第17卷 第2期
1993年3月

大气科学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol.17, No.2
Mar. 1993

关于大气系统中的熵演化方程

—— 答"'大气中的耗散结构与对流运动'一文商榷"

钱维宏

（兰州大学大气科学系，730000）

提　要

本文从三个方面回答了文[1]中提出的一些问题．阐述了熵平衡方程在大气科学中的具体应用与一般抽象描述的不同，并指出应从事物发展和演变的物理过程上辩证地去理解大气系统中熵演化方程的具体含意，最后还对与物理概念有关的数学问题作了讨论．

关键词：熵演化方程；非平衡线性区；数学物理问题．

编辑部转来了赵佩章和符长锋同志的"商榷"[1]一文，我觉得有必要作出答复的不完全是有关拙作的论点，而是非平衡态热力学这一理论怎样更准确地应用到大气科学中来，从这个意义上来讲，赵、符二位提出来与学者们讨论的，那确是值得的，我也想从这类学术争鸣中得到教益．

赵、符所提三点意见[1]的实质性内容可概括如下：

1. 熵平衡方程是否对于任何情况都是适用的？
2. 从字面上和物理上怎样理解熵平衡方程？
3. 要澄清的数学问题和物理问题．

下面就从这三个方面作回答．

一、关于熵平衡方程的适用性问题

在回答文[1]中问题1之前，我们有必要简单回顾一下热力学发展的历史．经典热力学的三大定律是论述平衡状态和从一个平衡状态到另一个平衡状态的过程，即可逆过程的．这些定律只是给出了发展方向，并没有给出不可逆过程进行的速度(快慢)．弥补这一不足的是40年代发展起来的非平衡态线性区热力学理论，其主要功绩应归功于翁萨格(Lars Onsager)30年代发表的描写不可逆过程唯象定律中各系数间的著名"倒易关系"．40年代普里高津(I．Prigogine)等人具体地应用了这一倒易关系，从而建立了统一的不可逆过程线性区理论．根据普里高津的最小熵产生原理，线性区热力学的性质决定了在此范围内不可能出现有序结构，亦即具有抗扰能力[3]．至于热力学后来发展到了第三步，非平衡非线性热力学，赵、符二位没有提及，这里也就不作回

1992年6月15日收到．

顾．作者在文[2]中要证明的是具体意义下的大气系统中的熵平衡方程不但来之于而且也只能适用于非平衡线性区．我们知道对一个平衡定态下的实验室流体系统来说，所谓的熵平衡方程“是说一个系统的熵增加率，等于在单位时间外界进入系统内的熵(熵流)和系统中的不可逆过程所产生的熵(熵产生)的和”[1]．但对描写地球流体——大气的熵平衡方程，这样的说法还不完全，这是由于大气中包含着水汽的凝结等物理过程及其它能量形式之间的转换，同在一个系统中这种能量形式的变化与转换都可改变系统内熵的变化．如文[2]中的(4)式

$$\rho\frac{dS}{dt}=\frac{\lambda}{T}\nabla^2T-\frac{1}{T}\sum_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\pi_{\alpha,\beta}}{\rho_\alpha}\right)-\frac{1}{\rho_\alpha}\frac{\partial\pi_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right]-\nabla\cdot\overrightarrow{J_s}+\sigma, \tag{1}$$

(1)式中右边前两项就反映了大气中温度 T 和第 α 种物质的耗散压强张量在空间 β 中的分布结构差异所引起的系统内部的熵变．去掉(1)式中的这两项得

$$\rho\frac{dS}{dt}=-\nabla\cdot\overrightarrow{J_s}+\sigma, \tag{2}$$

这就是系统内熵的变化等于单位时间外界进入系统内的熵流 $-\nabla\cdot\overrightarrow{J_s}$ 和系统中的不可逆过程的熵产生．

$$\sigma=-\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{J_k}\cdot\nabla\left(\frac{\mu_k}{T}\right)+\sum_{\theta=1}^{r}\omega_\theta\frac{A_\theta}{T}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{J_k}\cdot\overrightarrow{X_k}+\sum_{\rho}J_\rho X_\rho, \tag{3}$$

