分解算法中的两个问题

姚建国　廖洞贤
（国家气象局，北京　100081）

提　要

文中指出了分解算法中的两个问题：(1) 为了使算法获得最佳效果，除按快、慢过程分解方程外，进一步的分解应按什么原则？(2) 时间离散是否可以任意，如果不然，应采取什么形式？针对这两个问题得到的研究结果是：和一般设计简化模式一样，分解后的方程应保持原方程的重要物理性质，特别是其整体性质(如能量守恒和质量守恒等)，而且，其分解后方程的解还应和原方程的解一致，至少对其中重要的解应一致．至于时间离散，在差分的情况则应采用二时间层格式；如采用三时间层格式，则会导致差分方程(或差分微分方程)和偏微分方程的不相容．

关键词：分解算法；整体性质，相容性．

一、引　言

1968年Marchuc曾提出，把原始流体动力学方程组分解成两个方程组，其中一个描写平流过程，另一个描写适应过程[1]．我们知道，对原始方程进行时间积分时，运算量最多的是非线性平流项．如方程分解，则可以对描写平流过程的方程按风速取时间步长，从而，减小整个时间积分过程的运算量．1976年，Burridge[2], Messinger和Arakawa[3]也曾讨论过这种方法．1978年，Gadd曾成功地把它用于英国气象局的10层原始方程业务模式[4]．对于平流过程，采用的差分方案是显式、修正的二时间层Lax－Wendroff格式；对于适应过程，采用的是向前向后格式，其中包括大尺度凝结、积云对流和地表的感热交换等；还专门把地表摩擦作为另一过程处理．1980年，陈秋士讨论了分解算法的数学基础和计算问题[5]．1984年曾庆存等曾利用分解算法构造过能完全保持能量守恒的时空差分格式[6]．他们还把在适应过程中沿x和y方向的重力波传播和惯性振荡分开。1988年加拿大气象中心甚至把其有限域、有限元业务预报模式分解为绝热、水平扩散、垂直扩散和其他物理过程等四个阶段，而且，还采用蛙跃格式．

根据以上情况，可以认为，如下两个问题尚未搞清，即：

1. 除了按快、慢过程分解方程外，进一步的分解应按什么原则？
2. 是否可以采用任意的时间离散形式？

下面我们就针对这两个问题依次进行讨论．

二、分解的原则

模式设计的一条基本原则是：模式应具有和完全方程组同样的(或类似的)重要物理

1991年6月18日收到，8月30日收到修改稿．

性质．同样地，对于分解算法，我们也应该要求：分解后的方程应保持原方程组的重要物理特性．以浅水波方程为例，它具有总质量和总能量守恒的性质，可以描写慢波和重力惯性外波的传播等；但如分解不当，则这些性质都会受到歪曲．

1. 在经典的分解算法中存在的问题

浅水波方程的矩阵形式是

$$\frac{\partial X}{\partial t}+AX=0, \tag{1}$$

其中 $X=(u, v, \varphi)^T$, T 表示转置，$A=B+C+D$,

$$B=\begin{pmatrix} u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \varphi\frac{\partial}{\partial x} & \varphi\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} 0 & -f & 0 \\ f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这时有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tilde{A}}\frac{\varphi}{g}\left(\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)d\,\tilde{A}=0, \tag{2}$$

其中 $\tilde{A}$ 是计算域，$d\tilde{A}$ 是面积元素．

如果把方程(1) 按平流阶段和适应阶段分解，则分解后的方程是

$$\frac{\partial x}{\partial t}+BX=0, \tag{3}$$

或

$$\frac{dX}{dt}=0, \tag{3$'$}$$

以及

$$\frac{\partial X}{\partial t}+(C+D)X=0, \tag{4}$$

这里 $d/dt=\partial/\partial t+u\partial/\partial x+v\partial/\partial y$.

于是，从方程(3)我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi k+\frac{\varphi^2}{2}\right)=-\vec{V}\cdot\nabla\left(\varphi k+\frac{\varphi^2}{2}\right), \tag{5}$$

从方程(4)我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi k+\frac{\varphi^2}{2}\right)=-\nabla\cdot\frac{\varphi^2}{2}\vec{V}-\left(\varphi k+\frac{\varphi^2}{2}\right)\nabla\cdot\vec{V}, \tag{6}$$

其中 $k=(u^2+v^2)/2$.

