第17卷第6期 大 气 科 学 Vol.17, No.6
1993 年 11月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Nov. 1993

用解析的垂直正规模展开对大气数值模式进行垂直积分

刘金达

(国家气象局, 国家气象中心, 北京 100081)

提 要

本文提出了一个用大气自由振荡解析的垂直正规模为正交函数系构成一个完备的 Hilbert 空间, 利用广义 Fourier 展开的概念, 在垂直方向进行广义 Fourier 展开, 对大气数值模式进行垂直积分. 我们利用两组垂直正规模为正交函数系. 第一组是等温大气的垂直正规模; 第二组是多元大气的垂直正规模, 并用变系数的一维平流方程进行试验积分, 将积分结果与差分法、有限元法、Legendre 多项式展开的结果进行比较. 比较的标准是它们与解析解的均方根误差和相关系数.

关键词: 垂直正规模; 广义 Fourier 展开; 垂直积分.

一、引 言

数值天气预报模式和一般大气环流模式近年来有较大的发展, 预报的时效和精度都有较大的提高. 自70年代以后, 谱展开技术纷纷引入业务数值天气预报模式和大气环流模式, 主要原因是谱展开技术计算空间导数比较精确. 但是绝大多数的谱模式都只是在水平方向采用谱展开技术, 而垂直方向仍然使用差分方法.

曾有少数学者探讨用其它方法对大气数值模式进行垂直积分. 例如, Staniforth 和 Daley 用有限元方法对数值预报模式进行垂直积分[1]. Francis[2] 提出在垂直方向用 Laguerre 多项式展开来表示大气数值模式的垂直结构, 并用此方法求解二维平流方程(在 $\chi-\sigma$ 平面内). 但是非线性项的计算是采用相互作用系数法. 当自变量趋于无穷时, Laguerre 多项式的值也趋于无穷 (除零阶以外), 而且阶数越高趋于无穷越快. 由此使得相互作用系数矩阵的特征值 (相当于水平风速)非常大, 以致为了计算稳定, 必须使用很小的时间步长. Hoskins[3] 指出了Francis 方法中存在的这一问题, 并且提出用 Legendre 多项式代替 Laguerre 多项式. 这样得到的相互作用系数矩阵的特征值与水平风速接近, 时间步长不必取得象 Francis 那样小. 但是, 如果能用大气运动中的某种特征函数构成 Hilbert 空间. 将大气要素的垂直廓线用该特征函数作为基函数进行广义 Fourier 展开来表示, 将会有更多优点. 例如, 上下边界条件一致. 在大气数值模式垂直积分中, 用同样数目的展开项, 可能比其它基函数展开要精确. 因此, 本文提出用解析的垂直正规模[4] 为正交函数系构成一个完备的 Hilbert空间. 在垂直方向进行广义 Fourier

1990年9月22日收到, 1991年7月9日收到修改稿.

展开，对大气数值模式进行垂直积分.

二、垂直正规模

1. 垂直结构方程和上下边界条件

对于无粘无基本气流处于静力平衡的大气，地面平坦，扰动振幅较小，以气压作垂直坐标的线性化的大气运动方程、热力学方程和连续性方程分别为:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+f\vec{K}\times\vec{V}+\nabla\Phi=0\ , &(1)\\ &\frac{RT}{p}+\frac{\partial\Phi}{\partial P}=0\ , &(2)\\ &\frac{\partial T}{\partial t}-\sigma^{*}\omega=0, &(3)\\ &\frac{\partial\omega}{\partial P}+\nabla.\vec{V}=0\ , &(4)\end{aligned}\right.$$

其中，σ 是静力稳定度，* 号表示水平平均. 其它符号为气象学中常用符号. 将水平和垂直变量分离，可得垂直结构方程，

$$\frac{d}{dP}\left(\frac{P}{R\sigma^{*}}\quad\frac{dZ}{dP}\right)+\widetilde{\lambda}Z=0\ , \tag{5}$$

分离常数 $\widetilde{\lambda}=\dfrac{1}{g\widetilde{H}}$，$g$ 为重力加速度，$\widetilde{H}$ 就是等价高度.

