

主分量分析在区域性气候分型中 应用的统计试验研究

龚晓峰

M. B. Richman

(辽宁省气象局, 沈阳, 110001) (美国俄克拉何马大学中尺度天气研究所)

提 要

主分量分析在大气科学研究中的应用日益广泛, 但对其应用的可行性和可靠性的研究则比较欠缺。本文对主分量分析的三种方法, 即非旋转主分量、正交旋转的方差极大法和斜交旋转的 Harris-Kaiser Case II B¹B 法, 在区域气候分型研究中的应用进行了计算分析和精度拟合, 同时进行了区域分割和 Monte-Carlo 模拟的统计试验。结果表明, 非旋转主分量的分型拟合精度不佳, 两种旋转主分量方法的效果很好, 其中正交旋转又优于斜交旋转。区域范围的变化对旋转主分量方法的分型结果影响不大, 对非旋转主分量分析的影响较大, 样本大小的变化对主分量分析的各种方法无明显影响。

关键词: 主分量分析; 正交旋转; 斜交旋转; 区域气候分型。

一、引 言

主分量分析和自然正交函数分解是分析诊断气候要素的空间相关型及其时间演变特征的一种重要的常用统计工具。目前, 这种方法在大气科学的研究中已得到广泛应用。随着大气科学的研究和发展和人们认识的不断深化, 旋转主分量分析也正在为国内外的研究者广为利用, 通过对若干个主分量荷载的旋转(即线性变换), 可提取和解释主分量分析结果的气候学和物理学意义。在以往的研究中, 人们发现非旋转主分量方法在某种程度上受研究所用资料、空间形状及抽样误差等种种因素的限制^{[1]-[4]}。因此, 对主分量分析的各种方法在大气科学领域中的应用进行试验研究十分必要, 这样可以使研究人员有针对性地选取有效的方法, 以得到所研究问题的具有气候学和物理学意义的解。

在研究大气过程的空间模式、遥相关以及早期的气候要素时空分布等方面的问题时, 多用非旋转主分量分析或自然正交函数分解^{[6]-[10]}, 部分近期的工作^{[11]-[12]}则已经应用了旋转主分量分析。国外的一些研究者在应用主分量方法的同时还对方法本身进行了一定程度的研究和探讨。然而, 对主分量分析方法比较全面的综合性研究则首推 Richman^[14](1986)的工作, 他全面地总结分析了非旋转和旋转主分量分析的优缺点及其在大气科学中的应用, 并用 Monte-Carlo 模拟方法对 10 种主分量分析方法进行了检验。遗憾的是, 他当时所用资料是由随机数发生器模拟的, 缺乏实际意义。本文以辽宁

1991 年 11 月 4 日收到, 1992 年 2 月 18 日收到修改稿。

省 41 个站点的夏季月降水量为基本资料, 用非旋转、正交和斜交旋转主分量三种方法进行计算, 讨论区域降水分型; 同时进行空间区域分割试验和 Monte Carlo 抽样统计分析, 来揭示各种方法对空间和样本变化的敏感性, 目的是检验各种主分量分析方法在气候要素空间分型研究应用中的稳定性, 为区域性气候分析及大气科学其它方面的研究提供有效的工作方法。

二、资料和方法

1. 资料说明

本文选用辽宁省内 41 个均匀分布的气象站点, 基本上可以代表省内的区域气候状况。取所选点的 1959—1988 年 30 年夏季(6—8)月降水量为统计试验计算的基本资料, 构成一个样本为 90, 空间点为 41 的数据阵 X (90×41)。该数据阵反映了辽宁省区域内夏季月降水的年际变化和季内振荡。在我国北方地区, 月降水量具有较明显的偏态性^[1], 故在计算之前对序列进行开三次方变换, 消除序列的偏态分布, 变换后的序列均在 0.05 的置信水平上通过了正态分布的检验。

