

N 层模式大气中的斜压孤立 Rossby 波

吕克利

(南京大学大气科学系)

提 要

文中导得了 N 层模式的 KdV 方程, 作为例子计算了三层模式的孤立 Rossby 波流型. 基本气流的垂直切变、水平切变和 Froude 数对孤波流型都有重要影响; 不同模态的孤波具有不同流型, 不同高度位面上的孤波流型一般是不同的.

关键词: N 层模式; KdV 方程; 孤立波.

一、引 言

Redekopp^[1] 和 Redekopp 与 Weidman^[2] 利用连续模式讨论了孤立 Rossby 波, 指出基流的水平切变是孤波存在的必要条件, 并给出了两种基本孤波流型. Hukuda^[3] 利用两层模式讨论了同一问题, 指出垂直切变的重要性. 但是两层模式只能给出基流简单的线性垂直变化, 多层模式能更好地拟合实际的基本气流, 更好地反映大气的实际斜压性. 本文把 Hukuda 的两层模式推广到 N 层模式, 进而讨论基本气流的垂直切变和水平切变对孤立 Rossby 波的影响, 以及它们对多层模式中的正压模态和斜压模态的作用, 还将给出不同高度位面上的孤波流型. 关于 N 层模式中地形的作用, 我们将另文讨论.

二、KdV 方程的导出

由 l 位面上的涡度方程和 $l+1/2$ 位面上的热流量方程消去 ω , 利用上、下边界上 $\omega=0$ 的条件, 并引入尺度

$$\psi = LV\psi', \quad t = \frac{L}{V}t', \quad (x, y) = L(x', y'), \quad \beta = \frac{V}{L^2}\beta'.$$

无因次化, 得到各位面上的位涡度方程为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} [\nabla^2 \psi'_1 + Fr(\psi'_2 - \psi'_1)] + J[\psi'_1, \nabla^2 \psi'_1 + \beta' y' + Fr(\psi'_2 - \psi'_1)] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t'} [\nabla^2 \psi'_i + Fr(\psi'_{i+1} - 2\psi'_i + \psi'_{i-1})] + J[\psi'_i, \nabla^2 \psi'_i + \beta' y' &+ Fr(\psi'_{i+1} - 2\psi'_i + \psi'_{i-1})] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t'} [\nabla^2 \psi'_N - Fr(\psi'_N - \psi'_{N-1})] + J[\psi'_N, \nabla^2 \psi'_N + \beta' y' - Fr(\psi'_N - \psi'_{N-1})] &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$
$$(l = 2, 3, \dots, N-1)$$

1989年4月10日收到, 1990年3月8日收到再改稿.

式中 $Fr = f^2 L^2 / \sigma \Delta p^2$ 是内旋转 Froude 数.

边界条件取

$$\frac{\partial \psi_l'}{\partial x'} = 0, \quad y' = 0, 1, \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

与 Clarke^[4] 一样, 考虑恒定波的形式解, 即设

$$\psi_l' = \psi_l'(x' - ct', y'), \quad (3)$$

在这一假定下, 可得到形式上不随时间变化的 KdV 方程和恒定的孤立波, 如要考虑孤立波的演变, 则不作这一假定. 在多层模式中, 这时的 KdV 方程为 (见附录)

$$c_1 E_1 \frac{dA}{d\xi} + E_2 A \frac{dA}{d\xi} + E_3 \frac{d^3 A}{d\xi^3} = 0, \quad (4)$$

式中

$$\begin{cases} E_1 = \int_0^1 \sum_{l=1}^N \frac{\Phi_l^2}{\bar{u}_l - c_0} M_l(y) dy, \\ E_2 = - \int_0^1 \sum_{l=1}^N \frac{\Phi_l^3}{\bar{u}_l - c_0} \frac{d}{dy} M_l(y) dy, \\ E_3 = \int_0^1 \sum_{l=1}^N \Phi_l^2 dy. \end{cases} \quad (5)$$

(4) 式在 $\xi \rightarrow \pm \infty$ 时 $A \rightarrow 0$ 的特解是孤立子解, 即

$$A(\xi) = \text{sgn}(E_2 E_3) \text{sech}^2(\mu \xi), \quad (6)$$

式中

$$\mu = \left| \frac{E_2}{12 E_3} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

表示孤立 Rossby 波的陡度.

