

散度方程简化及其应用研究的若干问题

陈忠明

(成都高原气象研究所, 成都 610071)

提 要

本文在综合分析有关工作的基础上, 对散度方程的简化及其应用等问题作了进一步研究, 得到了一些新的认识.

关键词: 散度方程; 非平衡场.

一、引 言

近几年来许多观测事实表明, 强对流天气的发生大都与对流层低层大气的强烈辐合密切相关. 因此, 许多学者开始使用散度方程来诊断和分析中尺度天气系统的演变, 并取得了较好的效果. 但是, 由于散度方程中各项的量级差别较大, 有些项(如与垂直速度有关的项)还不易计算准确, 这给业务预报中应用散度方程进行诊断分析带来了一定困难. 为此, 有些学者根据中尺度运动的一些特征, 开始对散度方程进行重新分析和简化, 以便能定量地诊断散度场的演变特征. 如文[1]仅考虑风速平流散度项 A 的作用, 通过计算 A 项的大小来诊断对流层低层散度场的变化. 文[2]则根据中尺度运动的非地转特征, 重点强调了非地转涡度对散度场演变的影响. 此外, 还有其他一些不同形式的简化分析^[3, 4]. 从这些简化分析来看, 由于各种简化所考虑的重点不同, 因而所得结果差异较大, 甚至有些简化之间还存在矛盾. 所以, 对散度方程的简化和计算分析作进一步的研究是必要的. 这对业务预报中更好地利用简化散度方程作诊断分析是有益的.

二、 A 项与散度变化

对于尺度在 100km 以上的大、中尺度运动, 准静力平衡近似是适宜的. 此时, p 坐标系中的水平运动方程可写为

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \omega \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} - f \vec{V} \times \vec{k} = -\nabla \varphi. \quad (1)$$

运算(1)式可得散度方程

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -(\nabla^2 \varphi - f\zeta) - \nabla \cdot [(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}] - \nabla \cdot \left[\omega \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \right] - \beta u. \quad (2)$$

1991年2月5日收到, 1992年1月10日收到三改稿.

文献[1]在应用散度方程研究我国南方暴雨时,根据暴雨发生常与低空急流有关的事实,重点研究了水平风场分布不均匀对散度变化的影响,提出了计算

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (3)$$

的大小来分析散度变化及其与未来暴雨的联系,实例分析取得了较好的效果.同时,文[1]还指出,在中小尺度运动中,非地转运动是经常存在的,非地转涡度所引起的散度变化往往有利于辐散增加,在散度方程中由别的项来平衡.但从文[1]的计算结果看, A 项的值似乎较小(A 介于 $1-2 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$),而实际大气中的非地转涡度 $f\zeta'$ ($\nabla^2\phi - f\zeta$)常常较大(文献[4]曾指出:在散度方程中,非地转涡度项为最大).当 $-f\zeta'$ 的值超过 A 时,即使 A 为正值也不能使低层辐合增强.这时, A 项的大小就不能准确地反映散度的变化了.因此,单独使用 A 项的值来诊断散度变化,有时可能导致误断.

考虑对流性不太强的中尺度运动(或对流运动发展初期),可略去方程(2)中的 $\nabla \cdot (\omega \vec{V}/\partial p)$ 项和 βu 项(文[6]指出,散度方程中带 ω 的项是相互抵消的),则(2)式可写为

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -(\nabla^2\phi - f\zeta) - A, \quad (4)$$

由此可见, A 项的值能正确反映散度变化的条件是 $(\nabla^2\phi - f\zeta)$ 的值要比较小.在实际大气中,下面两种情况可使 $(\nabla^2\phi - f\zeta)$ 的值较小.其一是 $\nabla^2\phi$ 和 $f\zeta$ 两者量值基本相当,其差值较小($\nabla^2\phi \approx f\zeta$).这反映出大气运动在涡度场上满足准地转平衡.由于这里只对涡度场作了限制,而对风场特征(散度风)未作任何限制,因此,在涡度场满足准地转平衡下,大气运动中可以有有一定强度的偏差风存在.文[7]在研究副热带次天气尺度系统的短期演变时指出,在副热带地区,次天气尺度运动在涡度场上是准地转的,而散度和垂直运动则比一般准地转(风压场的准地转近似)情况下强.这就说明,在副热带地区,确实存在这类特殊运动.其二是 $\nabla^2\phi$ 和 $f\zeta$ 两者均较小,则 $\nabla^2\phi - f\zeta$ 的值也较小,这种情况容易发生在热带低纬地区.因为在热带低纬地区,等高线一般比较稀疏,有时容易在一个尺度不大的区域内形成均压区,这就使得 $\nabla^2\phi$ 的量值变得十分小.另外,由于低纬地区 f 较小,在风场上若没有明显的涡旋时, ζ 值也较小,这样 $f\zeta$ 的值也就很小.当均压区内没有气旋式闭合涡旋流场时, $\nabla^2\phi - f\zeta$ 的值就较小.此时,散度场的变化 $\partial D/\partial t$ 则主要取决于 A 项的大小.可见,单独通过计算 A 项的值来诊断散度变化有一定的局限性.