设模式大气顶为 P_T ($P_T\neq 0$)，上边界条件为 $\omega_P=P_T=0$，从而可得上边界条件为:

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial P}\right|_{P=P_T}=0, \tag{6}$$

下边界条件为 $W_{P=P_s}=\left.\dfrac{d\Phi}{dt}\right|_{P=P_s}=0.$

利用静力方程(2)和热力学方程(3)可得

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial P}+\frac{\sigma^{*}}{T^{*}}Z\right)_{P=P_s}=0\ . \tag{7}$$

2. 等温大气的垂直正规模

假定 $\dfrac{\partial T^{*}}{\partial P}=0$，我们取 $P_T=110\text{hp}a$，$P_S=1010\text{hP}a$，则等温大气的垂直正规模[4]为

$$Z_n=A_nZ_{1,n}+B_nZ_{2,n},\ n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots \tag{8}$$

其中

$$Z_{1,n}=P^{-\frac{1}{2}}\cos(\alpha_n\ln P),$$

$$Z_{2,n}=P^{-\frac{1}{2}}\sin(\alpha_n\ln P),$$

$$\alpha_n=\sqrt{\lambda_n-\frac{1}{4}}\ ,\quad \lambda_n=\frac{R^2T^{*}}{c_pg\widetilde{H}_n}\ .$$

A_n 与 B_n 的比例是由上下边界条件确定的，并将绝对值大者取为 +1.

由于特征函数 Z_n 的正交性，可得

$$\int_{p_T}^{p_S} Z_n Z_m \mathrm{d}P=\begin{cases}0, & 当\quad n\neq m\\ \|Z_n\|^2, & 当\quad n=m\end{cases}$$

$\|Z_n\|$ 称为特征函数Z_n 的"模". 它满足

$$\|Z_n\|^2=A_n^2 I_{11}^n+2A_nB_nI_{12}^n+B_n^2I_{22}^n,$$

其中

$$I_{11}^n=\int_{p_T}^{p_S} Z_{1,n}^2\ \mathrm{d}p=\frac{1}{2}(\ln p_s-\ln p_T)+\frac{1}{4\alpha_n}[\sin(2\alpha_n\ln p_s)-\mathrm{Sin}(2\alpha_n\ln p_T)]$$

],

$$I_{12}^n=\int_{p_T}^{p_s} Z_{1,n}A_{2,n}\,\mathrm{d}p=\frac{1}{2\alpha_n}[\mathrm{Sin}^2(\alpha_n\ln p_s)-\mathrm{Sin}^2(\alpha_n\ln p_T)],$$

$$I_{22}^n=\int_{p_T}^{p_s} Z_{2,n}^2\ \mathrm{d}p=\frac{1}{2}(\ln p_s-\ln p_T)-\frac{1}{4\alpha_n}[\sin(2\alpha_n\ln p_s)-\sin(2\alpha_n\ln p_T)].$$

于是可得归一化的等温大气的垂直正规模

$$\widetilde{Z}_n=\frac{Z_n}{\|Z_n\|}=\widetilde{A}_nZ_{1,n}+\widetilde{B}Z_{2,n},\tag{9}$$

其中 $\widetilde{A}_n=\dfrac{A_n}{\|Z_n\|}$, $\widetilde{B}_n=\dfrac{B_n}{\|Z_n\|}$,

并有

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{Z}_n}{\mathrm{d}P}=\widetilde{A}_n\frac{\mathrm{d}Z_{1,n}}{\mathrm{d}p}+\widetilde{B}_n\frac{\mathrm{d}Z_{2,n}}{\mathrm{d}p},\tag{10}$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}Z_{1,n}}{\mathrm{d}p}=-P^{-\frac{3}{2}}[\frac{1}{2}\cos(\alpha_n\ln p)+\alpha_n\sin(\alpha_n\ln p)],$$

$$\frac{\mathrm{d}Z_{2,n}}{\mathrm{d}p}=P^{-\frac{3}{2}}[-\frac{1}{2}\sin(\alpha_n\ln p)+\alpha_n\cos(\alpha_n\ln p)].$$

3. 多元大气的垂直正规模

假定 $\dfrac{\partial T^*}{\partial z}=-\gamma=-0.0065\mathrm{K/m}$, 则多元大气的正规模[4] 为,

$$Z_n=A_nZ_{1,n}+B_nZ_{2,n},\tag{11}$$

式中

$$Z_{1,n}=P^{\frac{\beta-1}{2}}J_\nu(\frac{2\lambda_n}{\beta}P^{\frac{\beta}{2}}),$$

$$Z_{2,n}=P^{\frac{\beta-1}{2}}Y_\nu(\frac{2\lambda_n}{\beta}P^{\frac{\beta}{2}}).$$

式中 $\nu=\sqrt{\dfrac{1-\beta}{\beta}}$, $\beta=\dfrac{\gamma R}{g}$, $\lambda_n^2=(\dfrac{R}{C_p}-\beta)\dfrac{T_s^*}{P_s^\beta}\dfrac{R}{g\widetilde{H}_n}$,

J_ν 是 ν 阶 Bessel 函数, Y_ν 是 ν 阶 Neumann 函数. A_n 与 B_n 的比例是由上下边界条件确定, 并将绝对值大者取为 +1.