三、弱水平切变气流下的孤立 Rossby 波

为简单起见, 各层基本气流取为

$$\bar{u}_l = \bar{u}_0 + S_l \bar{u}_s + \delta k y, \quad (8)$$

S_l 表征基流的垂直切变, 取为常值, $\bar{u}_0$, $\bar{u}_s$ 都取为常数, k 取为 +1 或 -1, $\delta \ll 1$, 是表征基流弱水平切变强度的小参数.

变量 Φ 和参数 c_0 用小参数 δ 展开:

$$\begin{aligned} \Phi_l &= \Phi_l^{(0)} + \delta \Phi_l^{(1)} + \delta^2 \Phi_l^{(2)} + \dots, \\ c_0 &= c_{00} + \delta c_{01} + \delta^2 c_{02} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

代入 (A7)、(A8) 式, 得零阶定解问题为

$$\left\{ \begin{aligned} & (\bar{u}_0 + s_1 \bar{u}_s - c_{00}) \left[\frac{d^2 \Phi^{(0)}_1}{dy^2} + Fr (\Phi^{(0)}_2 - \Phi^{(0)}_1) \right] + [\beta + Fr \bar{u}_s (s_1 - s_2)] \Phi^{(0)}_1 = 0, \\ & (\bar{u}_0 + s_l \bar{u}_s - c_{00}) \left[\frac{d^2 \Phi^{(0)}_l}{dy^2} + Fr (\Phi^{(0)}_{l+1} - 2\Phi^{(0)}_l + \Phi^{(0)}_{l-1}) \right] + [\beta - Fr \bar{u}_s (s_{l-1} - 2s_l \\ & \quad + s_{l+1})] \Phi^{(0)}_l = 0, \\ & (\bar{u}_0 + s_N \bar{u}_s - c_{00}) \left[\frac{d^2 \Phi^{(0)}_N}{dy^2} - Fr (\Phi^{(0)}_N - \Phi^{(0)}_{N-1}) \right] + [\beta + Fr \bar{u}_s (s_N - s_{N-1})] \Phi^{(0)}_N = 0, \\ & \Phi^{(0)}_1 = \Phi^{(0)}_2 = \dots = \Phi^{(0)}_N = 0, \quad y = 0, 1. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

一阶定解问题为

$$\left\{ \begin{aligned} & (\bar{u}_0 + s_1 \bar{u}_s - c_{00}) \left[\frac{d^2 \Phi^{(1)}_1}{dy^2} + Fr (\Phi^{(1)}_2 - \Phi^{(1)}_1) \right] + [\beta + Fr \bar{u}_s (s_1 - s_2)] \Phi^{(1)}_1 \\ & \quad = (c_{01} - ky) \left[\frac{d^2 \Phi^{(0)}_1}{dy^2} + Fr (\Phi^{(0)}_2 - \Phi^{(0)}_1) \right], \\ & (\bar{u}_0 + s_l \bar{u}_s - c_{00}) \left[\frac{d^2 \Phi^{(1)}_l}{dy^2} + Fr (\Phi^{(1)}_{l+1} - 2\Phi^{(1)}_l + \Phi^{(1)}_{l-1}) \right] + [\beta - Fr \bar{u}_s (s_{l-1} - 2s_l \\ & \quad + s_{l+1})] \Phi^{(1)}_l = (c_{01} - ky) \left[\frac{d^2 \Phi^{(0)}_l}{dy^2} + Fr (\Phi^{(0)}_{l+1} - 2\Phi^{(0)}_l + \Phi^{(0)}_{l-1}) \right], \\ & (\bar{u}_0 + s_N \bar{u}_s - c_{00}) \left[\frac{d^2 \Phi^{(1)}_N}{dy^2} - Fr (\Phi^{(1)}_N - \Phi^{(1)}_{N-1}) \right] + [\beta + Fr \bar{u}_s (s_N - s_{N-1})] \Phi^{(1)}_N \\ & \quad = (c_{01} - ky) \left[\frac{d^2 \Phi^{(0)}_N}{dy^2} - Fr (\Phi^{(0)}_N - \Phi^{(0)}_{N-1}) \right], \\ & \Phi^{(1)}_1 = \Phi^{(1)}_2 = \dots = \Phi^{(1)}_N = 0, \quad y = 0, 1. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