其中 $\overrightarrow{J_k}$ 和 $J_\rho=\omega_\theta$ 为广义流，$\overrightarrow{X_k}=-\nabla(\mu_k/T)$ 和 $X_\rho=A_\rho/T$ 为广义力．(3)式表明熵产生等于系统中发生的各种不可逆过程的广义力与广义流的乘积之和．把唯象关系 $J_i=\sum_j L_{i,j}X_j$，i，$j=1$，2，…，n 代入(3)式，可得

$$\sigma=\sum_{i,j}L_{i,j}X_iX_j\geqslant 0, \tag{4}$$

其中 $L_{i,j}$ 称为唯象系数，具体地讲就是对一些不可逆过程可以用比例关系的形式来描述，这些就是唯象的经验定律，如表达热流和温度梯度成正比的热传导定律 $\overrightarrow{J_q}=-\lambda\nabla T$ 以及表达物质流和密度梯度成正比的扩散定律 $\overrightarrow{J_m}=-D\nabla\rho$ 等．其中 $\overrightarrow{J_q}$ 和 $\overrightarrow{J_m}$ 为广义流，它是由相应的广义力 ∇T 和 $\nabla\rho$ 所产生．在以上的分析中无论从唯象系数，还是从具体的唯象经验关系都告诉我们，广义流和广义力的关系只能是一种不可逆过程的线性关系．也就是熵平衡方程(1)是从非平衡线性区内导出的．但在大气中当水平温度梯度加大使大气中斜压性加大，这时靠“原有的输送机制(线性扩散)已不能把它们充分地疏散开，结果各种场的梯度加大，一种新的有序的输运机制即要产生[3]．这种新的有序的输运机制就是在斜压锋区上出现的斜压波动．这种由水平温差达到一定程度导致的斜压波动所输运的动量、热量，不是任何形式的仅含有一些线性关系的熵平衡方程所能描述的．这就是为什么有那么一些气象学家长期从事于斜压波不稳定及其对涡旋热通量参数化研究的原因[4-6]．至此应该明了具体形式下大气中的熵平衡方程就像热力学第一定律一样，只能在一定范围内适用；也就像牛顿力学那样，只能适用于速度远小于光速时的情形一样．

至于赵、符二位所提到的熵平衡方程

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt} \ , \tag{5}$$

“是说一个系统的熵增加率(dS/dt)，等于在单位时间外界进入系统内的熵(熵流 d_eS/dt)，和系统中的不可逆过程所产生的熵(熵产生 d_iS/dt)的和”．事实是此式对于任何情况都适用，人们不但应用它来解释热力学过程中的线性和非线性问题，还用它来解释生态系统和社会系统的演变．大凡用此式而没有针对性的具体表达式的都只是抽象地涉及到一些制约关系．而作者在文[2]中所引用的是大气系统中熵演化方程的具体表达式，这些表达式中的熵产生 σ 都可写成(4)式的形式．因而，这些具体表达式的适用范围只能在大气的线性区内．赵、符二位提出的熵平衡方程的适用范围倒是向我们提出了一个严肃的问题，即应用时如何具体化．

二、对熵平衡方程的理解问题

文[1]的意见1中说“熵平衡方程不是像钱文所理解的，系统的熵变化率等于零．”又在意见3中说“钱文的错误出自对熵平衡方程的理解有误．”不！不存在理解上的错误．我以为在表述平衡态热力学、非平衡线性热力学和非平衡非线性热力学的公式中，要算描述非平衡线性热力学的熵平衡方程所具有的哲学意义最清晰．至于在熵平衡方程的理解上存在一些不同的观点是可以理解的．众所周知，当初热力学第二定律的提出，其表述方式就有好几种说法．如今我们仍然可以从这些不同的角度来理解这个定律．且被看作是自然的事．关于这点，必须指出的是在文[2]中没有一处出现如赵、符二位所说的：系统的熵变化等于零，即