由于特征函数 Z_n 的正交性, 可得

$$\int_{p_T}^{p_s} Z_nZ_m\mathrm{d}p=\begin{cases}0, & 当 n\neq m\\ \|Z_n\|^2, & 当 n=m\end{cases}$$

$\|Z_n\|$称为特征函数 Z_n 的"模". 它满足

$$\|Z_n\|^2 = A_n^2 I_{11}^n + 2A_n B_n I_{12}^n + B_n^2 I_{22}^n .$$

式中
$$I_{11}^n = \int_{p_T}^{p_S} Z_{1,n}^2 \, dp = \frac{\beta}{2} \int_{x_T}^{x_S} J_\nu^2(\lambda_n x) x dx ,$$

$$I_{12}^n = \int_{p_T}^{p_s} Z_{1,n} Z_{2,n} dp = \frac{\beta}{2} \int_{x_T}^{x_s} J_\nu(\lambda_n x) \, Y_\nu(\lambda_n x) x dx ,$$

$$I_{22}^n = \int_{p_T}^{p_S} Z_{2,n}^2 \, dp = \frac{\beta}{2} \int_{x_T}^{x_S} Y_\nu^2(\lambda_n x) x dx ,$$

其中
$$x = \frac{2}{\beta} p^{\frac{\beta}{2}} .$$

Bessel 函数 J_ν 和 Neumann 函数 Y_ν 在上述积分式 I_{11}^n 和 I_{22}^n 中具有相同的积分形式. 如果令

$$H_n(x) = \begin{cases} J_\nu(\lambda_n x) \\ \text{或} \\ Y_\nu(\lambda_n x) \end{cases} ,$$

则有
$$\int_{x_T}^{x_s} H_n^2(x) x dx = \frac{1}{\lambda_n^2} (L_n + M_n),$$

式中
$$\begin{cases} L_n = \dfrac{1}{2} \{x_s^2 H_n'^2(x_s) - x_T^2 H_n'^2(x_T)\}, \\ M_n = \dfrac{1}{2} \{(\lambda_n^2 x_s^2 - \nu^2) H_n^2(x_s) - (\lambda_n^2 x_T^2 - \nu^2) H_n^2(x_T)\}. \end{cases}$$

$$\int_{x_T}^{x_s} J_\nu(\lambda_n x) Y_\nu(\lambda_n x) x dx = \frac{1}{2\lambda_n} (O_n + P_n),$$

式中
$$\begin{cases} O_n = x_S^2 J_\nu'(\lambda_n x_S) Y_\nu'(\lambda_S x_S) - x_T^2 J_\nu'(\lambda_n x_T) Y_\nu'(\lambda_n x_T), \\ P_n = (\lambda_n^2 x_S^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda_n x_S) Y_\nu(\lambda_n x_S) - (\lambda_n^2 x_T^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda_n x_T) Y_\nu(\lambda_n x_T). \end{cases}$$

其中"′"代表 d/dx.

于是可得归一化的多元大气的垂直正规模,

$$\widetilde{Z}_n = \frac{Z_n}{\|Z_n\|} = \widetilde{A}_n Z_{1,n} + \widetilde{B}_n Z_{2,n} , \tag{12}$$

式中
$$\widetilde{A}_n = \frac{A_n}{\|Z_n\|}, \qquad \widetilde{B}_n = \frac{B_n}{\|Z_n\|}.$$

并有
$$\frac{d\widetilde{Z}_n}{dp} = \widetilde{A}_n \frac{dZ_{1,n}}{dp} + \widetilde{B}_n \frac{dZ_{2,n}}{dp} , \tag{13}$$

