第17卷 第4期
1993年7月
大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA
Vol.17, No.4
July, 1993

大气短波辐射传输研究中的辐射函数*

尹 球 张肇先

(中国科学院上海技术物理研究所，上海 200083)

提 要

研究大气短波辐射传输问题时，必需考虑多次散射，在计算各次散射光的递推方程中存在一个对光学厚度的特殊积分．为此，本文定义了“辐射函数”，并研究了它的数学性质，从而使得平面平行大气中散射光的逐次计算既准确又简便．

关键词：辐射函数；多次散射；大气辐射传输．

一、引 言

大气短波辐射传输的一个基本特点是光散射的多次性，考虑如图1所示的平面平行大气层，以大气层顶作为光学厚度的零点并设入射光来自大气层的上方，从而，短波辐射传输方程具有以下形式：

$$\mu\frac{dI(\mu,\varphi,\tau)}{d\tau}=-I(\mu,\varphi,\tau)+J,\tag{1}$$

式中，I 为散射辐射强度，τ 为大气光学厚度，$\mu=\cos(\theta)$，θ 是天底角，φ 为方位角，J 为源函数．假定所给大气层中的散射相函数及单次散射反照率与高度无关，则

$$J=S_0\exp(-\tau/\mu_0)P(\mu_0,\varphi_0,\mu,\varphi)+\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}I(\mu',\varphi',\tau)P(\mu'\varphi',\mu,\varphi)d\mu'd\varphi',\tag{2}$$

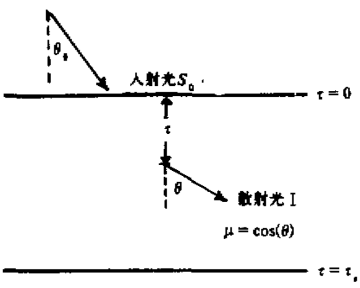

图1 光学厚度为τ_S的平面平行大气层

1991年12月17日收到，1992年3月2日收到修改稿．
* 本文得到国防科学技术工业委员会光华科技基金资助．

其中，S_0 是大气层顶入射光强度(如果入射光是平行光，例如太阳光，则 S_0 应为入射通量)，θ_0，φ_0 是入射光的天底角和方位角，P 是大气单次散射反照率和大气散射相函数的乘积除以 4π.

(2)式等号右端前一项表示大气对入射光的消光和单次散射；后一项则表示多次散射.

多次散射使得大气短波辐射传输方程的求解成为大气辐射传输计算中最困难的问题.目前的处理方法有两类：一类方法(例如 Monte-Carlo 方法)能保证计算精度，但需花费大量的计算时间；另一类方法(例如二流近似法)则比较实用，但精度较低.

实际上，可将散射光(I)视为入射光产生的一次散射光(I_1)、一次散射光产生的二次散射光(I_2)等的叠加，即 $I=\sum_{n=1}^{\infty} I_n$. 相应地，大气短波辐射传输方程(1)，(2)可改写成

$$I_n(\mu, \varphi, \tau)=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\{\exp(-\tau/\mu)\times \int_{\tau_n}^{\tau}(1/\mu)I_{n-1}(\mu', \varphi', \tau)\exp(\tau/\mu)d\tau\} \times P(\mu', \varphi', \mu, \varphi)d\mu' d\varphi' \qquad n=1, 2, \cdots\cdots \tag{3}$$

及

$$I_0=\exp(-\tau/\mu_0)\times S_0\,\delta(\mu'-\mu_0)\delta(\varphi'-\varphi_0), \tag{4}$$

其中，τ_n 是 $I_n(\mu, \varphi, \tau)=0$ 的光学厚度. 也就是说，$\tau_n=0$（当 $\mu>0$，即对向下散射光)或 τ_n 等于气层总光学厚度 τ_s(当 $\mu<0$，即对向上散射光).

方程(3)包含三个积分：对光学厚度的积分，对 μ 的积分及对 φ 的积分(可以验证：散射光对方位角的依赖总可以排除在关于光学厚度的积分之外). 对 μ 和 φ 的积分已得到较好解决，而对光学厚度的积分则通常采取将大气层分为许多薄层用各种数值方法来处理.

