

湍流的粘性和频散效应 *

刘式适 刘式达

(北京大学地球物理系, 北京, 100871)

提 要

本文应用 Prandtl 混合长理论导得了既包含湍流粘性又包含湍流频散的新的 Reynolds 平均运动方程组. 分析指出: (1) 湍流不仅存在粘性效应, 而且存在频散效应; (2) 正是湍流的频散效应可能导致能量逆转(即常说的负粘性现象, 实质为一定条件下的负频散现象), 并给出了能量逆转的必要条件和充分条件; (3) 给出了湍流的 KdV-Burgers 方程模型.

关键词: 湍流; 粘性; 频散.

一、引 言

众所周知, 研究湍流对方程组的平均化使方程组不封闭, 经典的 Prandtl 混合长理论形式上将湍流运动与分子运动类比, 认为湍流运动存在粘性、热传导、扩散等作用, 这种参数化的做法解决了不少实际问题. 然而, 人们早就发现, 在大气中经常存在扰动动能转化为基本气流动能, 如通常在等压面上见到的 Rossby 波(见图 1), 这就是能量逆转问题. Starr^[1]称之为负粘性现象, 林家翘^[2]认为能量逆转与湍流的波粒二重性有关. 高歌^[3]认为以耗散机制为主导的湍流理论忽视了具有波粒二重性的频散作用, 并提出把 KdV-Burgers 方程作为湍流运动的规范方程. 本文结合大气科学实际, 应用 Prandtl 混合长理论, 导得了既包含湍流粘性又包含湍流频散效应的新的 Reynolds 平均运动方程组, 并指出湍流的频散效应是导致能量逆转的根本原因.

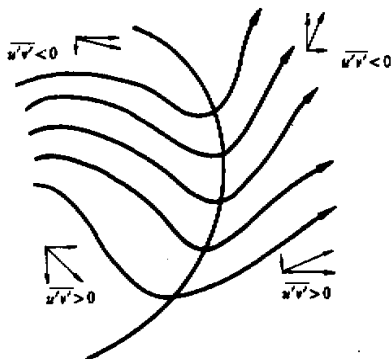


图 1 Rossby 波的能量逆转

1991 年 2 月 20 日收到, 4 月 8 日收到修改稿.

* 本工作获得大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室的资助.

二、湍流的粘性和频散效应

对大气运动而言, 不考虑密度变化的运动方程和热力学方程可以写为

$$\frac{d\bar{u}}{dt} - f\bar{v} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right), \quad (1a)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + f\bar{u} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right), \quad (1b)$$

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = -g - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right), \quad (1c)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = - \left(\frac{\partial \overline{\theta'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\theta'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\theta'w'}}{\partial z} \right). \quad (1d)$$

其中 $\bar{p}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$ 分别为平均气压, 密度和位温, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 为平均速度, (u', v', w') 为脉动或扰动速度, θ' 为脉动或扰动位温, g 为重力加速度, f 为Coriolis 参数. 且

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

如何处理脉动或扰动量乘积平均的二阶矩项呢? 如方程(1a)中的 $-\overline{u'w'}$ 一项, 在大气科学中应用 Prandtl 混合长理论, 认为存在一个混合长 l' , 在 l' 内空气微团保持自身的属性不变, 空气微团移动 l' 后与其它空气进行湍流交换. 设在 $z=z_0$ 和 $z=z$ 的 $\bar{u}$ 分别为 $\bar{u}(z_0)$ 和 $\bar{u}(z)$, 原来处于 $z=z_0$ 的空气到达 $z=z$ 后与原来处于 $z=z$ 的空气混合产生 u' , 传统的做法是认为

$$u' = \bar{u}(z_0) - \bar{u}(z) = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} (z - z_0). \quad (3)$$

这只考虑了 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, 未考虑 $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$, 若考虑后者, (3) 式应改为

$$u' = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} (z - z_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} (z - z_0)^2. \quad (4)$$

若记

$$l' = z - z_0 \quad (5)$$

则由(4)式求得

$$-\overline{u'w'} = v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad (6)$$

其中

$$v = \overline{l'w'}, \quad \gamma = -\frac{1}{2} \overline{l'^2 w'}. \quad (7)$$