2. 主分量分析方法

1) 主分量模型的基本方程

主分量模型可以通过对一个 $n \times p$ 的数据阵 X 进行分解来定义。本研究中 X 阵即为降水资源阵, n 为要素样本观测次数, p 为空间点数。对任意的 i 和 j , 要素 x_i 代表降水量要素的测值。 X 的主分量模型可由一个矩阵形式给出:

$$X = FA^T, \quad (1)$$

式中 $F(n \times m)$ 为主分量(或主分量得分)阵, $A(m \times p)$ 是主分量荷载阵, m 为所取主分量个数, 取值范围在 1— n 之间。若 X 为一经标准化处理后的数据阵, 则作如下定义, 可导出 F 和 A :

$$R \equiv X^T X (p \times p), \text{ (数据相关阵)} \quad (2)$$

$$\Phi \equiv F^T F (m \times m), \text{ (主分量得分相关阵)} \quad (3)$$

$$S \equiv X^T F (p \times m), \text{ (主分量基本结构阵)} \quad (4)$$

经变换, 我们有

$$R = X^T X = AF^T F A^T = A \Phi A^T. \quad (5)$$

(5) 式即是从相关阵出发定义的最基本的主分量分析方程。从统计上讲, 在正交的原则下, 即 $\Phi = F^T F$ 为单位阵 I_m 时, $A\Phi = A$, 方程(5)是主分量荷载阵 A 和基本结构阵 $S = X^T F = A\Phi$ 的组合。

2) 旋转主分量分析

在研究分析中, 往往需要使要素的某一分布特征更加清晰、直观, 以抓住问题的主要特征。这一目的可通过主分量的旋转来达到。满足方程(1)的 F 和 A 的解可以有很多,

没有一定附加条件的限制，则得不到唯一解。可以通过线性变换阵 T ，对主分量及其荷载在不同准则下进行变换，得到多组具有同样性的解。例如，设 $F^* = FT^T$ ， $A^* = AT^T$ ，式(1)变为

$$X = FA^T = FT^T(T^T)^{-1}A^T = F^*A^{*T}. \quad (6)$$

在(5)式中若设 $\Phi^* = T\Phi T^T$ ，则可变为

$$R = A\Phi A^T = AT^{-1}T\Phi T^T(T^T)^{-1}A^T = A^*\Phi^*A^{*T}. \quad (7)$$

由(6)式可知， F 和 F^* 具有同样的特性，其方差贡献一样。若视主分量 F 为 m 个空间坐标基中的基本向量，进行正交旋转，即设这些基本向量相互独立，可得到新荷载阵 A^* ；进行斜交旋转，则设定基本向量之间具有一定相关，按定义此时变换后的 A^* 为主分量基本型矩阵。为方便比较，本文称其为斜交旋转荷载阵，下面分别进行讨论。

a. 正交旋转的极大方差法(Varimax Rotation)

正交旋转共有三种方法，其中极大方差法被认为是最准确的解析代数的正交旋转。其结果是在某个主分量轴上，一些空间点有较高的荷载，另一些空间变量具有较低的荷载。标准化的极大方差判据为

$$V = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{p \sum_{i=1}^p (a_{ij}^{*2} / h_i^2)^2 - \left(\sum_{i=1}^p a_{ij}^{*2} / h_i^2 \right)^2}{p^2} \right\}, \quad (8)$$

V 实际上是 m 个主分量经旋转后方差的总变幅。 a_{ij}^* 为第 j 个主分量旋转在第 i 个空间变量(点)上的新荷载。 $h_i^2 = \sum_{j=1}^m a_{ij}^{*2}$ 称为公因子方差，它反映了 m 个主分量对原空间变量的方差贡献。如果要使得旋转后某一主分量轴上一些变量有高荷载，我们希望转动的结果使总变幅 V 达到极大。

b. 斜交旋转的 Harris-Kaiser Case II B^TB 方法

斜交旋转目前在大气科学中尚甚少应用，国内文献中则基本未见。本文的斜交旋转是用 Harris-Kaiser Case II B^TB 方法，详见文献[4, 16]。其基本思路是根据线性代数中的 Eckart-Young 公理，用标准化正交阵和对角阵来确定变换阵 T 。经过对 T 的分解和设定，旋转后新荷载 A^* 可表示为

$$A^* = VD^{1/2}T_1D_1, \quad (9)$$

式中 V 为一 $n \times m$ 的特征向量阵， D 为旋转所保留的 m 个特征值的对角阵。 D_1 实际上是一个为保证转动后新的主分量具有单位长度的尺度阵。若视 $VD^{1/2}$ 为一主分量荷载阵，可按正交旋转法求出此处的变换阵 T_1 ；类似地， D_1 也可被视为 $VD^{1/2}T_1$ 的变换阵而求出。这样求斜交旋转的变换方法就转化成了解正交变换阵。

三、区域降水分型计算结果的讨论

根据上述三种主分量分析的求解方式，对辽宁夏季月降水进行主分量区域分型，并

对三种方法进行探讨和分析比较.