原则上，通过对方程(3)不断迭代直至总散射光不再增加，可以获得准确的结果.但存在两个问题：一是方程(3)的每次迭代都涉及对光学厚度的数值积分；二是迭代过程可在多大的 n 处停止，通常要由实际计算结果确定. 这两方面的原因使得用迭代法计算散射光很费时，大大限制了这种方法的实用性.

本文就求解方程(3)时所涉及的对光学厚度积分定义了一个特殊函数，称之为"辐射函数"，并且详细研究了它的一些重要性质，利用这些性质可以快速而又准确地完成散射光的计算.

二、辐射函数的定义

为了反映多次散射的特点，本文定义的辐射函数是广义的. 即非但其自变量大小可变，而且其自变量个数也是可变的，自变量个数增多表示散射次数增多.

[定义]

零阶辐射函数为

$$Y(x_0, \tau)=\exp(-x_0\tau), \tag{5}$$

n 阶辐射函数为

$$Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)=\exp(-x_n\tau)\int_{\tau_n}^{\tau} x_n Y(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, \tau)\exp(x_n\tau)d\tau, \tag{6}$$

其中，τ_n仅与x_n有关，可取为

$$\tau_n=\begin{cases}0 & 当x_n>0, \\ \tau_S & 当x_n<0.\end{cases} \tag{7}$$

辐射函数各自变量的物理意义如下：x_0，x_1，…，x_n分别是入射光，一次散射光，…，n次散射光天底角的正割，τ是光学厚度，τ_n是$I_n(\mu, \varphi, \tau)=0$的光学厚度.

辐射函数的积分定义式(6)也可改写成微分形式：

$$\frac{d}{d\tau}Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)=x_n\{Y(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, \tau) - Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)\}. \tag{6'}$$

三、辐射函数的计算方法

1. 递推公式

[定理1]

$$Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)=\frac{x_1}{x_1-x_0}\{Y(x_0, x_2, \cdots, x_n, \tau)-Y(x_0-x_1, \tau_1) \times Y(x_1, x_2, \cdots, x_n, \tau)\} \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{8}$$

证明：

当$n=1$，按辐射函数定义

$$\begin{aligned}Y(x_0, x_1, \tau)&=\exp(-x_1\tau)\int_{\tau_1}^{\tau} x_1 Y(x_0, \tau)\exp(x_1\tau)d\tau \\ &=\exp(-x_1\tau)\int_{\tau_1}^{\tau} x_1\exp[(x_1-x_0)\tau]d\tau \\ &=\frac{x_1}{x_1-x_0}\{\exp(-x_0\tau)-\exp[(x_1-x_0)\tau_1]\times\exp(-x_1\tau)\} \\ &=\frac{x_1}{x_1-x_0}\{Y(x_0, \tau)-Y(x_0-x_1, \tau_1)\times Y(x_1, \tau)\}.\end{aligned} \tag{8'}$$

(8)式成立.

设当$n=m-1$时，(8)式成立，则当$n=m$时，

$$\begin{aligned}Y(x_0, x_1, \cdots, x_m, \tau)&=\exp(-x_m\tau)\int_{\tau_m}^{\tau} x_m Y(x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, \tau)\exp(x_m\tau)d\tau \\ &=\exp(-x_m\tau)\int_{\tau_m}^{\tau} x_m\frac{x_1}{x_1-x_0}\{Y(x_0, x_2, \cdots, x_{m-1}, \tau)- \\ &\quad - Y(x_0-x_1, \tau_1)\times Y(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, \tau)\}\exp(x_m\tau)d\tau\end{aligned}$$

$$= \frac{x_1}{x_1 - x_0}\{Y(x_0, x_2, \cdots, x_m, \tau) - Y(x_0 - x_1, \tau_1) \times Y(x_1, x_2, \cdots, x_m, \tau)\}.$$

