 $\alpha < 0$, $\delta < 0$,且 $-\varepsilon\beta + \gamma\delta > 0$, $(\lambda_{21}, \lambda_{22})$ 为两不等实根,且 $\lambda_{21} > \lambda_{22} > 0$,则 $\frac{dR_2}{dt} > 0$,由此可见,平衡点 $\left(\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)\frac{1}{\alpha}}, \frac{\varepsilon}{\delta}\right)$ 为不稳定平衡点(源点),而另一平衡点 $\left(-\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)\frac{1}{\alpha}}, \frac{\varepsilon}{\delta}\right)$ 却为稳定平衡点(汇点),上述两类情况可见图4(a)、(b)。

若 $\alpha < 0$, $\delta > 0$,即系统边界输入动量,但流入冷空气,且 $-\varepsilon\beta + \gamma\delta < 0$,特征根方程(33)、(34)均有两不等实根 $(\lambda_{21}, \lambda_{22})$, $(\lambda_{31}, \lambda_{32})$,且 $\lambda_{21} < 0 < \lambda_{22}$, $\lambda_{31} < 0 < \lambda_{32}$,

则 $\frac{d^2R_2}{dt^2} > 0$, $\frac{d^2R_3}{dt^2} > 0$,因此两平衡点 $\left(\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)\frac{1}{\alpha}}, \frac{\varepsilon}{\delta}\right)$,
 $\left(-\sqrt{\left(-\frac{\varepsilon\beta}{\delta} + \gamma\right)\frac{1}{\alpha}}, \frac{\varepsilon}{\delta}\right)$ 均为不稳定平衡点(鞍点)(图3所示)。若系数矩阵 $\tilde{A}$

有复特征也可作类似讨论, $\tilde{A}$ 为重特征值,上述圆域 $\zeta^2 + \eta^2$ 可改为椭圆域,这里不作详细讨论。

上述讨论可见,台风、低涡系统的平衡态稳定性结构与系统侧边界非线性平流、下垫面强迫热源、摩擦耗散因子密切相关,这些外源状态变化对于台风、低涡系统的发展、衰弱起着关键的影响效应,其不仅可以改变系统稳定性特征,而且可能导致系统突变现象的发生。

参 考 文 献

- [1] Lorenz, E. N., 1963 Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130—141.
- [2] Charney, J. G. & Devore, J. G., 1979, Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking, *J. Atmos. Sci.*, **36**(7), 1205—1216.
- [3] 柳崇键、陶诗言, 1983, 副高北跳与月尖突变, *中国科学(B)*, 第5期, 474—483.
- [4] 李崇银, 1986, 大气大尺度水平运动的稳定性, *大气科学*, 第10卷第3期, 240—249.

- [5] 杨大升、丁敏芳, 1985, 台风发生非线性动力机制, 台风会议文集, 气象出版社, 231 — 243.
- [6] 伍荣生, 1987, CISK 理论中的若干问题, 气象学报, 第45 卷第2 期, 131 — 139.
- [7] 张锦炎, 1981, 常微分方程几何理论与分支问题, 北京大学出版社, 1 — 75.
- [8] 徐祥德, 1987, 天气尺度系统稳定性结构、相路特征的分岔及热源时间振荡影响问题的探讨, 气象学报, 第45 卷第2 期, 140 — 149.

STUDY ON INFLUENCE FACTORS OF EQUILIBRIA, DESTABLIZATION AND CATASTROPHE OF NONLINEAR MOVEMENT OF AXISYMMETRIC VORTEX

Xu Xiangde

(*Nanjing Institute of Meteorology*)

Abstract

By using a mathematical model of nonlinear dynamic system, the influence factors of equilibria, destablization and catastrophe in nonlinear movement of the axisymmetric vortex are discussed.

The result shows that anomalous developments of vortices and tropical cyclones are related not only to convection and dissipation, but also to nonlinear advection of momentum, thermal flux through the lateral boundary of systems and transfer structures of sensible and latent heats on underlying surface.

Key words: Nonlinear ; Vortex.