1. 区域分型的初步计算结果

要想得到具有气候学代表意义的降水区域型，首先需要考虑主分量的截取个数，即把月降水在给定的区域上分多少种型。本文采用的截取方法是 Scree 检验法^[1]，它是将计算出的特征值与其相对应的从大到小的序数作成坐标图，考察特征值随序数的变化，取最后一个明显的转折(突变)点之前的主分量进行分析和旋转变换，所保留的主分量被

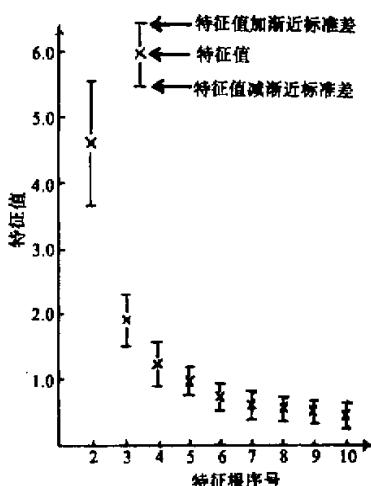


图 1 主分量截取的Scree 检验

认为是原始资料中不受随机信号影响的主要特征。图 1 是计算结果的检验图，第一主分量特征值远大于其它主分量特征值，故在图中略去。为便于检验，把各特征值的渐近标准差也绘出。很明显，以前三个主分量对辽宁夏季降水分型为宜，其累积方差贡献为 77%。

某空间点的主分量荷载实际上表示某一主分量(或影响因素)与该点的要素之间的相关程度。图 2 的 a_1 、 a_2 、 a_3 揭示了辽宁夏季降水的三个最重要的区域分布特征。 a_1 反映夏季辽宁月降水的总体分布，其方差贡献达 62%，除西部部分地区外，荷载值均在 0.60 以上，说明全省夏季月降水均受某一主要因素的影响和控制。 a_2 和 a_3 分别代表辽西与辽东，辽南与辽北的夏季月降水的反相

分布型。尽管非旋转的前三个主分量能反映出一定的降水区域分布型，但不易解释同时也难以用一个简单的标准来作出直观的区域型划分。旋转主分量的气候学意义则比较清晰，如图 2b₁、b₂、b₃ 和 c₁、c₂、c₃。两种旋转主分量相应的荷载分布(例 b₁ 和 c₁)具有比较一致的分布，但在两方面稍有不同。一是斜交旋转的最高与最低荷载点的差值较正交旋转为大；另一区别是相同值的荷载凝聚(例 ≥ 0.60)，正交旋转比斜交旋转稍大。若以相对高荷载区来定义旋转主分量的分布型，第一主分量的高荷载区位于辽东山地和半岛，可视其为东南型；第二主分量是典型的辽西型；第三主分量体现了辽北型。

2. 空间区域型与要素相关场的对比和拟合

用高荷载型进行区域气候分型(或分区)，目的是在一定区域内把要素划分为若干个合理的型，同属于某一高荷载区域型内的点应具有较高的相关，而属不同型区的点之间相关则较差。满足这一关系是所得区域分型结果正确与否的一个最基本的条件。图 3 是以各主分量最高荷载点为参考点的夏季月降水点相关场，我们以此来分析分型结果是否揭示原资料阵的主要特征结构。两种旋转主分量相对应的点相关场重叠，故图 3 中共 6 幅小图。