其中
$$\begin{cases} \dfrac{dZ_{1,n}}{dp} = \dfrac{\beta}{2} p^{\frac{\beta-3}{2}} [\lambda_n X J_{\nu-1}(\lambda_n x) - 2\nu J_\nu(\lambda_n x)], \\ \dfrac{dZ_{2,n}}{dp} = \dfrac{\beta}{2} p^{\frac{\beta-3}{2}} [\lambda_n X Y_{\nu-1}(\lambda_n x) - 2\nu Y_\nu(\lambda_n x)]. \end{cases}$$

三、垂直平流方程积分

数值天气预报模式或大气环流模式中，求解的方程都含有垂直平流项，并可写成如下的发展方程，以西风 u 为例，有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\omega\frac{\partial u}{\partial p}=Q, \tag{14}$$

Q 为垂直平流项以外的其它项．我们仅仅研究垂直平流项的数值积分精度，暂不考虑其它项的作用，即假定 Q＝0，也就是我们仅研究线性的垂直平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\omega(t,\ p)\frac{\partial u}{\partial p}=0, \tag{15}$$

初始条件为：

$$u(o,p)=f(p). \tag{16}$$

1、线性垂直平流方程的解析解

在数值天气预报和数值模拟的研究中，为了比较各种数值计算方法的精度，往往是用高分辨率的计算结果作为“准真解”来比较各种数值计算方法的精度，这样做一般来讲是可行的．但是在某些特殊情况下，高分辨率的计算结果并非能代表“准真解”．所以我们不采用这种方法，而是找出解析解．这也是我们研究线性垂直平流方程的原因之一．

另一方面，目前的数值天气预报和大气环流模式中绝大多数都作了静力平衡假定，因此垂直速度的计算多数都是从诊断方程中求取，而不是解发展方程作为预报量用时间积分求得．所以研究线性垂直平流方程的演变过程，可以近似数值天气预报模式和大气环流模式中的垂直平流过程．

方程(15)的特征方程为

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}p}{\omega(t,p)}. \tag{17}$$

实际大气中水平辐合，辐散在垂直方向交替出现，而垂直速度正负相间，所以我们考虑 $\omega(t,p)$ 的垂直分布为，

$$\omega(t,p)=A\cos(\nu t)\mathrm{Sin}\left[\frac{K\pi}{P_S-P_T}(P-P_T)\right]_{K=1,2,\cdots\cdots}, \tag{18}$$

式中 $A=4\times10^{-4}\mathrm{hPa/s}$．为了表达简洁，

令：$B=\dfrac{K\pi}{P_S-P_T}$，　$X=B(P-P_T)$，

(17)式的第一积分为，

$$\mu\sin(\nu t)+\mathrm{arcth}(\cos x)=c,$$

式中 $\mu=\dfrac{A\cdot B}{\nu}$，arcth 为反双曲正切，$C$ 为积分常数．

令　$$\Psi=\mu\sin(\nu t)+\mathrm{arcth}(\cos x).$$

当 t＝0 时，$\overline{\Psi}=\mathrm{arcth}(\cos x)$，　(19)

由(19)式得出

$$P正\frac{1}{B}\arccos(\mathrm{th}\overline{\Psi})+P_T,$$

式中 th 为双曲正切. 由此得方程(15)的 Cauchy 问题解为

$$u(t,p)=f\{\frac{1}{B}\arccos(\mathrm{th}\Psi)+P_T\}. \tag{20}$$

(20)式是线性垂直平流方程(15)带有初值式(16), 当 $\omega(t,p)$ 为(18)式时的解析解. 在用(20)式计算解析解的值时, 必须注意反余弦函数是多值函数, 不能只取主值.

2. 初值

在实际大气中, 气象要素都自然满足上下边界条件. 在我们的研究中, 初始条件需要满足上下边界条件公式(6)和公式(7). 而且在下边界条件(7)式中, 等温大气和多元大气的静力稳定度是不相同的.

初始条件(16)式并没有给出具体形式. 要进行实际积分计算, 必须给出初始条件(16)式的具体表达式. 为此, 我们考虑用垂直正规模的 1 模和 2 模迭加而成的初值,

$$f(p)=E\widetilde{Z}_1(p)+F\widetilde{Z}_2(p). \tag{21}$$

(1)在等温大气中, $\widetilde{Z}_n$ 用公式(9)计算, 式中 $E=200\mathrm{m/s}$, $F=150\ \mathrm{m/s}$.

(2)在多元大气中, $\widetilde{Z}_n$ 用公式(12)计算, 其中 $E=2200\mathrm{m/s}$, $F=180\mathrm{m/s}$.