ν 称为湍流粘性系数, γ 称为湍流频散系数, 这样, 方程(1a)中的 $-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$ 一项化为

$$-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} - \gamma \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial z^3}. \quad (8)$$

方程(1a), (1b) 和(1c)中的其它项可类似求得, 在方程(1d)中也可类似求得

$$-\frac{\partial \overline{\theta'w'}}{\partial z} = k \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial z^2} - \kappa \frac{\partial^3 \overline{\theta}}{\partial z^3}. \quad (9)$$

k 称为湍流导温系数, κ 称为湍流热频散系数. 若不考虑各个方向湍流运动的差异, 则方程组(1)可以改写为

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u - \gamma \nabla \cdot \square u, \quad (10a)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v - \gamma \nabla \cdot \square v, \quad (10b)$$

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w - \gamma \nabla \cdot \square w, \quad (10c)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = k \nabla^2 \theta - \kappa \nabla \cdot \square \theta. \quad (10d)$$

其中平均符号已被省略, 且

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\square \equiv \vec{i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \vec{j} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \vec{k} \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (12)$$

为了方便, 我们称($\nu \nabla^2 u$, $\nu \nabla^2 v$, $\nu \nabla^2 w$)为单位质量空气的湍流粘性力, ($-\gamma \nabla \cdot \square u$, $-\gamma \nabla \cdot \square v$, $-\gamma \nabla \cdot \square w$)为单位质量空气的湍流频散力, $k \nabla^2 \theta$ 称为湍流热传导, $-\kappa \nabla \cdot \square \theta$ 称为湍流热频散.

三、能量逆转的条件

为了说明湍流的粘性与频散效应, 为了说明这两种效应对湍流发展的作用, 我们引入几个无量纲参数.

为此, 设空气的特征尺度为 L (在大气大尺度运动中指水平距离尺度), 速度的特征尺度为 U (在大气中主要指水平风速的尺度), 则引入下列无量纲量:

1. 湍流粘性 Reynolds 数

它是指用非线性项表征的惯性力的大小与湍流粘性力大小之比, 记为 R_1 . 由方程

(10a)知:

$$R_1 \equiv \frac{\vec{v} \cdot \nabla u}{v \nabla^2 u} = \frac{UL}{v}. \quad (13)$$

2. 湍流频散 Reynolds 数

它是指用非线性项表征的惯性力的大小与湍流频散力大小之比, 记为 R_2 . 由方程 (10a)知:

$$R_2 \equiv \frac{\vec{v} \cdot \nabla u}{\gamma \nabla \cdot \square u} = \frac{UL^2}{\gamma}. \quad (14)$$

3. 湍流频散—粘性比参数

它是指湍流频散力的大小与湍流粘性力的大小之比, 记为 α_1 , 有

$$\alpha_1 \equiv \frac{\gamma \nabla \cdot \square u}{v \nabla^2 u} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\gamma}{vL}. \quad (15)$$

因而, α_1 是湍流粘性 Reynolds 数与湍流频散 Reynolds 数之比.

类似, 在热力学方程(10d)中, 湍流热频散的大小与湍流热传导的大小之比应为

$$\alpha_2 \equiv \frac{\kappa \nabla \cdot \square \theta}{k \nabla^2 \theta} = \frac{\kappa}{kL}. \quad (16)$$

若认为 $v=k$ (即取湍流 Prandtl 数 $P_r \equiv \frac{v}{k} = 1$), 又认为 $\gamma=\kappa$ (即取湍流频散系数 γ 与湍流热频散系数 κ 一样), 则

$$\alpha_1 = \alpha_2. \quad (17)$$

4. 湍流发展的 Richardson 数

通常认为: 湍流的发展决定于热力因素(层结)和动力因素(风速垂直切变). 在有风速垂直切变的大气中, Reynolds 应力做功对湍流动能的贡献为

$$W_1 = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = W_1^{(1)} + W_1^{(2)}, \quad (18)$$

其中

$$W_1^{(1)} = v \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2, \quad W_1^{(2)} = -\gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}. \quad (19)$$

分别表征湍流粘性和湍流频散对 W_1 的贡献, 其中 $\bar{u}$ 可视为是全平均风速, $W_1^{(2)}$ 与 $W_1^{(1)}$ 的比值记为 β_1 , 即

$$\beta_1 \equiv \frac{W_1^{(2)}}{W_1^{(1)}} = -\frac{\gamma}{v} \frac{\partial^2 \bar{u} / \partial z^2}{\partial \bar{u} / \partial z}. \quad (20)$$