非旋转主分量的高荷载区在一定程度上反映了原始数据结构的高相关性，但荷载分布

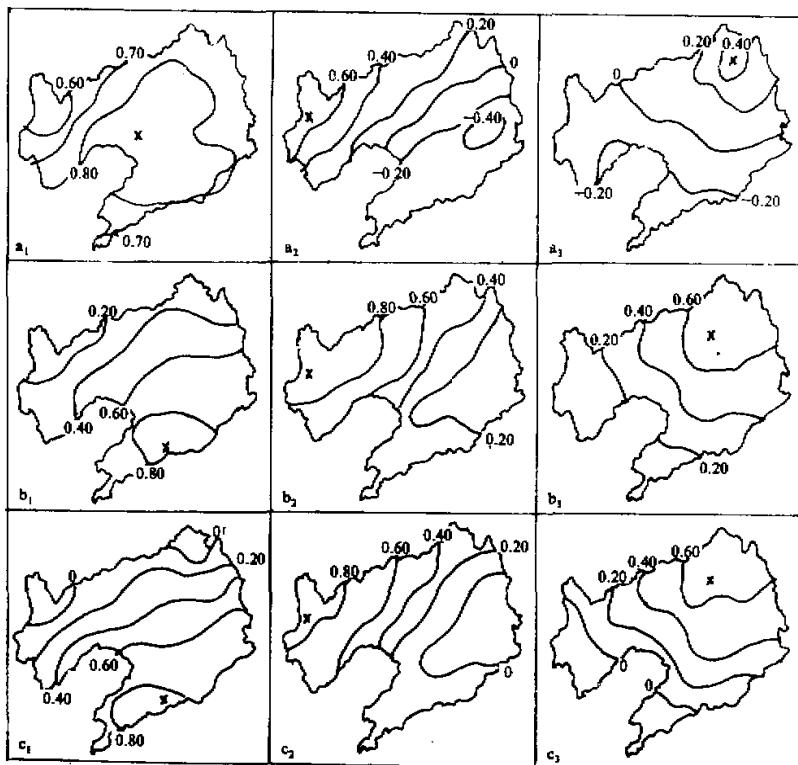


图2 前三个主分量荷载分布

a_1 、 a_2 、 a_3 分别为非旋转第一、二、三主分量荷载分布； b_1 、 b_2 、 b_3 (c_1 、 c_2 、 c_3) 分别为正交(斜交)旋转的第一、二、三主分量的荷载分布，“X”为荷载最高点。

某些特征，如第二、三主分量的荷载区，未能在相应的点相关场中得到解释。比较旋转主分量荷载(图 2b₁、b₂、b₃，c₁、c₂、c₃) 和相应的点相关场(图 3b₁、b₂、b₃)，两者的分布趋势大致相似，荷载型相当好地反映了原始资料的结构特性。高荷载与高相关的区域(例 ≥ 0.60 、 ≥ 0.80) 大体一致。直观上分析认为，旋转主分量的分型明显地优于非旋转主分量的分型结果。

为了定量衡量三种方法的分型结果，本文用相似系数(g) 来对主分量荷载和与其相对应的点相关场进行拟合，其结果见表 1。 g 的定义为

$$g_{ab} = \frac{\sum_{i=1}^p a_i b_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^p a_j^2 \sum_{j=1}^p b_j^2}} , \quad (10)$$

式中 a_i 、 b_i 分别为某主分量荷载和相应的点相关场的向量元素。荷载值的高低是主分量分型识别的一个重要依据， g 则既考虑到相拟合的两个场的分布趋势，同时也考虑

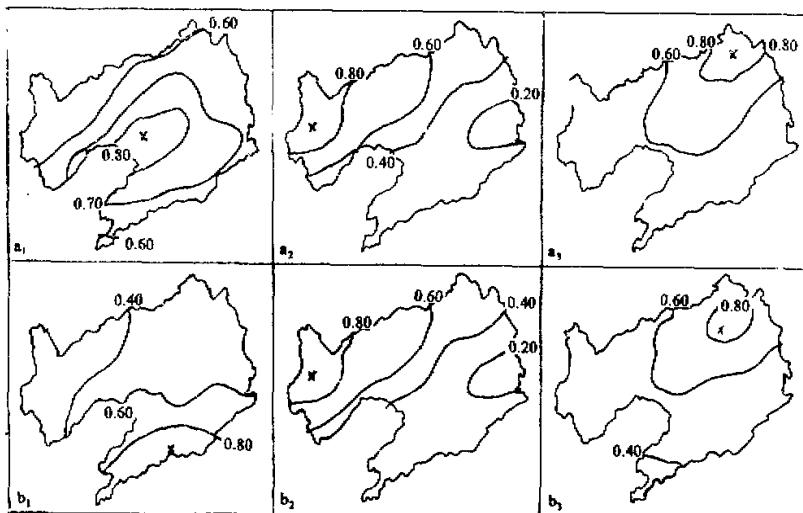


图3 对应各主分量的点相关场

a₁、a₂、a₃为非旋转第一、二、三主分量相对应的点相关场、b₁、b₂、b₃为正、斜交旋转第一、二、三主分量相应的点相关场,“×”为参考点。

表1 相似系数(g)拟合结果

方 法	主 分 量	g		
		1	2	3
非旋转		1.00	0.49	0.16
正交旋转		0.98	0.99	0.95
斜交旋转		0.93	0.94	0.87