(10) 式的解可写为

$$\Phi^{(0)}_l = A_l \sin m \pi y \quad (12)$$

代入 (10) 式, 得到

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[m^2 \pi^2 + Fr - \frac{\beta + Fr \bar{u}_s (s_1 - s_2)}{\bar{u}_0 + s_1 \bar{u}_s - c_{00}} \right] A_1 - Fr A_2 = 0, \\ & Fr A_{l-1} - \left[m^2 \pi^2 + 2Fr - \frac{\beta - Fr \bar{u}_s (s_{l-1} - 2s_l + s_{l+1})}{\bar{u}_0 + s_l \bar{u}_s - c_{00}} \right] A_l + Fr A_{l+1} = 0, \\ & Fr A_{N-1} - \left[m^2 \pi^2 + Fr - \frac{\beta + Fr \bar{u}_s (s_N - s_{N-1})}{\bar{u}_0 + s_N \bar{u}_s - c_{00}} \right] A_N = 0. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

由 A_i 有非零解, 可得到关于 $\bar{u}_0 - c_{00}$ 的 N 次代数方程. Pedlosky^[1] 指出, 这 N 次代数方程决定 N 个 Rossby 波模态, 其中一个为正压模态, 其余 $N-1$ 个是斜压模态.

为下面运算方便, 令 $\gamma_i = A_i / A_1$, 由 (13) 式得

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1, \\ \gamma_2 = \frac{m^2 \pi^2 + Fr}{Fr} - \frac{\beta + Fr \bar{u}_1 (s_1 - s_2)}{Fr (\bar{u}_0 + s_1 \bar{u}_s - c_{00})}, \\ \gamma_{i-1} = \left[\frac{m^2 \pi^2 + 2Fr}{Fr} - \frac{\beta - Fr \bar{u}_i (s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1})}{Fr (\bar{u}_0 + s_i \bar{u}_s - c_{00})} \right] \gamma_i - \gamma_{i+1}, \\ \gamma_N = \gamma_{N-1} / \lambda, \end{cases} \quad (14)$$

式中, $\lambda = (m^2 \pi^2 + Fr) / Fr + (\beta + Fr \bar{u}_s (s_N - s_{N-1})) / (\bar{u}_0 + s_N \bar{u}_s - c_{00}) Fr$.

由一阶问题 (11) 的可解性条件, 容易得到

$$c_{01} = k/2$$

再由 (11) 式的非齐次项函数形式, 显见 (11) 式的解可设为

$$\Phi_i^{(1)} = a_i(y) \sin m\pi y + b_i(y) \cos m\pi y. \quad (15)$$

代入 (11) 式, 得

$$\begin{cases} a_i(y) = (Ek\gamma_i / 4m^2\pi^2 \sum_{i=1}^N \gamma_i^2) y, \\ b_i(y) = (Ek\gamma_i / 4m\pi \sum_{i=1}^N \gamma_i^2) (y - y^2). \end{cases} \quad (16)$$

经过简单的积分运算, 由 (5) 式得到 KdV 方程 (4) 的系数近似式为

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\gamma_i^2 \beta_i}{U_i^2} \right) + \frac{\delta Ek}{8m\pi \sum_{i=1}^N \gamma_i^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\gamma_i^2 \beta_i}{U_i^2} \right), \\ E_2 = \frac{4\delta k}{3m\pi} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\gamma_i^3 \beta_i}{U_i^3} \right) + \frac{\delta^2 Ek^2}{2m^3 \pi^3 \sum_{i=1}^N \gamma_i^2}, \quad m \text{ 为奇数.} \\ E_2 = -\frac{5E\delta^2 k^2}{6m^3 \pi^3 \sum_{i=1}^N \gamma_i^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\gamma_i^3 \beta_i}{U_i^3} \right) + \frac{2\delta^2 k^2}{m\pi} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\gamma_i^3 \beta_i}{U_i^3} \right), \\ \quad m \text{ 为偶数.} \\ E_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma_i^2 + \frac{\delta Ek}{8m^2 \pi^2}, \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\gamma_i^2 \beta_i}{U_i^2} \right),$$