在层结大气中, Archimede 浮力做功对湍流动能的贡献为

$$W_2 = -\frac{g}{\theta} \overline{\theta'w'} = W_2^{(1)} + W_2^{(2)}, \quad (21)$$

其中

$$W_2^{(1)} = kN^2, \quad W_2^{(2)} = -\kappa \frac{g}{\theta} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2}. \quad (22)$$

这里 N 是 Brunt-Väisälä 频率, 它满足

$$N^2 = g \frac{\partial_{\ln} \bar{\theta}}{\partial z}. \quad (23)$$

$W_2^{(2)}$ 与 $W_2^{(1)}$ 的比值记为 β_2 , 即

$$\beta_2 \equiv \frac{W_2^{(2)}}{W_2^{(1)}} = -\frac{\kappa}{k} \frac{g/\bar{\theta} \partial^2 \bar{\theta} / \partial z^2}{N^2}. \quad (24)$$

经典的 Richardson 数定义为

$$R_i^{(0)} \equiv \frac{W_2^{(1)}}{W_1^{(1)}} = \frac{k}{\nu} \frac{N^2}{(\partial \bar{u} / \partial z)^2}. \quad (25)$$

显然, 它只考虑了湍流的粘性和热传导效应, 而未考虑湍流的频散效应, 若计入频散效应, 则 Richardson 数定义为

$$R_i \equiv \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_2^{(1)} + W_2^{(2)}}{W_1^{(1)} + W_1^{(2)}} = R_i^{(0)} \left(\frac{1 + \beta_2}{1 + \beta_1} \right). \quad (26)$$

由此可见, 只有当 $\beta_1 = \beta_2$ 时, $R_i = R_i^{(0)}$.

从大气动力学知道, 在一定区域 τ 内 W_1 的正负表征了平均动能 K_m 与脉动动能 K_f 之间的转换, 即定义 K_m 与 K_f 之间的转换函数为

$$\{K_m, K_f\} \equiv \int_{\tau} W_1 \delta\tau = \int_{\tau} -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \delta\tau. \quad (27)$$

当 $\{K_m, K_f\} > 0$ 时表示平均动能转化为脉动动能; 当 $\{K_m, K_f\} < 0$ 时表示脉动动能转化为平均动能.

热力学第二定律告诉我们: 在没有外力时, 任何系统必然趋向于越来越混乱无序的状态(熵增大). 即是说, 耗散过程是不可逆的, 机械能只能向热能转换, 对大气湍流来说, 这意味着湍流粘性对湍流能量的贡献 $W_1^{(1)}$ 恒为正, 这就要求湍流粘性系数 $\nu > 0$.

从(18)式和(27)式看到, 湍流脉动动能若来自平均运动动能, 不仅要求 $W_1^{(1)} > 0$, 而且要求在 τ 内平均有 $W_1 = W_1^{(1)} + W_1^{(2)} > 0$, 即

$$W_1 \equiv W_1^{(1)}(1 + \beta_1) > 0. \quad (28)$$

上式成立要求

$$\beta_1 > -1 \quad (29)$$

利用(20)式, 并注意大气通常的情况(边界层内和对流层急流以下)是 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} > 0, \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 < 0$;

这样, (29)式可改写为

$$D \equiv \left| \frac{\partial \bar{u} / \partial z}{\partial^2 \bar{u} / \partial z^2} \right| > -\frac{\gamma}{\nu} . \quad (30)$$

这里 D 为大气某特征垂直距离的尺度.

在条件(29)或(30)下, 大气湍流能量来自平均运动能量, 即大尺度湍流的能量逐渐转化为小尺度湍流的能量, 这就是大气湍流的串级散裂(Cascade down)过程. 需要指出的是, 在这个过程中 γ 可正(称为正频散)也可负(称为负频散), 而且在大气通常的情况下 ($\partial \bar{u} / \partial z > 0, \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 < 0$) β_1 与 γ 有同样的符号.