易见，这时只要方程(3)和(4)的离散化方案不能使(5)式右端项的全域和与(6)式右端第2项的全域和相互抵销，则总能量守恒性质就不能保持.

同样，从方程(3)还有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\vec{V}\cdot\nabla\varphi, \tag{7}$$

从方程(4)还有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\varphi\nabla\cdot\vec{V}. \tag{8}$$

和上面一样，这时只要(7)式和(8)式的离散化方案不能使它们各自右端项的全域和相互抵销，则质量守恒就不能保持.

不过，如我们像曾庆存等[6]那样，作变量替换

$$U=cu\qquad V=cv,\qquad \varphi=\varphi, \tag{9}$$

把方程(1)分解为

$$\frac{\partial U}{\partial t}=fV-c\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-fU-c\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\nabla\cdot c\vec{V}^*, \tag{12}$$

和

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{1}{2}(\nabla\cdot U\vec{V}+\vec{V}\cdot\nabla U), \tag{13}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{1}{2}(\nabla\cdot V\vec{V}+\vec{V}\cdot\nabla V), \tag{14}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \tag{15}$$

则总能量守恒和总质量守恒仍然可以保持(证明可参看文献[6]).这里$c=\sqrt{\varphi}$, $\vec{V}^*=U\vec{i}+V\vec{j}$.

2. 适应阶段方程再分解的问题

有时，为了提高计算效率，还需把描写适应阶段的方程进行再分解. 譬如，把方程(4)分解为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=fv, \tag{16}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-fu, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{18}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0. \tag{21}$$

用常数f_0代替f，用φ的平均值$\overline{\varphi}$代替(18)式右端的φ，则上两方程组各可以化作

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-f_0\delta, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t}=f_0\zeta, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=-\overline{\varphi}\delta, \tag{24}$$

和

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t}=-\nabla^2\varphi, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0, \tag{27}$$

其中$\zeta=\vec{k}\cdot\nabla\times\vec{V}$, $\delta=\nabla\cdot\vec{V}$, $\nabla^2=(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$.

用F表示ζ, δ或φ，且

$$F=\sum_{m,n} F_n^m \exp\left[\,i\,(mx+ny-\omega t)\right], \tag{28}$$

则从方程组(22)—(24)和(25)—(27)，我们各有

$$GW=0, \tag{29}$$

和

$$HZ=0, \tag{30}$$

其中$W=(\zeta^{*m}_n, \delta^{*m}_n, \varphi^{*m}_n)^T$, $Z=(\zeta^m_n, \delta^m_n, \varphi^m_n)^T$,

$$G=\begin{pmatrix} -i\omega & f_0 & 0 \\ -f_0 & -i\omega & 0 \\ 0 & \overline{\varphi} & -i\omega \end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix} -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & -(m^2+n^2) \\ 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix}.$$

要使齐次方程(29)有非零解，须

$$|G|=0, \tag{31}$$

故

$$\omega_1=0,\quad \omega_{2,3}=\pm f_0.$$

即方程(29)不含有重力波.

同样，要使方程(30)有非零解，须

$$|H|=0\ , \tag{32}$$

故

$$\omega_i=0,\ i=1,\ 2,\ 3.$$

即方程(30)仍不含有重力波.

显然，上面的分解把原方程(4)的性质歪曲了，这是不允许的.

不过，也可以把方程(4) 分解成

$$\frac{\partial X}{\partial t}+CX=0, \tag{33}$$

和

$$\frac{\partial X}{\partial t}+DX=0. \tag{34}$$

从方程(33)可以推得在形式上和(6)式完全一样的能量方程；而从方程(34)还有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi k+\frac{\varphi^2}{2}\right)=0. \tag{35}$$

所 以，如以方程(33)的积分结果作为方程(34)的初值，则总能量应当和方程(4)未分解时得到的总能量相同.

同样，还可以看出：从方程(33)和(34)得到的总质量和从方程(4)得到的相同.