各拟合场的具体数值大小的一致性。 g 的评定分级^[3]为：很好 ($0.98 \leq g$)，好 ($0.92 \leq g \leq 0.97$)，一般 ($0.82 \leq g \leq 0.91$)，差 ($0.68 \leq g \leq 0.81$)，极差 ($g \leq 0.67$)。由表1知，非旋转主分量除第1型完好拟合外，其它二型均很糟糕；两种旋转的拟合效果均不错。

斜交旋转稍逊于正交旋转，表1的结果与直观对比的结论基本吻合。

3. 区域分型的合成

得到要素的区域型后，可按一定标准对结果进行合成分析，得到最终的分区结构。

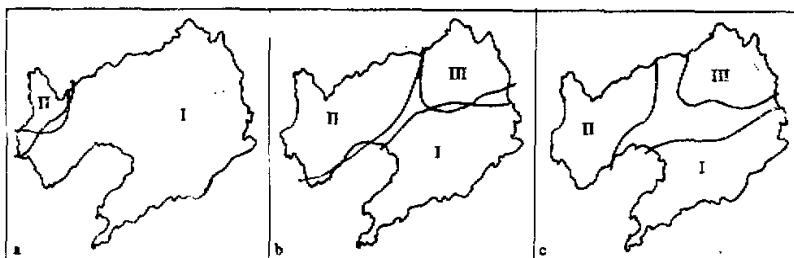


图4 区域降水型合成分区
a. 非旋转 b. 正交旋转 c. 斜交旋转

图4是取图1中 ≥ 0.60 的高荷载区，综合作出的辽宁夏季月降水区域型分区，在本研究中，三个0.60以上的高荷载区尽可能包括了全省区域，同时三个区域型的重叠地带又尽量小，是较佳的分区选择。统计上严格的荷载值截取方法，笔者在另文中进行过研究^[14]，非旋转主分量仅给出二个区域型(图4a)，这种将全省几乎划为一个区域(I型)的结果显然不是我们分区的目的。两种旋转主分量高荷载型的合成(图4b、c)均给出比较有意义的分区，正交旋转的三个区几乎覆盖全省，其中I和II型在中部地区略有重叠，斜交旋转各区的范围比正交旋转为小，在辽宁中间的地区出现了一个形似倒丁字的狭窄地带不包括在三个区域型之内，该地带可视为各区域之间的过渡地带。

四、区域分割和Monte-Carlo模拟的统计检验

一种统计方法是否能够有效地解决气候分析问题，一方面是分析该方法能否给出具有气候学意义的结果，另一方面还要考察其结果的稳定性如何。下面通过两种统计试验来检验主分量分析方法对空间区域大小和样本长度变化的敏感性。

1. 区域分割试验

区域分割试验是以一条分界线将辽宁省划为两片小区，对各小区作与上述辽宁全区夏季月降水分型同样过程的计算，再将两小区的分型合成到整个区域上，来检验小区合成的分型能否反映出图4中的区域分型。图5为合成的结果，分界线如图5a中的虚线所示，其选取原则是将辽宁分为两个大致相等的区域，东、西区的站点数分别为25、22。计算取各区的前二个主分量，E1、E2和W1、W2分别表示东和西区第一、二主分量高荷载凝聚区(≥ 0.60)。由图5可见，非旋转主分量分型失去了原图4a中的