$$U_i = \bar{u}_0 + s_i \bar{u}_s - c_{00},$$

$$\bar{\beta}_i = \beta + Fr(s_1 - s_2) \bar{u}_s,$$

$$\beta_i = \beta - Fr(s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1})\bar{u}_s,$$

$$\beta_N = \beta - Fr(s_{N-1} - s_N)\bar{u}_s.$$

现在可由下式计算各层孤立 Rossby 波流型:

$$\psi_l(\xi, y) = - \int_0^y \bar{u}_l(y) dy + \varepsilon \operatorname{sgn}(E_2 E_3) \operatorname{sech}^2 \left(\left| \frac{E_2}{12E_3} \right|^{\frac{1}{2}} \xi \right) (\Phi_l^{(10)} + \delta \Phi_l^{(11)}),$$

$$(l=1, \dots, N) \quad (18)$$

四、例 子

为计算简单并能反映出基流的垂直切变变化, 我们取三层模式为例进行计算. 基流取为

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{u}_0 + s_1 \bar{u}_s + \delta ky, \\ \bar{u}_2 = \bar{u}_0 + s_2 \bar{u}_s + \delta ky, \\ \bar{u}_3 = \bar{u}_0 + \delta ky, \end{cases}$$

计算是对不同的 s_1, s_2 及 k 进行的, 这样可以显示基流不同垂直切变、不同水平切变的作用, 以及它们各自形成的孤波流型. 在所有计算中, 取 $\bar{u}_0 = 1, \varepsilon = 0.1$, 水平切变强度小参数 δ 分别对 $\delta = 0.01, 0.005, 0.001$ 进行了计算, 水平切变型参数 k 考虑两种情形: $k = 1$, 即基流水平切变为反气旋切变, $k = -1$, 为气旋式切变, Froude 数 Fr 取 0.5 和 0.2 两种.

1. 基本气流垂直切变的作用

Hukuda 只讨论了基流随高度线性增大的情况, 由于是两层模式, 他不可能讨论基流的不同垂直切变形式. 在本文的三层模式例子中, 对两种不同垂直切变形式 (图 1 a, b) 进行了计算, 以讨论基流垂直切变的影响.

图 2 给出了 $\delta = 0.001, k = 1$ (反气旋水平切变) 时, 经向波数 $m = 1$ 的正压模态孤波流型. 图中 (a) 对应于垂直切变型 A, (b) 对应于 B. 图中 $N = 3$ 为下层位面, $N = 2$ 为中层, $N = 1$ 为上层 (下同). 由图显见, 不同垂直切变造成不同孤波流型, 基本特征是脊状流型. 垂直切变 A 时下层孤波流型与中层相似, 只是强度更大些, 切变 B 型造成的孤波上下两层流型相同. 对斜压模态和 $m = 2$ 以及 $k = -1$ 的孤波流型计算结果 (图略) 都说明基流的垂直切变对所产生的孤波有重要影响, 不同的垂直切变型产生不同的孤波流型.

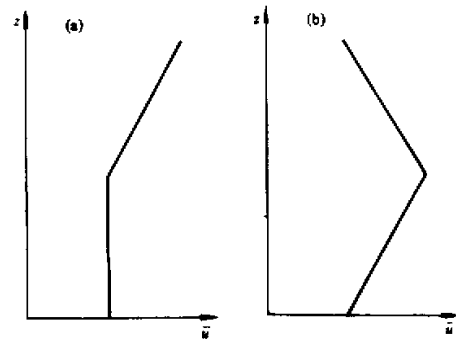


图 1 基流垂直切变示意图

(a) A 型切变 ($s_1 = 1, s_2 = 0$)

(b) B 型切变 ($s_1 = 0, s_2 = 1$)