$$\rho \frac{dS}{dt} = 0 \quad , \tag{6}$$

或等价的

$$-\nabla \cdot \vec{J}_s + \sigma = 0 \tag{7}$$

的形式，怎么会有“系统的熵产生等于负熵流”的理解呢？！我们应该动态地、辩证地去理解熵平衡方程的完整形式，这样才能准确、客观地应用它来解决实际工作中的具体问题．例如长期从事短期天气预报的人们都深有体会，暴雨发生前不敢报暴雨，暴雨发生了再报暴雨时，又不出现暴雨了．这就是常常被老天爷牵着鼻子走．为什么？我以为是由于人们对大气中的耗散结构与对流运动缺乏认识．我们已经能够看到熵平衡方程能辩证地描述这个过程．系统中有负的熵变，即先有(1)式中前三项之和小于零，此时没有熵产生(暴雨发生前)，但这种情况不可能长久维持，因为大气偏离平衡后有自发的适应(回复)功能．而后被动地有熵产生的出现，成为暴雨的机制．与熵产生同时出现的暴雨，在 $\frac{1}{\rho}\frac{dS}{dt}<0$ 后何时发生不是预先知道的，根据个例计算这个时差大约是12—24小时[7]．如暴雨已发生，是否能维持，这又要看(1)式中右端前三项与熵产生 σ 的相对大小而定，具体地说来就是看：

$$\frac{\lambda}{T}\nabla^2 T - \frac{1}{T}\sum_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\pi_{\alpha,\beta}}{\rho_\alpha} - \frac{1}{\rho_\alpha}\frac{\partial \pi_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right)\right]$$

$$-\nabla\cdot\vec{J}_s+\sigma\begin{cases}>0, & \text{未来暴雨减弱或结束,}\\ =0, & \text{暴雨仍维持(前三项之和不为零),}\\ <0, & \text{未来暴雨还会增强.}\end{cases} \quad (8)$$

注意，此式中等于零的情形也不与(7)式等价．利用这一关系只能对未来的降水作出估计，定量的降水预报还得依赖于数值预报模式或诊断分布．同样地要用文[2]中的(17)式考察一个局地热对流，其基本思想过程也大致相同，绝不能认为$(\lambda/T)\nabla^2T<0$的同时就有$\sigma>0$，否则就认为不满足熵平衡方程了，这个辩证思想在商榷时必须掌握．$(\lambda/T)\nabla^2T<0$可作为对流发展的判据，实质上就是对状态未来发展方向的一个诊断或估计(这就象里查逊数可用来作为有可能出现对流发展的判据一样)．我认为对上述方程(1)，或文[2]中由(1)式简化后得到的大气系统中的熵平衡方程(16)称之为熵演化方程更合理，若称它为熵平衡方程就会使人不能从物理过程上去理解它的含义，而易从字面上去猜疑．

赵、符二位提出商榷的核心所在是对作者在文[2]中对(17)式所作的讨论提到的"熵不平衡"一语的不理解．赵、符二位认为这里的"熵不平衡"就是不满足熵平衡方程了．其实不然，方程(1)右端中由于负熵与熵产生σ在量值上不等，是为熵不平衡，也即正、负熵值不平衡，这就有熵变．如果熵值平衡，又分为动态平衡($\sigma\neq0$)和定态平衡($\sigma=0$)，这两种平衡下的大气状态是不一样的．我想如果能对动力气象中地转平衡与非地转运动，静力平衡与非静力平衡的概念和辩证关系有一个较好的理解的话，那是有助于理解熵平衡方程的．

三、关于数学问题和物理问题

首先是关于微分方程的适用性问题．作者在答1中已指出，对于形如(5)式的熵平衡方程总是适用的，但所给出的具体应用中的熵平衡方程[2]与"微分方程对于线性曲线和非线性曲线都可以用"的说法是风马牛不相及的．微分方程分为常微分方程和偏微分方程，又有线性和非线性之分，不能认为对同一个确定的微分方程同时满足线性曲线和非线性曲线，否则就成为确定的微分方程其解不唯一了．事实上，解决常微分方程问题要比解决偏微分方程问题容易得多，笼统地讲"微分方程对于线性曲线和非线性曲线都可以用"是不恰当的．举例说，牛顿第二定律可写成微分式$d\vec{V}/dt=\vec{F}/m$，但具体问题下的微分方程可能是线性的，也可能是非线性的，其形式可能是双曲线、椭圆或抛物线型的．这类问题在动力气象中是常见的，为了解决不同的具体问题对原始方程所作的简化形式是各不相同的，可由不同的简化式得到不同的解．