公式(8)也成立．于是，对任何$n(=1, 2, \cdots)$，递推公式(8)均成立．

这一结论表明：欲由零阶辐射函数推求n阶辐射函数，只需将代数递推公式(8)重复使用$n(n+1)/2$次，而不必象定义所显示的那样，通过对光学厚度的n次数值积分来完成．因此，若将辐射函数理论用于散射光计算，可使每次迭代所需时间大大缩短，同时也使计算精度得到了充分的保证．

如下节所示，我们也可直接将n阶辐射函数与零阶辐射函数相联系．

2. 高阶辐射函数与零阶辐射函数的关系

［定理2］

$$Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau) = \prod_{j=1}^{n} x_j \times \sum_{k=0}^{n} \frac{B(k)Y(x_k, \tau)}{A(k)\prod\limits_{l=k+1}^{n}(x_l - x_k)}, \tag{9}$$

其中

$$A(0)=1, \ B(0)=1, \tag{10}$$

$$A(k) = Y(x_k, \tau_k), \tag{11}$$

$$B(k) = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{B(i)Y(x_l, \tau_k)}{A(i)\prod\limits_{l=i+1}^{k}(x_l - x_i)}. \tag{12}$$

证明：

由(11)，(12)式易知

$$A(1) = Y(x_1, \tau_1),$$

$$B(1) = -\frac{1}{x_1 - x_0} Y(x_0, \tau_1).$$

因此，当$n=1$，(9)式等价于

$$Y(x_0, x_1, \tau) = x_1\left\{\frac{1}{1} \times \frac{Y(x_0, \tau)}{(x_1 - x_0)} - \frac{Y(x_0, \tau_1)}{(x_1 - x_0)Y(x_1, \tau_1)} Y(x_1, \tau)\right\}$$

$$= \frac{x_1}{x_1 - x_0}\{Y(x_0, \tau) - Y(x_0 - x_1, \tau_1) \times Y(x_1, \tau)\}.$$

这就是(8′)式．因此，对$n=1$，公式(9)成立．

设当$n=m-1$时，(9)式成立，则当$n=m$时，按辐射函数定义有

$$Y(x_0, x_1, \cdots, x_m, \tau) = \exp(-x_m\tau)\int_{\tau_m}^{\tau} x_m\left\{\prod_{j=1}^{m-1} x_j \times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B(k)Y(x_k, \tau)}{A(k)\prod\limits_{l=k+1}^{m-1}(x_l - x_k)}\right\}\exp(x_m\tau)d\tau$$

$$=\prod_{j=1}^{m-1}x_j\times\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{B(k)}{A(k)\prod_{l=k+1}^{m-1}(x_l-x_k)}\times\exp(-x_m\tau)\int_{\tau_m}^{\tau}x_mY(x_k,\tau)\exp(x_m\tau)d\tau\right\}$$

$$=\prod_{j=1}^{m-1}x_j\times\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{B(k)}{A(k)\prod_{l=k+1}^{m-1}(x_l-x_k)}\times\frac{x_m}{(x_m-x_k)}[Y(x_k,\tau)\right.$$

$$\left.-Y(x_k-x_m,\tau_m)\times Y(x_m,\tau)]\right\}$$

$$=\prod_{j=1}^{m}x_j\times\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\frac{B(k)Y(x_k,\tau)}{A(k)\prod_{l=k+1}^{m}(x_l-x_k)}\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{B(k)Y(x_k,\tau_m)Y(x_m,\tau)}{A(k)\prod_{l=k+1}^{m}(x_l-x_k)Y(x_m,\tau_m)}\right\}.$$

注意到(11)、(12)式，便知上式大括号中后一项

$$-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{B(k)Y(x_k,\tau_m)Y(x_m,\tau)}{A(k)\prod_{l=k-1}^{m}(x_l-x_k)Y(x_m,\tau_m)}\Bigg\}=\frac{B(m)}{A(m)}Y(x_m,\tau).$$