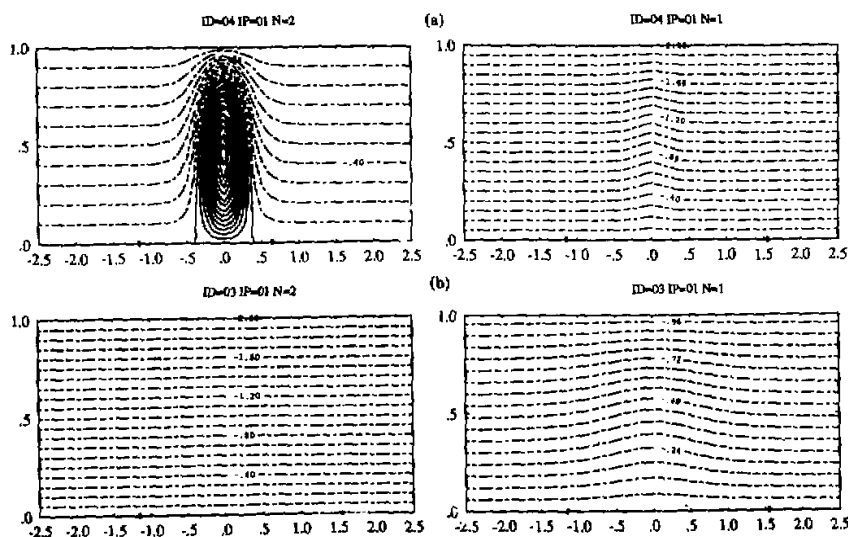


图2 不同基流垂直切变下的孤波流型

$m=1$, $\delta=0.001$, $k=1$. (a), 垂直切变型 A, (b) 垂直切变型 B. (a) 中层流线间隔为 0.1, 中心值为 1.3.

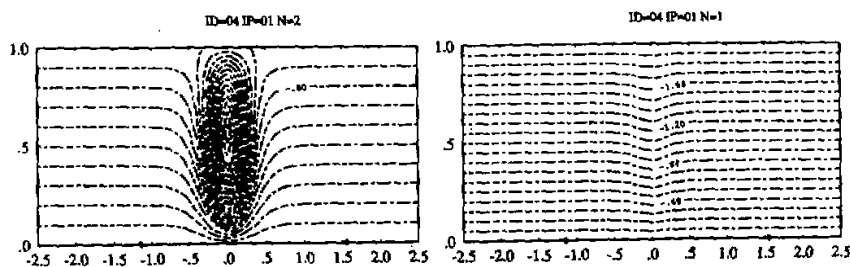


图3 气旋式水平切变下的孤波流型(正压模态)

$k=-1$, A 型垂直切变, 余同图 2 (a). $N=2$ 的流线间隔为 0.1, 中心值为 -2.2

2. 基流水平切变的作用

为与图2相比较, 图3给出了 A 型垂直切变下基流具有气旋式水平切变($k=-1$)时的孤波流型. 图2是脊状流型, 现在是槽状流型, 下层流型与中层相似, 只是更深些. 对 A, B 型垂直切变及斜压模态的计算结果(图略)都显示, 对 $m=1$, $k=1$ 与 $k=-1$ 造成的是两类完全不同的孤波流型, 前者是脊状流型, 后者为槽形流型. 对 $m=2$ 的孤波, 计算结果显示, 基流水平切变型的改变对 $m=2$ 的孤波流型没有影响(图略).

计算还显示, 基流水平切变强度对孤波流型也有重要影响. 图2、图3是水平切变强度参数 $\delta=0.001$ 的计算结果, 图4给出了 A 型垂直切变下 $\delta=0.005$ 的计算结果, 与图2(a)相比较, 显见, 随水平切变强度的增大, 孤波陡度加大. 我们还计算了 $\delta=0.01$ 及其它垂直切变型和 $m=2$ 的情况, 结果都显示, 孤波陡度随 δ 增大而增大,

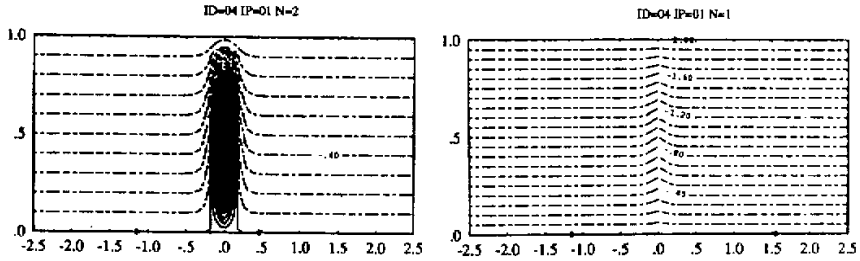


图4 $\delta=0.005$ 时孤波流型
A 型垂直切变, 余同图 2(a)