从动量输送机制分析, 在(6)式中 $-\bar{u}'w'$ 表示单位时间通过垂直于 z 轴的单位面积向下输送的西风动量的平均值. 在 $\nu > 0$ 和 $\partial \bar{u} / \partial z > 0$ 时, 湍流粘性使动量由 $\bar{u}$ 的高值向低值输送((6)式右端第一项 $\nu \partial \bar{u} / \partial z > 0$); 而在 $\partial^2 \bar{u} / \partial z^2 < 0$ 时, $\gamma > 0$ 使得湍流频散也将动量由 $\bar{u}$ 的高值向低值输送((6)式右端第二项 $-\gamma \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 > 0$); 但当 $\partial^2 \bar{u} / \partial z^2 < 0$ 和 $\gamma < 0$ 时, 尽管湍流频散使动量由 $\bar{u}$ 的低值向高值输送((6)式右端第二项 $-\gamma \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 < 0$), 但在条件(29)或(30)下, 湍流粘性从 $\bar{u}$ 的高值向低值输送的动量大于湍流频散从 $\bar{u}$ 的低值向高值输送的动量, 因而, 净的效果仍然是动量由 $\bar{u}$ 的高值向低值输送, 这是能量分散的过程.

大气湍流除存在串级散裂过程外, 还存在能量逆过程, 在这个过程中, 湍流脉动动能转化为平均运动动能, 从(18)式和(27)式看到, 能量发生逆转的必要条件为在 τ 内平均有 $W_1^{(2)} < 0$, 即

$$W_1^{(2)} \equiv -\gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} < 0 . \quad (31)$$

在大气通常的情况下 ($\partial \bar{u} / \partial z > 0, \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 < 0$), 上式成立要求

$$\gamma < 0 \quad (32)$$

因此, 湍流能量发生逆转的必要条件是负频散过程, 这是能量集中的过程, 因为在这个过程中动量由 $\bar{u}$ 的低值向高值输送((6)式右端第二项 $-\gamma \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 < 0$), 因而, 在这个过程中可能使湍流粘性引起的动量由 $\bar{u}$ 的高值向低值输送受到抑制, 因而也可能使湍流串级散裂过程受到抑制.

当然, 从(18)式和(27)式看到, 湍流能量发生逆转不仅要求 $W_1^{(2)} < 0$, 而且要求在 τ 内平均有 $W_1 = W_1^{(1)} + W_1^{(2)} < 0$, 即

$$W_1 \equiv W_1^{(1)}(1 + \beta_1) < 0 . \quad (33)$$

上式成立要求

$$\beta_1 < -1 . \quad (34)$$

这是湍流发生能量逆转的充分条件, 它意味着湍流负频散对能量的贡献大于湍流粘性对能量的贡献, 它使脉动动能减小并转化为平均运动动能, 在大气通常的情况下 ($\partial \bar{u} / \partial z > 0, \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 < 0$), (34)式可改写为

$$D \equiv \left| \frac{\partial \bar{u} / \partial z}{\partial^2 \bar{u} / \partial z^2} \right| < -\frac{\gamma}{\nu} = \frac{|\gamma|}{\nu} . \quad (35)$$

从动量输送的角度分析, 能量逆转意味着湍流频散使得动量由 $\bar{u}$ 的低值输向高值, 而且这个数值大于湍流粘性由 $\bar{u}$ 的高值向低值输送的动量.

显然, 零通量($W_1 = 0$, 湍流粘性由 $\bar{u}$ 高值输向 $\bar{u}$ 低值的动量等于湍流频散由 $\bar{u}$ 低值输向 $\bar{u}$ 高值的动量)要求负频散($\gamma < 0$, $W_1^{(2)} < 0$), 而且要求

$$\beta = -1, \quad (36)$$

$$\text{或} \quad D \equiv \left| \frac{\partial \bar{u} / \partial z}{\partial^2 \bar{u} / \partial z^2} \right| = -\frac{\gamma}{\nu} = \frac{|\gamma|}{\nu}. \quad (37)$$

(36)式或(37)式可称为零通量条件.

类似, 我们可分析大气大尺度运动发生能量逆转的过程. 此时, 基本气流动能 K_m 与扰动动能 K_p 之间的转换函数为

$$\{K_m, K_p\} = \int_{\tau} -\bar{u}'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \delta \tau = \int_{\tau} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right] \delta \tau. \quad (38)$$

因而, 发生大尺度运动能量逆转的必要条件为

$$-\gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} < 0. \quad (39)$$

而充分条件为

$$\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 < \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (40)$$

条件(40)还可改写为

$$L \equiv \left| \frac{\partial \bar{u} / \partial y}{\partial^2 \bar{u} / \partial y^2} \right| < \frac{|\gamma|}{\nu}, \quad (41)$$

其中 L 表征经向距离的特征尺度.