由于实际大气中引起散度变化的因素是比较复杂的.在某些情况下,单因子作用比较突出,如文献[1],[2]讨论的情形;而更普遍的情况则是多因子共同作用.因此,研究形式简洁、易于计算的简化散度方程,不论是理论上还是业务应用上都是十分有益的.

三、非平衡场与散度演化

据尺度分析理论^[5],对于尺度达几百公里的中尺度运动,运动方程(1)的非平衡

近似(即一级简化)为

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - f \vec{V} \times \vec{k} = -\nabla \varphi. \quad (5)$$

依矢量微分知识有

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) - \zeta \vec{V} \times \vec{k}. \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式得

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - (f + \zeta) \vec{V} \times \vec{k} = -\nabla \left(\varphi + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right). \quad (7)$$

对方程(7)作散度运算, 则有

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}), \quad (8)$$

式中 $E = \varphi + (\vec{V} \cdot \vec{V})/2$ 为压能, 叶笃正等^[8]在研究中小尺度运动的适应过程时, 就曾建议对中小尺度运动分析 E 场(在中小尺度平衡状态下, 风与等 E 线的关系与大尺度地转风与等 φ 线的关系十分相似). $\vec{q} = (f + \zeta) \vec{V}$ 为绝对涡度通量.

为了便于说明(8)式的物理意义, 我们来分析大尺度运动在涡度场上的准地转关系:

$$\nabla^2 \varphi = f \zeta,$$

将 $\zeta = \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{V})$ 代入上式得

$$\nabla^2 \varphi = f \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{V}). \quad (9)$$

在 f 平面近似下(不考虑 β 作用), (9)式可写为如下形式:

$$\nabla^2 \varphi = \vec{k} \cdot [\nabla \times (f \vec{V})]. \quad (10)$$

令 $\vec{q}_a = f \vec{V}$ 为地转涡度通量, 则(10)式可改写为

$$-\nabla^2 \varphi + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}_a) = 0, \quad (11)$$

这是大尺度运动在涡度场上满足准地转的另一表述形式.

对于大尺度运动在风压场上的准平衡关系:

$$f \vec{V} = -\nabla \varphi \times \vec{k}, \quad (12)$$

可用地转涡度通量 $\vec{q}_a$ 表示为

$$\vec{q}_a = -\nabla \varphi \times \vec{k}. \quad (13)$$

对(13)式作 $\vec{k} \cdot \nabla \times$ (13)运算, 则得大尺度运动在涡度场上满足的准地转关系(11).

对于中尺度运动在风($\vec{V}$)压 ($\varphi + (\vec{V} \cdot \vec{V})/2$)场上的准平衡关系^[8]:

$$(f + \zeta) \vec{V} = -\nabla E \times \vec{k}, \quad (14)$$

则可用绝对涡度通量 $\vec{q}$ 表示为

$$\vec{q} = -\nabla E \times \vec{k}. \quad (15)$$

与对大尺度运动的处理类似, 对上式作 $\vec{k} \cdot \nabla \times$ (15)运算, 则有

$$-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}) = 0, \quad (16)$$

这就是中尺度运动在涡度场上满足的准平衡关系. 比较(11), (16)式可见, 中尺度运

动在涡度场上满足准平衡关系的表述形式与大尺度运动在涡度场上满足准地转关系的表述形式完全相同。

由(16)式,可以十分清楚地看出方程(8)表征的物理意义。对于尺度为几百公里的中尺度大气运动,引起散度变化的原因是压能场与涡度场不满足准平衡关系(16)。这与大尺度运动中高度场与涡度场不满足准地转关系将导致散度场发生剧烈变化十分类似。由于(8)式右端两项仅与高度场和风场有关,则较易计算,且可靠性较好,因此,在实际业务中,可通过计算(8)式右端两项的值来定性诊断散度的演变趋势。