至于解的性质，如方程(33)第2项中的 φ 仍用平均值$\overline{\varphi}$代替，则用和前面相似的方法，可以得到

$$\omega_1=0,\ \omega_{1,2}=\pm\sqrt{(m^2+n^2)\overline{\varphi}}\ ,$$

即解中含有外重力波. 而从方程(30)还有

$$\omega_1=0,\ \omega_{1,2}=\pm f_0\ ,$$

即解中含有惯性波.

所以，上面的分解是把方程(4)含有的外重力惯性波分解为外重力波和惯性波了.

不过，总的说来，这种分解对方程(4)的物理性质还是保持得较好的.

三、时间离散形式

1. 计算波问题

如所知，时间离散通常都采用差分形式. 在数值天气预报中一般用的是三时间层格式，也有用二时间层格式的. 对于前者会产生周期近于二倍步长的计算波；对于后者则没有这种现象，但其时间截断误差较大. 我们知道，在原始方程差分模式中，时间截断误差相对于空间截断误差，小到可以忽略的程度[7, 8]. 因此，时间截断误差问题可以不必考虑，而计算波问题却显得比较突出。这说明了在分解算法中如采用三时间层格式，则必须进行时间滤波，否则计算结果是很难令人满意的。

2. 不同阶段时间离散形式的协调

把方程(1)中的矩阵 A 写成

$$A=A_1+A_2, \tag{36}$$

则引用分解算法相当于将其分解为

$$\frac{\partial X}{\partial t}+A_1X=0, \tag{37}$$

和

$$\frac{\partial X}{\partial t}+A_2X=0. \tag{38}$$

为了简便，不妨只看用方程(37)和(38)各只积分一步且步长相等的情形.

设积分方程(37)得到的解是 X^*，则以 X^* 为初值用方程(38)积分得到的解应当是 $X^{t+\Delta t}$. 于是，可以得到

$$X^*=X^{t-n\Delta t}-\int_{t-n\Delta t}^{t-\Delta t}A_1Xdt, \tag{39}$$

和

$$X^{t+\Delta t}=X^*-\int_{t-n\Delta t}^{t+\Delta t}A_2Xdt, \tag{40}$$

这样

$$X^{t+\Delta t}=X^{t-n\Delta t}+\int_{t-n\Delta t}^{t+\Delta t}AXdt, \tag{41}$$

其中 $n=0$ 表示向前差，$n=1$ 表示中央差.

$X^{t-n\Delta t}$ 可以看作 X^* 的初值. 于是，以 t 为中心作 Taylor 展开，我们有

$$X^{t-n\Delta t}=X^t-\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^t n\Delta t+O(\Delta t^2),$$

$$X^*=X^t+\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_1^t\Delta t+O(\Delta t^2),$$

其中 $(\partial X/\partial t)_1^t$ 表示从方程(37)求得的 X 的倾向在 t 时刻的值，$(\partial X/\partial t)^t$ 表示从方程(1)求得的倾向在 t 时刻的值.

从上两式可以得到

$$X^*-X^{t-n\Delta t}=(n+1)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_1^t\Delta t+n\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_2^t\Delta t+O(\Delta t^2),$$

和

$$\frac{X^*-X^{t-n\Delta t}}{(n+1)\Delta t}=\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_1^t+\frac{n}{n+1}\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_2^t+O(\Delta t).$$

显然，当 $\Delta t\to 0$ 时，上方程成为

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_1=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X^*-X^t}{\Delta t},\qquad \text{当 } n=0 \text{ 时;}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_1\neq\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X^*-X^{t-\Delta t}}{2\Delta t},\qquad \text{当 } n=1 \text{ 时。}$$

所以，只有当 $n=0$，即采用向前差时，差分格式才是相容的．当 $n=1$，即采用中央差时，差分格式是不相容的．

但是，当 $n=0$ 时，第二步是否仍是相容的呢？ 这只要我们继续按上面的方法进行讨论就行了．这时，我们有

$$X^{t+\Delta t}=X^t+\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^t\Delta t+O(\Delta t^2),$$

和

$$X^*=X^t+\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_1^t\Delta t+O(\Delta t^2),$$

故

$$\frac{X^{t+\Delta t}-X^*}{\Delta t}=\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_2^t\Delta t+O(\Delta t^2),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X^{t+\Delta t}-X^*}{\Delta t}=\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_2^t,$$