四、KdV - Burgers 方程

为了突出反映湍流的粘性效应和频散效应, 我们不考虑气压梯度力和科里奥利力, 且空间只取为是一维的, 则方程(10a)化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (42)$$

它称为 KdV-Burgers 方程, 其中 $\partial u / \partial t$ 为非定常项, $u \partial u / \partial x$ 为非线性项, $\nu \partial^2 u / \partial x^2$ 为粘性项, $\gamma \partial^3 u / \partial x^3$ 为频散项.

事实上, 若不考虑非线性项, 且设

$$u = \hat{u} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (43)$$

则(43)式代入到方程(42), 得到圆频率 ω 与波数 k 之间的关系为

$$\omega = -i\nu k^2 - \gamma k^3. \quad (44)$$

因而, 在方程(42)中, u 的二阶偏微商项表征粘性作用, 而 u 的三阶偏微商项表征频散作用.

当 $\gamma = 0$ 时, KdV - Burgers 方程(42)化为下列 Burgers 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (45)$$

早在1946年, Burgers^[4]就把它作为湍流的规范方程. 但它只包含湍流的粘性作用, 不包含湍流的频散作用, 即不能反映湍流的能量逆转又不能很好表征湍流的串级散裂, 因而它不能作为湍流的规范方程. 不过, 它具有连续的冲击波解, 这就表明它有波的特性.

当 $\nu=0$ 时, KdV-Burgers 方程(42)化为下列 KdV 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (46)$$

它的不足是只含湍流的频散作用, 不含湍流的粘性作用, 因而也不能反映湍流的串级散裂又不能很好地表征湍流的能量逆转. 不过, 它具有稳定的孤立波解, 这就表明它既有波的特性, 也有粒子的特征.

Burgers 方程(45)的冲击波解和 KdV 方程(46)的孤立波解分别见图 2 和图 3.

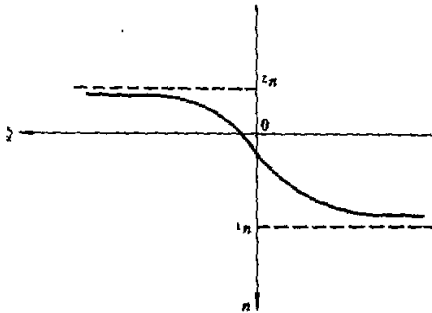


图 2 Burgers 方程的冲击波解

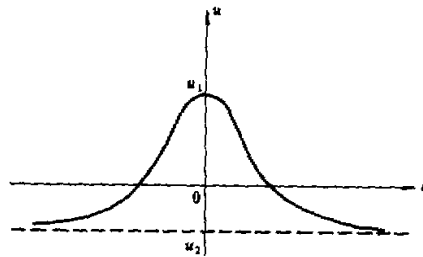


图 3 KdV 方程的孤立波解

鉴于上述分析并考虑到湍流同时具有粘性和频散特性, 因而, 应该把 KdV-Burgers 方程(42)作为湍流的规范方程.

我们已求得了 KdV-Burgers 方程(42)在鞍点和焦点之间的行波解析解. 即在方程(42)中令

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (c = \text{常数}) \quad (47)$$

(47) 式代入方程(42)得到

$$\gamma \frac{d^3 u}{d\xi^3} - \nu \frac{d^2 u}{d\xi^2} + (u - c) \frac{du}{d\xi} = 0. \quad (48)$$

方程(48)对 ξ 积分一次得到

$$\gamma \frac{d^2 u}{d\xi^2} - \nu \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{2} u^2 - cu = A. \quad (49)$$

A 为积分常数.