比较(8)和(4)式可见,对于中尺度运动,在位势高度场和涡度场满足准地转近似下($\nabla^2\varphi - f\zeta \approx 0$),仍然可以有较强烈的散度变化(A 项作用).而在压能场与涡度场满足准平衡近似下($-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}) \approx 0$),散度场则不会有明显变化($\partial D/\partial t \approx 0$).由此可见,准平衡关系(16)较准地转关系($\nabla^2\varphi - f\zeta \approx 0$)能更好地表征中尺度运动的平衡性质.因此,在中尺度诊断分析中引入准平衡关系(16)是合适的.

Schaefer^[6] 曾将 $U = -\nabla^2 E \times \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q})$ 称作“非平衡”场, 并应用 500 hPa 等压面资料分析了“非平衡”场与美国强风暴发生之间的联系。但文 [6] 与本文在“非平衡”场的认识上却有实质性的差别。文 [6] 通过完全的散度方程, 将非平衡值写为 $U = \partial D / \partial t + \omega \partial D / \partial p + (\partial \vec{V} / \partial p) \cdot \nabla \omega$, 由此将 $\partial D / \partial t$ 和 $\omega \partial D / \partial p + (\partial \vec{V} / \partial p) \cdot \nabla \omega$ 视为引起 U 变化的源变场。再根据实际风暴发生时 $\partial D / \partial t$ 和垂直速度 ω 与 $\partial \vec{V} / \partial p$ 的配置等特征, 确定出一个有利于风暴发生的 U 值区间 ($0 \sim 1.8 \times 10^{-5} s^{-2}$), 从而将 U 值分布与风暴发生联系起来。而作者的分析则指出“非平衡”值 U 表征的是中尺度运动的不平衡性, 这种不平衡是激发散度场发生剧变的源变场(直接原因)。显然, 我们可通过计算 U 值来定性诊断散度场的演变, 从而将 U 值应用于业务诊断分析之中。

四、实例研究

1982年7月15至18日,在500hPa横切变和700hPa低空急流作用下,西南低涡在川东北地区形成并发展东移,给川东北地区带来了一次区域性特大暴雨天气过程,300mm以上的降雨面积达2万余平方公里,最大降水中心位于云阳与奉节交界处的龙角,总雨量达460mm.其中,在降水最强时段的16—17日,24小时雨量就达283.8mm.这次特大暴雨引起部分地区发生山体滑坡、泥石流等严重自然灾害,给国民经济和人民生命财产造成严重损失.下面利用前几节的分析结果,重点研究对流层低层700hPa等压面上 A 值、非地转涡度 $(-\nabla^2\varphi + f\zeta)$ 和非平衡值 $(-\nabla^2E + \bar{k} \cdot (\nabla \times \bar{q}))$ 分布及其演变与暴雨天气的联系,探讨简化散度方程在强天气预报中的应用.

本文采用文 [9] 介绍的客观分析方案, 取权重常数 $c=10000 \text{ km}^2$, $G=0.3$, 对 $100-115^\circ \text{E}$, $25-40^\circ \text{N}$ 范围内的资料作插值处理, 获得了格距为 $1^\circ \times 1^\circ$ 的格点要素值. 据此计算了从 15 日 08 时至 18 日 08 时共 7 个时次 700hPa 等压面上的 A 值、 $-\nabla^2 \varphi - f\zeta$ 和 $-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q})$, 其结果如下:

1. A 值分布与暴雨落区

为了便于与 24 小时(前日 08 时与次日 08 时)雨量图配合分析, 此处给出了 4 次 08

时 A 值分布与 24 小时暴雨区配置图 (见图 1)。由图可见, $A > 1.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 的尺度仅 200—300 km, 具有中尺度特征, 有利于中尺度辐合的维持和增长。但 $A > 1.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 的区域与未来暴雨区位置相差较大, 暴雨区位于 A 大值区西南侧的负值区内。可见, 在这次暴雨过程中, 引起低层辐合增强的主要因子不是风速平流散度项 A 。