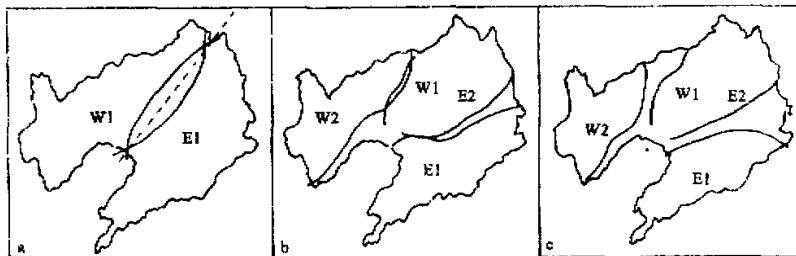


图5 区域分割的降水主分量分型合成图

a: 非旋转，b: 正交旋转，c: 斜交旋转。

II型，区域的变化使得分型的结果也发生明显变化，两种旋转主分量分型(图5b、c)均与图4b、c中的分布大致相同，E1相对应为I型，W2相对应为II型，而W1+E2则合成为III型。可以说，将区域分割后的旋转主分量分型进行合成仍可重现全区的区域分型结果，但是仍存在少许差别，正交旋转的E1和W2型的边缘较图4b中I、II型分别向南和向西稍有延伸，W1+E2型则明显地南伸。斜交旋转分区合成的结果变化最小，相对最明显的变化是W1+E2型包括了图4c中的大部分倒丁字形的中间过渡带，综上

知，旋转主分量的分割试验中 III 型变化最大、这与分界线从该区穿过有关。就区域分割分型的稳定性而言，斜交旋转稍优于正交旋转方法。

2. 区域分型拟合的统计检验

本文所用的资料，实际上是一个抽自某个总体中的长度为 90 的样本。统计计算的结果要受到抽样误差的影响。在此我们以现有的数据为基础，用 Monte-Carlo 随机抽样，建立小样本数据阵，来检验各种方法的分型拟合精度对样本变化的敏感性。抽样过程用 Bootstrap 方法完成，该法详细的统计描述请参见文献 [15]。具体步骤为：从现有的 90 个样本中，进行每组为 M 次抽样 (M 为 20, 40, 60 和 80)，构成新的数据阵 $X(M, 41)$ 。在一组的 M 次反复抽样中，一些样本可能重复被抽取两次以上，而另一些样本则可能被完全忽略。对于四种样本长度，各做 30 组抽样，由此产生了 120 个 X 阵。对所有的 X 阵均进行三种主分量分析计算，并对前三个主分量的荷载型与其最高荷载点相对应的点相关场作 (10) 式的相似性拟合。表 2 给出了拟合结果， g 值是各种方法的三个区域型拟合精度在各样本长度标准下的总平均值。结果表明，样本的大小对拟合精度没有影响，显示了主分量分析方法在区域气候分型应用中对样本差异的稳定性相当好。非旋转主分量的拟合极差，正、斜交旋转的统计试验结果均不错，其拟合精度级别为好 (0.92—0.97)，仅样本为 40 的斜交旋转拟合精度一般 (0.91)。对平均值的统计检验表明，正交旋转的四种样本拟合精度均在 0.05 的显著水平上，优于斜交旋转。

表 2 抽样试验拟合精度

样本 长度 g	方法	非旋转	正交旋转	斜交旋转
20		0.61	0.97	0.92
40		0.57	0.97	0.91
60		0.58	0.97	0.92
80		0.57	0.97	0.92

表 3 抽样试验拟合精度各级别的频次分布

方法 g	级别	很好	好	一般	差	极差
非旋转		120	1	9	12	218
正交旋转		225	123	10	1	1
斜交旋转		12	179	169		

在总共的 120 组随机试验中，共得到 1080 个区域型的相似拟合。表 3 是三种方法分型拟合精度值在各评定级别中出现的频次。非旋转主分量的分型拟合约三分之二是极差，另三分之一为很好，拟合效果的极差甚大；正交旋转约 97% 的分型拟合精度为很好或好，但偶尔也出现极差的分型；斜交旋转的拟合精度多为好和一般，但它却是拟合最稳定和保险的方法，无差或极差的分型出现。

五、结语和讨论

在要素的区域性气候分析研究中，主分量分析方法是一个很有效的统计分析工具。旋转主分量的气候分型结果很好，其气候学意义简明、直观；非旋转主分量虽然揭示了空间要素分布的某些主要特征结构，但在解决气候要素的区域划分和分类方面却无能为力。计算发现，旋转主分量的分型结果反映出要素较高的空间相干区，并能通过相应的点相关场得到相当好的解释；而非旋转主分量分型的拟合效果不佳。方差极大法的正交

旋转荷载型拟合精度优于 Harris-Kaiser Case II $B^T B$ 斜交旋转的结果, 旋转主分量分析方法受区域范围的变化影响不大, 其结果取决于原始资料的相关阵, 尤其是 Harris-Kaiser Case II $B^T B$ 的斜交旋转法更为稳定; 非旋转主分量方法则受区域变化的干扰影响较大, 样本长度变化对三种方法的分型拟合无明显的影响。