方程(49)的等价方程组为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = v, \\ \frac{dv}{d\xi} = \frac{\nu}{\gamma} v - \frac{1}{2\gamma} (u^2 - 2cu - 2A). \end{cases} \quad (50a)$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{\nu}{\gamma} v - \frac{1}{2\gamma} (u^2 - 2cu - 2A). \quad (50b)$$

在相平面 (u, v) 上, 它有两个平衡状态: $P(u_1, 0)$ 和 $Q(u_2, 0)$, 其中

$$u_1 = c + \sqrt{c^2 + 2A}, \quad u_2 = c - \sqrt{c^2 + 2A}, \quad (c^2 + 2A > 0) \quad (51)$$

它有两种重要的情况:

1. 正粘性($\nu > 0$)和正频散($\gamma > 0$)

很易说明: 当 $v^2 < 4\gamma\sqrt{c^2 + 2A}$ 时, P 是焦点, Q 是鞍点, 而且我们求得

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 + \frac{u_1 - u_2}{2} e^{\frac{\nu}{2\gamma}\xi} \cos \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{2\gamma} - \left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2} \xi, & (-\infty, 0] \\ u_2 + \frac{3(u_1 - u_2)}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{\partial\gamma}} \xi, & [0, \infty) \end{cases} \quad (52a)$$

由(52a)式看到, 它要求 $\frac{u_1 - u_2}{2\gamma} > \left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2$, 若取 $U = 2(u_1 - u_2)$, 则此要求可以化为

$$R_1^2 > R_2. \quad (53)$$

如果

$$\frac{1}{R_1} < \frac{R_1}{R_2} < 1. \quad (54)$$

它可满足(53)式, 这正是我们在上节分析的平均运动动能转化为脉动动能的情况。(52)式的图象见图4。图4右半部分接近于一个孤立波, 左半部分接近于一个衰减振荡波, 它能很好地表征湍流串级散裂过程。

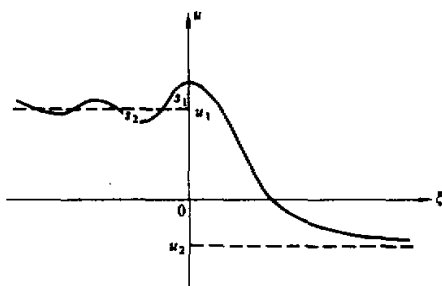


图4 $\nu > 0, \gamma > 0$ 时, KdV-Burgers 方程的解

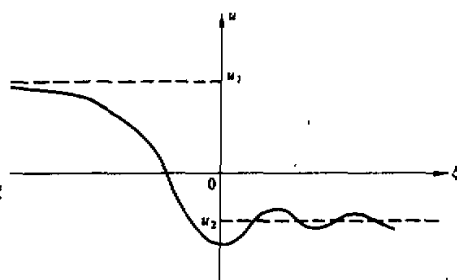


图5 $\nu > 0, \gamma < 0$ 时, KdV-Burgers 方程的解

若令(52a)式右端第二项为 $u'(\xi)$, 即

$$u'(\xi) = ae^{\frac{\nu}{2\gamma}\xi} \cos k_1 \xi. \quad (55)$$

其中

$$a = \frac{u_1 - u_2}{2}, \quad k_1 = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2}, \quad k_0^2 = \frac{u_1 - u_2}{2\gamma}. \quad (56)$$

则很易求得振荡曲线在 (ξ_{n+1}, ξ_n) 与 ξ 轴所包围的面积为

$$S_n = \left| \int_{\xi_{n+1}}^{\xi_n} u'(\xi) d\xi \right| = \frac{2ak_1 \cosh \frac{\nu\pi}{4\gamma k_1}}{\left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2 + k_1^2} q^n, \quad (57)$$

其中

$$q = e^{-\frac{\nu\pi}{2\gamma k_1}}. \quad (58)$$

这就表明, 湍流串级散裂过程以公比 q 的等比数列进行.

利用(55)式, 我们还可求得相关函数

$$f(\eta) = \overline{u'(\xi)u'(\xi+\eta)} \quad (59)$$

的能谱为

$$F(k) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^2}{2Lk_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^2} \cdot \frac{1 - \frac{(k_1/k_0)^2}{1 + (k/k_0)^2}}{1 - \left[\frac{2k_1/k_0 \cdot k/k_0}{1 + (k/k_0)^2}\right]^2} \sim k^{-2}. \quad (60)$$

这与著名的湍流惯性区能谱的Kolmogoroff的“ $-\frac{5}{3}$ 次方定律”很接近.