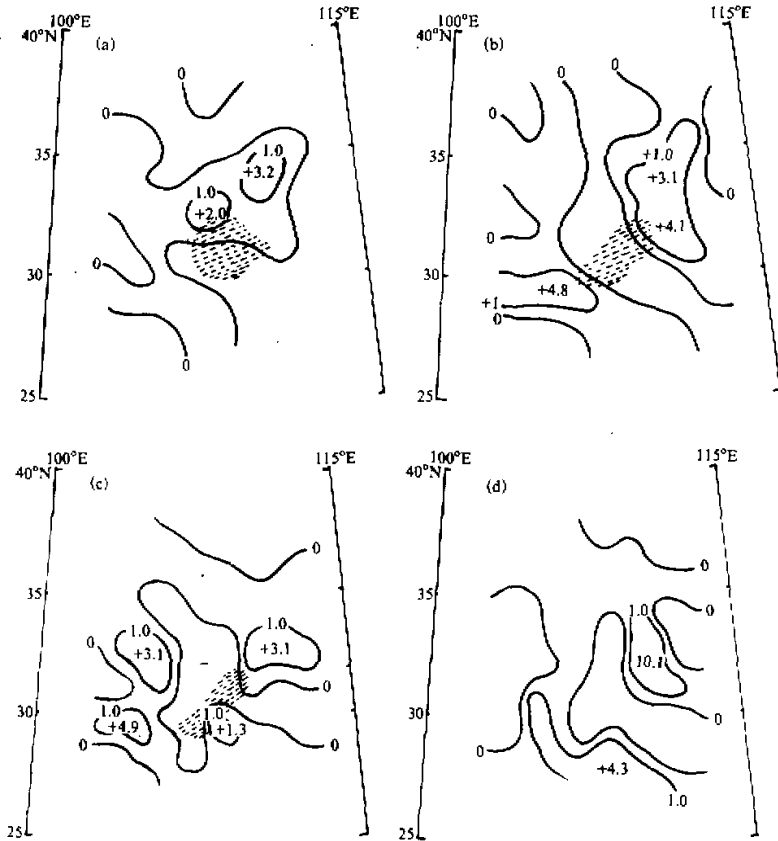


图 1 1982 年 7 月 15—18 日 700hPa A 值分布与 24 小时暴雨区配置图
阴影区为暴雨区, $A: \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$. (a) 15 日 08 时, (b) 16 日 08 时, (c) 17 日 08 时, (d) 18 日 08 时.

据文 [8] 的研究表明, 对于中尺度运动, 其适应过程约为 2 小时. Schaefer 指出^[6], 对于散度场的 e 倍衰减 (增长) 时间不到 3 小时. 可见, $\partial D / \partial t$ 负值促使辐合增强的作用时间仅 2—3 小时. 那么, 对于 $A = 1.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 而言, 它所引起的辐合增量将不超过 $-1.0 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$. 这说明 A 项对辐合增长的作用是有限的。

2. 非地转作用与暴雨发生

图 2 给出了非地转涡度 $(-\nabla^2 \phi + f\zeta)$ 分布与暴雨区的配置关系. 由图可见, 由

$-\nabla^2\varphi+f\zeta$ 等于 $-5.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 等值线所围区域, 其尺度仅 200—300 km, 具有与暴雨区相当的中尺度特征. 在暴雨过程初期 (15 日 08 时—16 日 08 时), $-\nabla^2\varphi+f\zeta < -5.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 的区域与未来暴雨区非常一致, 两者尺度相当. 而在暴雨盛期和减弱阶段, 暴雨区与 $-\nabla^2\varphi+f\zeta < -5.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 的区域配置关系稍差, 但 $-\nabla^2\varphi+f\zeta < 0$ 的带状区域走向仍能与暴雨区配合. 这表明, 在此次暴雨过程中, 大气运动的非地转特征是十分显著的, 在暴雨初期尤其如此, 非地转作用促使辐合增长占据主导地位. 这与文献 [2]、[4] 计算的结果一致.