但对孤波流型的基本特征没有影响。

3. Froude 数的作用

图 5 与图 2(a) 相对应, 给出了 $Fr=0.2$ 的正压模态孤波流型, 比较这两张图, 不难看出, 随 Fr 的减小, 孤波陡度增大, 这与 Hukuda 的结果相同。Froude 数的改变对孤波的基本流型没有大的影响, 对其它情况的计算结果也得出同一结论。

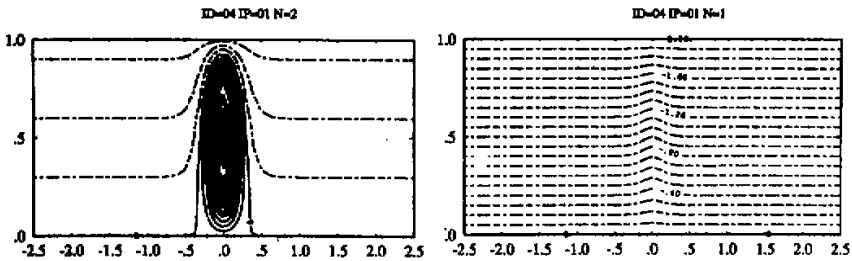
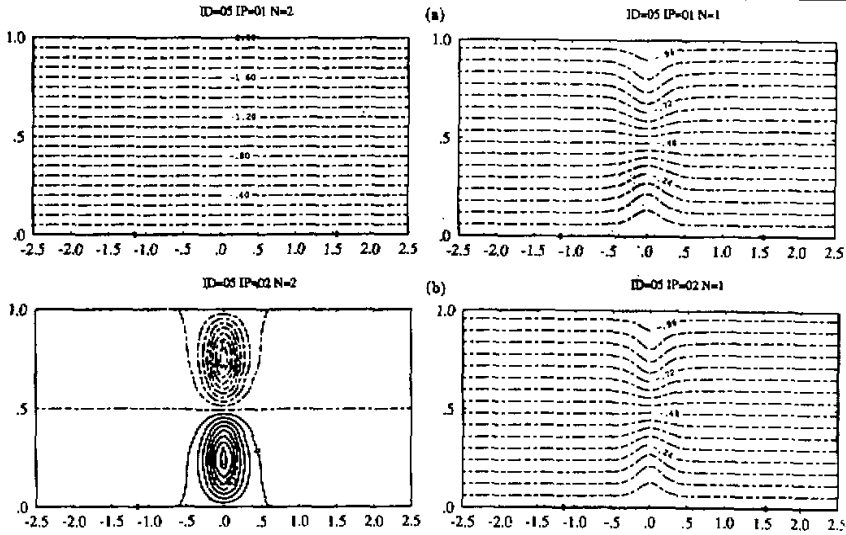


图5 $Fr=0.2$ 的孤波流型
说明同图 2(a), 流线间隔为 0.3, 中心值为 4.8。

4. 不同高度、不同模态的孤波具有不同流型

计算结果显示, B 型垂直切变的孤波在上下位面上流型相同, A 型垂直切变的孤波在不同高度位面上的孤波流型不同。图 6(a), (b) 分别给出 B 型切变下 $m=2$ 的正压模态和斜压模态 1 的孤波流型, 它们在中层具有不同流型, 上层流型很相似, 陡度稍有差别, 上层陡度略大些。对其它情况的计算显示, 正压模态、斜压模态 1 和斜压模态 2 的孤波流型不仅在陡度上, 而且在基本流型特征上都有不同程度的差别。

图 6 $m=2$ 的孤波流型

$\delta=0.005$, (a) 正压模态 (b) 斜压模态 1, 其余同图 2 (b), 流线间隔为 1.0, 中心值为 -9.4 和 7.4.

五、小 结

多层模式弱水平切变基本气流上的孤立 Rossby 波流型与基本气流密切相关, 基流的垂直切变起非常重要的作用, 它决定孤波的基本形状, 如 B 型垂直切变, 孤波在上下位面上具有相同流型, 而 A 型切变在不同位面上具有不同的流型.