2. 正粘性($\nu > 0$)和负频散($\gamma < 0$)

不难说明: 当 $\nu^2 < -4\gamma\sqrt{c^2 + 2A}$ 时, P 是鞍点, Q 是焦点, 而且我们求得

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 - \frac{3(u_1 - u_2)}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{-8\gamma}} \xi, & (-\infty, 0] \end{cases} \quad (61a)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_2 - \frac{u_1 - u_2}{2} e^{\frac{\nu}{2\gamma}\xi} \cos \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{-2\gamma}} - \left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2 \xi, & [0, \infty) \end{cases} \quad (61b)$$

由(61b)式看到, 它要求 $\frac{u_1 - u_2}{-2\gamma} > \left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2$, 同样可以得到

$$R_1^2 > R_2 \equiv \frac{UL^2}{|\gamma|}. \quad (62)$$

如果

$$1 < R_2 < R_1. \quad (63)$$

即可满足(62)式. 这正是我们在上节分析的脉动动能转化为平均运动动能的能量逆转的情况. (55)式的图象见图5. 在图4中, 当 ξ 从0变到 $-\infty$ 时, u 从 $\frac{1}{2}(3u_1 - u_2)$ 减少到 u_1 ; 但在图4中, 当 ξ 从0变到 $+\infty$ 时, u 从 $-\frac{1}{2}(u_1 - 3u_2)$ 增加到 u_2 . 后者的这种扰动振幅的增加正是能量逆转过程中小涡旋能量会聚成大涡旋能量的过程.

五、结 论

综上所述, 我们可以得到如下几个结论:

1. 湍流运动不仅存在粘性效应, 而且存在频散效应. 利用 Prandtl 混合长理论这一简便的参数化方法, 我们可以求得包含湍流粘性效应和频散效应的新的 Reynolds 平均化的方程组.

2. 如果仅有湍流的粘性效应, 湍流大涡旋的能量只能向小涡旋能量转换, 最终变为分子热能. 此时不但不能很好说明上述串级散裂过程, 而且无法解释湍流的能量逆转. 只有加入湍流的频散作用, 才能正确地描述串级散裂过程, 而且当负频散出现时, 频散对湍流能量的贡献大于粘性对能量的贡献, 此时将出现能量逆转. 逆转的充分条件为

$$D \equiv \left| \frac{\partial \bar{u} / \partial z}{\partial^2 \bar{u} / \partial z^2} \right| < \frac{|\gamma|}{\nu} \quad (\gamma < 0)$$

当 $D \equiv \left| \frac{\partial \bar{u} / \partial z}{\partial^2 \bar{u} / \partial z^2} \right| = \frac{|\gamma|}{\nu}$ 时出现零通量.

3. KdV - Burgers 方程可以较好地描写湍流运动, 该方程的行波解说明湍流的串级散裂过程是按等比数列进行的, 得到的湍流能谱很接近于 Kolmogoroff 的 $-\frac{5}{3}$ 次方定律. 该方程在 $\gamma < 0$ 时的行波解也能较好地反映能量逆转过程.

参 考 文 献

- [1] Starr, V. P., 1966, *Physics of Negative Viscosity Phenomena*, McGraw-Hill, pp 255.
- [2] Lin, C. C. (林家翘), 1983, *Galaxies, Turbulence and Plasmas, Proceedings of the 2nd Asian conference of Fluid Mechanics*, Science Press Beijing, China, 1 - 4.
- [3] 高歌, 1985, 湍流的耗散及弥散相互作用理论, 中国科学(A辑), 5, 457 - 465.
- [4] Burgers, J. M., 1946, A Mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.*, 1, 171 - 196.

Dissipation and Dispersion Effects of Turbulence

Liu Shikuo and Liu Shida

(Department of Geophysics, Peking University, LASG, Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica, Beijing 100871)

Abstract

This paper uses the Prandtl's mixing length theory to derive a set of new Reynolds averaged equations which contain both the dissipation and dispersion effects. It is shown that (a) There exist not only the dissipation but also the dispersion effects in the turbulent flow (b) It is the dispersion effect of the turbulence that results in the energy inversion which under certain conditions represents a negative dispersion phenomena which is usually miscalled the negative viscosity phenomena. The necessary and sufficient conditions of the energy inversion are obtained (c) A KdV - Burgers equation model of the turbulence is presented.

Key words: Turbulence; Dissipation (viscosity or diffusion); Dispersion.