本文的研究只限于非旋转主分量方法和两种大气科学研究中比较常用的旋转主分量分析方法。随着主分量分析的应用不断深入广泛, 对其它旋转方法的试验研究也将是很必要的。另外, 本研究所表明的旋转与非旋转主分量之间的差异仅限于对问题的分析和解释的方法、及所要达到的目的的不同。

参 考 文 献

- [1] Buell, C. E., 1975. The topography of empirical orthogonal function. Preprints of Fourth Conf. on Prob. and Stats. in Atmos. Sci., Amer. Meteor. Soc., 188—193.
- [2] Buell, C. E., 1979. On the physical interpretation of empirical orthogonal functions. Preprints of Sixth Conf. on Prob. and Stats. in Atmos. Sci., Amer. Meteor. Soc., 112—117.
- [3] North, G. R., T. L. Bell, R. F. Cahalan and F. J. Moeng, 1982. Sampling errors in the estimation of empirical orthogonal functions. *Mon. Wea. Rev.*, **110**, 669—706.
- [4] Richman, M. B., 1986. Rotation of principal components. *J. Climatology*, **6**, 293—333.
- [5] Richman, M. B. and P. J. Lamb, 1985. Climatic pattern analysis of 3- and 7-day summer rainfall in central United States: Some methodological considerations and regionalization. *J. Clim. Appl. Meteor.*, **24**, 1325—1343.
- [6] Kutzbach, J. E., 1967. Empirical eigenvectors of sea level pressure, surface temperature and precipitation complexes over North America. *J. Appl. Meteor.*, **6**, 791—802.
- [7] Walsh, J. E. and A. Mostek, 1980. A quantitative analysis of meteorological anomaly patterns over United States, 1900—1977. *Mon. Wea. Rev.*, **108**, 615—624.
- [8] 陈烈庭、严邦良, 1989. 北太平洋海平面气压的 EOF 分析与北方涛动, 大气科学, **13**, 38—43.
- [9] 麦能, 1988. 我国秋、冬降水, 气温场的时空结构特征及其在我国初夏降水预报中的应用, 大气科学, **12**, 283—291.
- [10] 黄嘉佑, 1988. 准两年周期振荡在我国月降水量中的表现, 大气科学, **12**, 267—273.
- [11] Huang Jiayou, 1990. Correlations between sea surface temperature in Easter equatorial Pacific and rain days over China in Summer. *Adv. in Atmos. Sci.*, **7**, 127—136.
- [12] 李超, 1990. 我国汛期降水特征结构, 年际变化及气象跃变, 成都气象学院学报, 第4期, 20—26.
- [13] Cattell, R. B., 1966. The scree test for the number of factors. *Multivar. Behav. Res.*, **1**, 245—276.
- [14] Richman, M. B. and Xiaofeng Gong, The effects of various sized cutoff loadings on the accuracy of PC regionalizations. *J. Climate* (待发表).
- [15] Wu, C. F. J., 1986. Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *Ann. Stats.*, **14**, 1261—1350.
- [16] 黄嘉佑, 1990. 气象统计分析与预报方法, 气象出版社, 170—217.

A Study of Statistical Experiment for the Application of Principal Component Analysis to Regional Climate Patterns

Gong Xiaofeng

(*Meteorological Bureau of Liaoning Province, Shenyang, 110001*)

M. B. Richman

(*Cooperative Institute for Mesoscale Meteorological Studies University of Oklahoma, U.S.A.*)

Abstract

The principal component analysis has been applied frequently in the field of atmospheric sciences nowadays. There has not been much work on its applicability and reliability in the Chinese literature of atmospheric research. In this paper, three techniques, i.e., the unrotated principal component analysis, Varimax of orthogonal rotation and Harris-Kaiser Case II B^TB of oblique rotation are compared for the regional climate pattern analysis and the accuracy fitted. The Monte-Carlo simulations and area separation tests are also carried out. The results show that, two rotated principal component methods are better while the unrotated principal component is not very accurate. The orthogonal rotation method gives slightly better results than the oblique rotation with the summer rainfall data of Liaoning Province. The patterns of the rotated principal component do not change very much with the change of area, the unrotated principal component fails in the test of changing area. The three techniques are all independent of the selection of sampling sizes.

Key words: Principal component analysis; Orthogonal rotation; Oblique rotation; Regional climate pattern analysis.