从而

$$Y(x_0,x_1,\cdots,x_m,\tau)=\prod_{j=1}^{m}x_j\times\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\frac{B(k)Y(x_k,\tau)}{A(k)\prod_{l=k-1}^{m}(x_l-x_k)}+\frac{B(m)}{A(m)}Y(x_m,\tau)\right\}$$

$$=\prod_{j=1}^{m}x_j\times\sum_{k=0}^{m}\frac{B(k)Y(x_k,\tau)}{A(k)\prod_{l=k+1}^{m}(x_l-x_k)}.$$

(9)式与此一致，即，对 $n=m$，公式(9)也成立．于是，对所有 n 公式(9)均成立．

必须指出，在定理1、定理2的推导过程中，我们假定 x_0，x_1，$\cdots$，x_n 各不相同．容易验证：只需将相等视为极限(例如：将 $x_i=x_j$ 看作 $x_i\to x_j$)，那么，即使 x_0、x_1，$\cdots$，x_n 中的某些元素相同，有关公式也照常成立．

四、辐射函数关于光学厚度之幂级数的若干特性

由辐射函数定义知，光学厚度量除了 τ 以外还有 τ_1，τ_2 等等．辐射函数幂级数之每一项的幂次是指该项中各光学厚度量幂次之和．

[性质1] n 阶辐射函数幂级数的幂次不低于 n 次．

证明：

当 $n=0$

$$Y(x_0, \tau)=\exp(-x_0\tau)=1+(-x_0\tau)+(-x_0\tau)^2/2!+\cdots$$

其最低幂次为零次，结论成立.

设当 $n=m-1$，结论成立，则按定义(6)

$$\begin{aligned}Y(x_0, x_1, \cdots, x_m, \tau)&=\{1+(-x_0\tau)+(-x_0\tau)^2/2!+\cdots\}\\&\times\int_{\tau_m}^{\tau} x_m\{Y(x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, \tau)\text{之}(m-1)\text{次幂项}\\&+Y(x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, \tau)\text{之幂次}\geqslant m\text{的项}\}\\&\times\{1+(x_0\tau)+(x_0\tau)^2/2!+\cdots\}d\tau.\end{aligned}\tag{13}$$

因此，$Y(x_0, x_1, \cdots, x_m, \tau)$的最低幂次为

$$1\times\int_{\tau_m}^{\tau} x_m\{Y(x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, \tau)\text{之}(m-1)\text{次幂项}\}\times 1d\tau.$$

显然其幂次为$(m-1)+1=m$，即结论对$n=m$亦成立. 从而性质1对任何n均成立.

若记 $Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)$之最低幂次项为 Y_n，则由(13)式得

$$Y_m=x_m\int_{\tau_m}^{\tau} Y_{m-1}d\tau.\tag{14}$$

[性质2] n阶辐射函数幂级数的最低次幂项 Y_n 可由下式计算

$$Y_n=\prod_{k=1}^{n}x_k\times\sum_{k=0}^{n}\frac{C(k)}{(n-k)!}\tau^{(n-k)}\qquad(n=1, 2, \cdots),\tag{15}$$

其中

$$C(0)=1,\tag{16}$$

$$C(k)=-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C(i)}{(k-i)!}\tau_k^{(k-i)}\qquad(k=1, 2, \cdots).\tag{17}$$

证明:

对 $n=1$，按(16)与(17)式应有

$$C(0)=1,$$
$$C(1)=-C(0)\times\tau_1=-\tau_1.$$

故(15)式给出

$$Y_1=x_1[C(0)\tau+C(1)]=x_1(\tau-\tau_1).$$

利用辐射函数定义易证这是正确的.