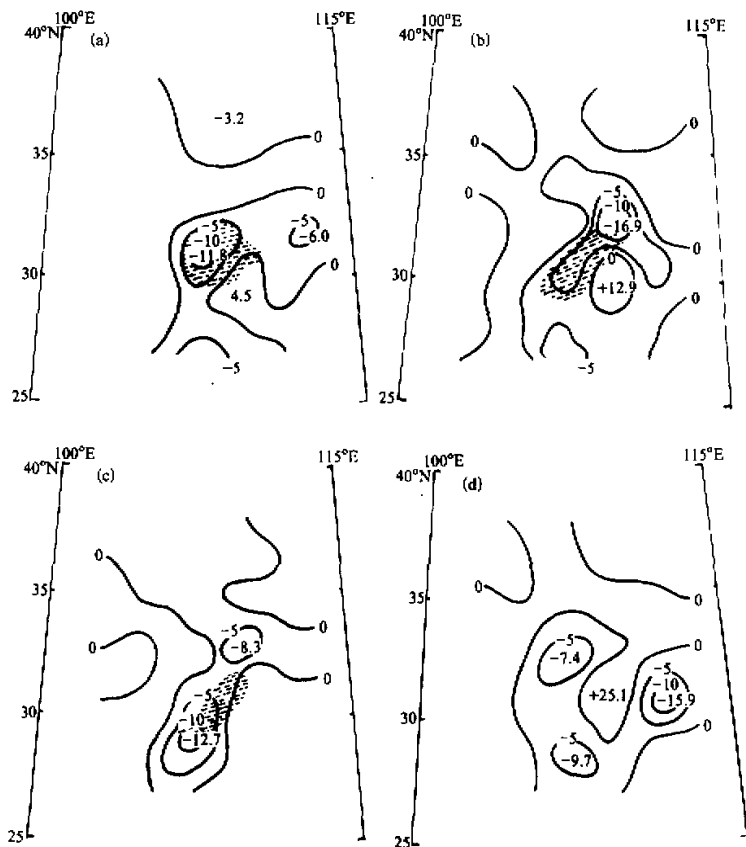


图2 1982年7月15—18日700hPa 非地转涡度 ($-\nabla^2\varphi+f\zeta$) 分布与暴雨区配置图
($-\nabla^2\varphi+f\zeta$): $\times 10^{-9} \text{s}^{-2}$. (a) 15日08时, (b) 16日08时, (c) 17日08时, (d) 18日08时.

3. 非平衡场与暴雨的关系

图3展示了非平衡值 ($-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q})$) 分布与暴雨落区的关系. 由图可见, 非平衡值小于 $-5 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 的区域仍具有中尺度特征. 在整个暴雨过程中, 暴雨区均与 $-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}) < -5.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 的区域有很好的对应关系, 两者之间近于

重合. 特别是在暴雨强盛期和后期, $-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}) < -5.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 的区域与暴雨区的对应关系较之 A 值, 非地转涡度为好. 这可能与非平衡值 $(-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}))$ 集中表现了 A 项、非地转涡度项 $(-\nabla^2 \phi + f\zeta)$ 的共同作用有关. 对于 $-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}) < -5.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$ 的区域, 非平衡场作用可使区域内的辐合增长在较短的时间内超过 $-5.4 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$. 该增长值已达到中尺度运动的散度量级. 因此, 在其它有利条件配合下, 必然给这一区域带来暴雨天气. 此外, 计算结果还表明, 当暴雨区内的非平衡值由负值向较大的正值转变时, 暴雨天气便迅速结束 (如 18 日 08 时的情形).