其次是关于能量守恒方程的有关问题．由文[8]中的推导，在短期内大气可看作为绝热无摩擦的，则湿空气总能量方程的变化可写成

$$\frac{d}{dt}(c_pT+gz+v^2/2+Lq_s)=0, \quad (9)$$

其中$c_pT+qz+v^2/2+Lq_s=P/\rho+c_vT+qz+v^2/2+Lq_s$称之为湿总能量，是一个随时间不变的状态量．因此，我们就可以写成

$$\frac{P}{\rho}+c_vT+gz+v^2/2+Lq_s=\text{常数} \tag{10}$$

的形式．正象对位温方程取对数再微分一样，我们也可以用(10)式求对任一变量的微分或导数，如考虑它的空间分布

$$\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(p/\rho)=-\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(c_vT+gz+v^2/2+Lq_s), \tag{11}$$

(11)式左边含有大气中不直接测量的密度ρ，而右边都是可测量的或可计算的．因此，由这一等式关系，可用定容等熵温度 T_σ 消去 ρ．(11)式的意义在于系统内大气中压力头(压能)在空间上的增加等于系统内内能、位能、动能和潜热能的总和在该方向上的减小．由于赵、符二位没有仔细看文[2]，以致提出"大气压强就等于这些能量的负值加一常值"的说法，并给出了

$$P=-\rho c_vT-\rho gz-\rho v^2/2-\rho Lq_s+\text{常数} \tag{12}$$

的表达式，如果认为此式是赵、符二位从(10)式得到的，其做法仅仅是用 ρ 乘(10)式各项，(12)式中应出现"ρ · 常数"的项，此项的意义并不明白，这样做也没必要．

此外，文[2] 中(16)式是针对具体问题简化后得到的大气系统中的熵平衡方程，其目的是要作出对降水预报的诊断．因此对有降水的情形 $d\rho_v/dt<0$，但对无降水的情形并不在作者论证之列．

四、结　语

作者可对以上三点意见的答复总结如下：

(1) 赵、符二位所提出的熵平衡方程与文[2] 中具体意义下大气系统中的熵平衡方程已成为一个一般与特殊的问题，前者是抽象的描述，后者是基于线性假定下的具体应用；

(2) 我们不应当从字面上，而应从事物发展、演变的物理过程中辩证地去理解熵演化方程的具体含义．

(3) 数字是科学的语言．人们在探讨科学问题时，对新科学的理解使用不同的语言是自然的，单纯意义上的精确化是必要的，但不是本质，而重要的是如何应用它．我们应该用数学的手段来描述物理的本质，并仔细推敲和领悟结果中的公式或方程的含义．

参　考　文　献

[1] 赵佩章、符长锋，1993，"大气中的耗散结构与对流运动"一文商榷，大气科学，第17卷2期．

[2] 钱维宏，1992，大气中的耗散结构与对流运动，大气科学，第16卷1期，84－91．

[3] 仪垂祥，1989，大气系统中的熵，大气科学，第13卷3期，367－372．

[4] Held，I．M．，1978，The vertical scale of an unstable baroclinic wave and its importance for eddy heat flux parameterizations，*J．Atmos．Sci*．，35，572－576．

[5] Stone，1974，The meridinal variation of the eddy heat fluxes by baroclinic waves and their parameterization，*J．Atmos．Sci*．，31，444－456．

[6] Dai Xingang and Chou Jifan, 1991, Transient eddy flux, nonlinear polytropic parameterization, Annual Report of LASG, Institude of Atmospheric Physics, Academic Sinica.
[7] 钱维宏、王肖成，1990，一次间断暴雪过程的熵诊断分析，空军气象学院学报，第11卷2期，67—72.
[8] 杨大升等，1983，动力气象学(修订本)，气象出版社，307.

On the Entropy Evolution Equation in the Atmosphere Systems —— In Reply to "Discussion of 'The Dissipation Structures and Convective Motions in Atmosphere'"

Qian Weihong

(Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou 730000)

Abstract

This paper has answered some questions raised by paper [1] in three aspects. It has been clarified that the concrete application of the entropy equilibrium equation in the atmospheric sciences is different from its general abstract description and shown that we should understand dialectically concrete implication of the entropy evolution equation in the atmosphere from the physical processes of the developement and evolution of things. Finally, some mathematical problems concerning physical concepts have been discussed.

Key words: Entropy evolution equation; Non-equilibrium linear region; Mathematical problem and physical problem.