基本气流的水平切变对孤波也具有重要影响, 水平切变型对 m 为奇数的孤波, 影响尤为明显, 对它们, 反气旋式切变与气旋式切变造成近于完全相反的流型, 对 m 为偶数的孤波没有影响. 基流水平切变强度的增大使孤波加陡, 但孤波流型的基本特征没有作用.

Froude 数对孤波陡度的作用是, 随 Fr 的减小, 孤波陡度增大, 对孤波基本流型没有什么影响.

本文从理论上指出了基流的垂直切变、水平切变和 Froude 数对孤波流型的不同影响, 它们是造成孤波增陡的因子. 但从图 2—图 6 显见, 由流型计算的经向风速过大, 这说明理论模式的局限性, 也可能是因为在我们的计算中所取的参数不够合适, 以致孤波增陡因子不恰当地增大了孤波的陡度. 从作者所能找到的文献中, 孤波流型都不是像我们由计算机直接绘出, 而是经过手工绘制的, 因此很难比较. 我们将对实际的基本气流进行计算, 看结果是否会更符合些.

附 录

利用变换 (3), 由 (1) 式得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (\psi' + cy') \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 \psi' + \beta' y' + Fr(\psi'_2 - \psi'_1)] - \frac{\partial}{\partial y} (\psi' + cy') \frac{\partial}{\partial x} \\ \quad \times [\nabla^2 \psi' + \beta' y' + Fr(\psi'_2 - \psi'_1)] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\psi' + cy') \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 \psi' + \beta' y' + Fr(\psi'_{i+1} - 2\psi'_i + \psi'_{i-1})] \end{array} \right. \quad (A1)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y}(\psi' + cy')\frac{\partial}{\partial x}[\nabla^2\psi' + \beta y' + Fr(\psi'_{i+1} - 2\psi' + \psi'_{i-1})] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\psi'_N + cy')\frac{\partial}{\partial y}[\nabla^2\psi'_N + \beta y' - Fr(\psi'_N - \psi'_{N-1})] = 0. \end{cases}$$

为得到 KdV 方程, 作下面变换是合适的:

$$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}} x', \quad y = y'. \quad (\text{A2})$$

式中 $\varepsilon \ll 1$, 是振幅小参数, (A1) 变为 (略去 “'” 号)

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + c \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[\varepsilon \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \beta y + Fr(\psi_2 - \psi_1) \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial \psi_l}{\partial y} + c \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[\varepsilon \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial y^2} + \beta y + Fr(\psi_{l+1} - 2\psi_l + \psi_{l-1}) \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial \psi_N}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial \psi_N}{\partial y} + c \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[\varepsilon \frac{\partial^2 \psi_N}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_N}{\partial y^2} + \beta y - Fr(\psi_N - \psi_{N-1}) \right] = 0. \end{cases} \quad (\text{A3})$$

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial \xi} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (\text{A4})$$

把 ψ 和 c 展成 ε 的幂级数:

$$\begin{cases} \psi_l(\xi, y) = -\int_0^y \bar{u}_l(y) dy + \varepsilon \psi_l^{(1)}(\xi, y) + \varepsilon^2 \psi_l^{(2)}(\xi, y) + \dots, \\ c = c_0 + \varepsilon c_1 + \dots. \end{cases} \quad (\text{A5})$$

式中 $\bar{u}_l(y)$ 是第 l 层上的纬向气流, (A5) 式代入 (A3) 式, 可得各阶近似方程. 由于 ε^1 阶方程对 ξ, y 是可以分离的, 为此可设

$$\psi_l^{(1)} = A(\xi)\Phi_l(y). \quad (\text{A6})$$

代入 ε^1 阶方程, 得到关于 Φ_l 的特征值问题是

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi_1}{dy^2} + Fr(\Phi_2 - \Phi_1) + M_1(y)\Phi_1 = 0, \\ \frac{d^2 \Phi_l}{dy^2} + Fr(\Phi_{l+1} - 2\Phi_l + \Phi_{l-1}) + M_l(y)\Phi_l = 0, \\ \frac{d^2 \Phi_N}{dy^2} - Fr(\Phi_N - \Phi_{N-1}) + M_N(y)\Phi_N = 0, \end{cases} \quad (\text{A7})$$