即差分格式和方程是相容的．这里 $(\partial X/\partial t)_2^t$ 是方程(38)求得的 X 的倾向在 t 时刻的值．

所以，使用分解算法时，时间离散如采用差分形式，只能用二时间层格式(如向前差)，不能用三时间层格式(如中央差)．

四、讨 论

前面我们分析了分解算法中分解方程的原则和相应的时间离散问题．指出了，和一般设计简化模式一样，分解后的方程仍应保持原方程的重要物理性质，特别是其整体性质；其分解后的解也应和原方程的解一致，至少对其中所含的重要的解一致．至于时间离散，在取差分的情形，应采用二时间层格式，不应采用三时间层格式，否则是不相容的．还指出了，在经典的分解算法中，在总能量守恒和总质量守恒方面的一些问题．不过，在实际工作中，经典的分解算法应用在短期天气预报业务中的并不少(如文献[9]和[10])，看来，对于在短时期内，总能量和总质量不守恒的情况还没有严重到不能用的程度；但至少对于较长时间的预报或质量要求高的预报，还是不行的．另外，如前所述，还有在业务预报中对时间离散采用中央差的，这似与本文得到的结果相矛盾．但是，必须注意，采用中央差格式是和采用时间滤波措施配合进行的；而二时间层格式则不需要时间滤波，除非是由于计算波以外的其他原因．这是这两种格式本质上的不同．

参 考 文 献

[1] Marchuc. G. I. et al., 1968, Short term weather prediction by spliting of the complete hydrodynamic equations. Proc. WMO/IUGG Symp. Num. Wea. Pred., Tokyo, Nov. 26－Dec. 4, 1968, II, 1－8.

[2] Burridge, D. M., 1975. A split semi－implicit reformulation of the Bushby－Timpson 10－level model. *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, **101**, 777－792.

[3] Mesinger F. and A. Arakawa, 1976, Numerical methods used in atmospheric models, I, GARP publications series. 12, Geneve.

[4] Gadd, A. J., 1978, A split explicit integration scheme for NWP, *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **104**, 569－582.

[5] 陈秋士，1980，分析天气形势变化物理过程的一种显式分解计算方法，第二次全国数值天气预报会议论文集，271— 282，科学出版社.

[6] 曾庆存等，1984，完全保持能量守恒的可压缩流体时空差分格式的设计和实现，数值天气预报文集，气象出版社.

[7] 廖洞贤等，1981，关于数值天气预报中槽脊移速偏慢的问题，气象科学技术集刊，1，110— 117.

[8] Robert, A., 1986, Efficient time integration schemes for Nwp models, Extended Abstracts of Papers Presented at the WMO/IUGG International Symposium on Short－and Medium－Range NWP (Tokyo, 4－8 August 1986), PSMP Report Series, 19, 179— 184.

[9] Staniforth, A. and J. Mailhot, 1988, An operational model for regional weather forecasting, *Comput. Math. Applic.*, **16**, 1— 22.

[10] Wang Kangling et al., 1987, Split semi－implicit integration of tropical limited area multi－level primitive equation model, *Acta Meteor. Sinica*, **1**, 123— 132.

Two Problems Existing in the Split Algorithm

Yao Jianguo Liao Dongxian

(National Meteorological Center, Beijing 100081)

Abstract

It is pointed out in this paper that there exist two problems to be settled in the split algorithm. They are: a) In addition to splitting the original equations according to fast and slow processes, which principle should be based on to split the equations again in order to get optimal efficiency? b) Whether or not the form of time discretization is allowed to be arbitrary, or in which form time discretization should be taken? The research to solve the first problem shows that the secondly split equation should preserve the important physical properties of the original equations, especially their overall properties (such as conservation of energy and mass) and the solutions of the secondly split equations should be consistent with those of the original equations, at least be consistent with some important ones of them. The result for settling the second problem indicates that in the case of finite difference scheme, two－time－level scheme is desirable; if three－time－level scheme is adopted, inconsistency would happen between the scheme and the corresponding set of partial differential equations.

Key words: Split algorithm; Overall Property; Consistency.