设对 $n=m-1$，(15)式成立. 则当 $n=m$ 时，由(14)式得

$$\begin{aligned}Y_m&=\prod_{k=1}^{m}x_k\times\int_{\tau_m}^{\tau}\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C(k)}{(m-1-k)!}\tau^{(m-1-k)}\right\}d\tau\\&=\prod_{k=1}^{m}x_k\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C(k)}{(m-k)!}\{\tau^{(m-k)}-\tau_m^{(m-k)}\}\end{aligned}$$

$$=\prod_{k=1}^{m}x_k\times\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C(k)}{(m-k)!}\tau^{(m-k)}+C(m)\right\}$$
$$=\prod_{k=1}^{m}x_k\times\sum_{k=0}^{m}\frac{C(k)}{(m-k)!}\tau^{(m-k)}.$$

公式(15)对 $n=m$ 也成立．于是，公式(15)对任何 n 均成立．

辐射函数反映了散射光对光学厚度的依赖．因此，可以根据辐射函数关于光学厚度幂级数之最低次幂项大小随散射次数增加的变化情况估计各次散射的相对重要性，从而确定迭代过程进行到第几次散射光时可以停止，无需再继续下去．

考察性质 2，直接有以下推论：

[性质 3] 辐射函数 $Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)$幂级数的最低次幂项与 x_0 无关．

性质 2 表明 Y_n 各项具有公因子 $\prod_{k=1}^{n}x_k$．实际上，这一结论可以推广成

[性质 4] n 阶辐射函数 $Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)$幂级数包含公因子$(\tau-\tau_n)\prod_{k=1}^{n}x_k$．

证明：

$Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)$幂级数包含公因子$(\tau-\tau_n)$是显然的，这是因为按定义(6)式：当 $\tau=\tau_n$，$Y(x_0, x_1, \cdots, x_n, \tau)=0$.

现在用归纳法证明公因子 $\prod_{k=1}^{n}x_k$ 的存在．当 $n=1$，$Y(x_0, x_1, \cdots, \tau)$幂级数有公因子 $\prod_{k=1}^{1}x_k=x_1$ 是显然的．而假如 $Y(x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, \tau)$幂级数有公因子 $\prod_{k=1}^{m-1}x_k$，则按辐射函数定义知 $Y(x_0, x_1, \cdots, x_m, \tau)$幂级数包含公因子 $x_m\times\prod_{k=1}^{m-1}x_k=\prod_{k=1}^{m}x_k$．

所以性质 4 成立．

五、讨　　论

本文介绍了有关辐射函数的概念，分析了辐射函数的几个重要特性．在推导中，假定大气层为平面平行(即，水平均匀)层，其中的散射相函数及单次散射反照率与高度无关．

表 1 以计算一个辐射函数为例将递推公式(8)与数值积分法作了对比．

表 1　用近似数值积分法与用代数递推公式计算 $Y(1,2,4,8,16,32,\cdots,\tau)$所需计算量的比值

阶数 \ 精度要求 \ 运算种类 \ τ		0.5		1		2	
		指数	乘除	指数	乘除	指数	乘除
1	1%	2.0	3.7	2.7	5.0	4.7	9.0
	1‰	4.0	7.7	7.3	14.3	13.3	26.3
3	1%	6.0	10.4	8.4	14.7	13.2	23.3
	1‰	17.6	31.1	25.6	45.4	40.8	72.6
5	1%	12.9	21.6	22.6	38.1	42.0	71.1
	1‰	40.3	68.2	70.6	119.5	132.3	224.3

由表可见，用代数递推公式代替近似数值积分法计算辐射函数使计算效率大为提高，阶数越高、τ越大效果越显著.

显然，在各种大气短波辐射传输计算中采用辐射函数导致计算效率提高的程度与具体的辐射模式、大气模型以及计算精度要求等因素有关. 限于篇幅，我们将另文讨论.

Radiative Function in the Study of Short Wave Radiation Transfer in the Atmosphere

Yin Qiu Zhang Zhaoxian

(Shanghai Institute of Technical Physics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200083)

Abstract

The multiple scattering must be considered in the study of atmospheric short wave radiation transfer. In the recurrence equation, by which every order of scattering light is calculated, there is a kind of integration over optical depth. To deal with this integration, the "Radiative Function" (RF) is introduced, and its mathematical properties are studied. With RF, the one by one calculation of scattering light in a plane parallel atmosphere will be precise and easy.

Key words: Radiative function; Multiple scattering; Atmospheric radiation transfer.