$$\Phi_l(y) = 0, \quad y = 0, 1, \quad (\text{A8})$$

式中

$$\begin{aligned} M_1(y) &= \left[\beta - \frac{d^2 \bar{u}_1}{dy^2} + Fr(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \right] / (\bar{u}_1 - c_0), \\ M_l(y) &= \left[\beta - \frac{d^2 \bar{u}_l}{dy^2} - Fr(\bar{u}_{l+1} - 2\bar{u}_l + \bar{u}_{l-1}) \right] / (\bar{u}_l - c_0), \\ M_N(y) &= \left[\beta - \frac{d^2 \bar{u}_N}{dy^2} - Fr(\bar{u}_{N-1} - \bar{u}_N) \right] / (\bar{u}_N - c_0). \end{aligned}$$

(A7) 式描述斜压 Rossby 波的经向结构. 为决定 $A(\xi)$, 要利用 ε^2 阶方程, 把 (A6) 式代入 ε^2 阶方程, 并利用 (A7) 式, 得到

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial \xi} (\bar{u}_1 - c_0) M_1(y) + (\bar{u}_1 - c_0) \left[\frac{\partial^3 \psi_1^{(2)}}{\partial \xi \partial y^2} + Fr \left(\frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] \right] \\ &= -(\bar{u}_1 - c_0) \Phi_1 \frac{d^3 A}{d\xi^3} + \Phi_1^2 \frac{d}{dy} M_1(y) A \frac{dA}{d\xi} - c_1 \Phi_1 M_1(y) \frac{dA}{d\xi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial \psi_I^{(2)}}{\partial \xi^2} (\bar{u}_I - c_0) M_I(y) + (\bar{u}_I - c_0) \left[\frac{\partial^3 \psi_I^{(2)}}{\partial \xi \partial y^2} + Fr \left(\frac{\partial \psi_{I-1}^{(2)}}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial \psi_I^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_{I+1}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] \right] \\
 & = -(\bar{u}_I - c_0) \Phi_I \frac{d^3 A}{d\xi^3} + \Phi_I^2 \frac{dM_I(y)}{dy} A \frac{dA}{d\xi} - c_1 \Phi_I M_I(y) \frac{dA}{d\xi}, \\
 & \left[\frac{\partial \psi_N^{(2)}}{\partial \xi^2} (\bar{u}_N - c_0) M_N(y) + (\bar{u}_N - c_0) \left[\frac{\partial^3 \psi_N^{(2)}}{\partial \xi \partial y^2} - Fr \left(\frac{\partial \psi_N^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_{N-1}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] \right] \\
 & = (\bar{u}_N - c_0) \Phi_N \frac{d^3 A}{d\xi^3} + \Phi_N^2 \frac{dM_N(y)}{dy} A \frac{dA}{d\xi} - c_1 \Phi_N M_N(y) \frac{dA}{d\xi}.
 \end{aligned} \tag{A9}$$

(A9) 存在解的条件是振幅 A 满足 KdV 方程 (4).

参 考 文 献

- [1] Redekopp, L.G., 1977, On the theory of solitary Rossby waves, *J. Fluid Mech.*, **82**, 4, 725 — 745.
- [2] Redekopp, L. G., and P.D. Weidman, 1978, Solitary Rossby waves in zonal shear flows and their interactions, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 5, 790 — 804.
- [3] Hukuda, H., 1979, Solitary Rossby waves in a two-layer system, *Tellus*, **31**, 2, 161 — 169.
- [4] Clarke, R.A., 1971, Solitary and Cnoidal planetary Waves, *Geophys. Fluid Dyn.*, **2**, 343 — 354.
- [5] Pedlosky, J., 1979, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, pp. 624.

Baroclinic Solitary Rossby Waves in a N-Level Model

Lu Keli

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

Abstract

The KdV equation is derived from a N-level model. The streamline patterns of solitary Rossby waves are calculated with a three-level model. The results show that the influence of the vertical and horizontal shears of the basic flow and Froude number on the solitary Rossby waves is quite important. The streamline patterns of the solitary waves with different modes are different.

Key words: N-level model; KdV equation; Solitary wave.