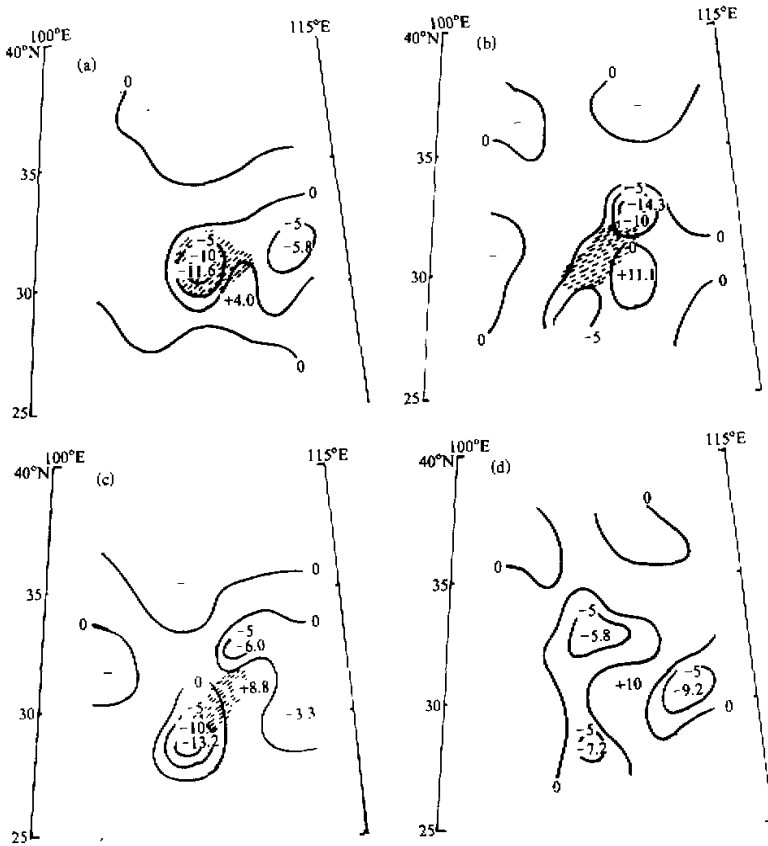


图3 1982年7月15—18日700hPa非平衡值 $(-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}))$ 分布与暴雨区配置图
 $(-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q})) : \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$.

(a) 15日08时, (b) 16日08时, (c) 17日08时, (d) 18日08时.

从上述分析可以看到, 在此次暴雨过程中, A 项较非地转涡度项 $(-\nabla^2 \phi + f\zeta)$ 小半个量级, 非地转作用较 A 项对散度变化的影响要大. A 大值区与暴雨区的对应关系不理想; 非地转涡度 $(-\nabla^2 \phi + f\zeta)$ 负值区与暴雨区配合较好; 而非平衡值 $(-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}))$ 负值区与暴雨区配合较好.

$(\nabla \times \vec{q})$ 的小值区与暴雨区的配置关系较前两者为好。

五、结 语

通过前几节的分析, 我们得到以下几点初步结果:

(1) 对于尺度达几百公里的中尺度运动, 压能场与涡度场之间的不平衡 $(-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}) \neq 0)$ 是引起散度变化的重要原因。

(2) 中尺度运动存在着如下准平衡关系: $\nabla^2 E - \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}) \approx 0$, 它较准地转平衡 $(\nabla^2 \phi - f\zeta \approx 0)$ 能更准确地表征中尺度运动的准平衡性质。

(3) 理论结果表明, 非平衡值 $(-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}))$ 综合表现了 A 项和非地转项 $(-\nabla^2 \phi + f\zeta)$ 影响散度变化的共同作用, 用它诊断散度变化, 效果可能更好。

(4) 实例分析表明, A 项的量级较非地转项 $(-\nabla^2 \phi + f\zeta)$ 和非平衡值 $(-\nabla^2 E + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{q}))$ 约小半个量级, 非平衡小值区 (小于 $-5.0 \times 10^{-9} \text{s}^{-2}$) 与暴雨区比较一致, 两者尺度相当。

(5) 在业务预报中, 可以通过计算 (8) 式右端两项的值来定性诊断散度场的演变趋势。

上述结果仅仅是初步的, 有的结果尚待通过大量的实例分析来检验。

参 考 文 献

- [1] 孙淑清, 1982, 低层风场在暴雨发生中的动力作用, 大气科学, 6, No.4, 394—403.
- [2] 刘春蓉, 1983, 产生强暴雨的一种风压场, 大气科学, 7, No.2, 201—209.
- [3] 杨国祥, 1983, 中小尺度天气学, 气象出版社, 172—174.
- [4] 汪仲兴, 孙淑清, 1988, 暴雨系统中环境涡度场与散度场之间的相互关系, 气象学报, 46, No.4, 492—496.
- [5] 叶笃正等著, 1988, 动力气象学, 科学出版社, 82—89, 116—117.
- [6] Schaefer, J. T., 1977, On the applicability of the divergence equation to the Severe storm forecasting, Tenth Conference on Severe Local Storms, American Meteorological Society, 358—363.
- [7] 胡伯威, 1982, 副热带天气尺度系统短期演变的泛准地转机理, 大气科学, 6, No.4, 422—431.
- [8] 叶笃正, 李麦村, 1964, 中小尺度运动中风场和气压场的适应, 气象学报, 34, No.4, 409—423.
- [9] 丁一汇, 1989, 天气动力学中的诊断分析方法, 科学出版社, 78—79.

Study of Some Problems in the Application and Simplification of Divergence Equation

Chen Zhongming

(Chengdu Research Institute of Plateau Meteorology, Chengdu 610071)

Abstract

In this paper, some problems in the application and simplification of divergence equation are studied. New results are obtained.

Key words: Divergence equation; Unbalanced field.