在实际大气中西风的垂直廓线是在近地面接近零, 在高空 200hPa 附近达到最大值 20 m/s 左右. 所以 Francis[2] 和Hoskins[3] 使用的初值都用各自所用的基函数前 3 项展开来表示, 使初值与实际大气中西风的垂直廓线接近. 而我们所用初值(21)式只需要取垂直正规模的前 2 项展开来表示, 就能接近实际大气中的西风廓线, 这是因为垂直正规模是大气自由振荡的特征函数.

3. 垂直正规模展开求导数法

我们在第 2 节中求得的等温大气和多元大气中的垂直正规模都是正交函数系. 可以证明它们能构成一个完备的 Hilbert 空间. 所以我们可以利用广义 Fourier 展开的概念, 将气象要素在垂直方向用垂直正规模展开. 在大气数值模式中, 用垂直正规模展开的有限项之和来近似表达气象要素. 以西风 u 为例, 即

$$u(t,p)=\sum_{n=1}^{n}\widetilde{u}_n^t\widetilde{Z}_n(p), \tag{22}$$

式中广义 Fourier 展开系数

$$\widetilde{u}_n^t=\int_{p_T}^{p_S}u(t,p)\widetilde{Z}_n(p)\mathrm{d}p, \tag{23}$$

时间积分用中央差, 我们可得垂直平流方程(15)的预报方程为

$$u_k^{t+1}=u_k^{t-1}-2\Delta t\omega_k^t\sum_{n=1}^{N}\widetilde{u}_n^t\left(\frac{\mathrm{d}\widetilde{Z}_n}{\mathrm{d}p}\right)_k. \tag{24}$$

为了使广义 Fourier 展开系数(23)式计算精确, 我们将垂直层取在 Gauss 层上.

四、积分结果比较和讨论

我们用(21)式作为初值, 分别在等温大气和多元大气中用有限差分法、有限元方法、

Legendre多项式展开法和解析的垂直正规模展开法(以下简称正规模展开法)对垂直平流方程(15)进行数值积分，全都积分了10天．模式大气顶 $P_t=110\mathrm{hP}a$，地面平均气压 $P_s=1010\mathrm{hP}a$．差分法和有限元法采用等格距分层，在Legendre展开法和正规模展开法中采用不等格距分层(各层取在Gauss层上)，但层数和差分法，有限元方法的相同．这就保证4种方法在离散化时精度是相近的．若积分结果精度有差异，应该认为是方法本身的优劣所造成的．

在一般的谱模式中，水平方向用球函数展开，纬圈上是Fourier展开，为了避免产生混迭现象(aliasing)，纬圈上的格点数(N)和波数(M)必须满足 $3M+1\leqslant N$．在正规模展开和Legendre展开中产生混迭现象远比Fourier展开中要复杂．我们通过试验发现，展开的项数等于层数的一半较好．

根据分析，试验和研究，连续的微分方程(15)经过离散化后用数值方法近似求解．对不同的垂直速度 $\omega(t,p)$，不同的数值方法的求解结果会显示出不同的精度．为了比较4种方法的积分精度，我们对垂直速度的不同波数和不同频率作了大量的试验．

我们作的第一个试验是在垂直速度的表达式(18)中，令 $v=v_1\pi/$ 天，v_1 从0.01开始每次增加0.01直到2.00，总共有200个不同的 v_1．(18)式中的垂直波数 $K=1,2,3,4,5,6$．这是实际大气中经常出现的情况．每一种方法都作了1200次预报积分，每次都作10天的预报．每天的预报结果与解析解比较，算出均方根误差(以下用RMS表示)和相关系数(以下用COR表示)．不同积分方法之间的比较就是比较这些RMS和COR．表1列出了多元大气的积分结果比较情况．上半部是RMS比较，下半部是COR比较．表中第1列列出了哪两种方法比较．D代表差分法，E代表有限元方法，L代表Legendre展开法，G代表正规模展开法．例如"D/E"表示D和E比较(注意分子分母不能颠倒)．为了说明表头符号的意义，我们以第1行D/E为例来说明，其余可类推．第2列至第5列的表头意义是：对于RMS，表示 $RMS_E<RMS_D$ 的天数，下标E和D表示方法E和D．对于COR，表示 $COR_E>COR_D$ 的天数．

表1 多元大气中各种方法积分结果的比较

$[P_T,\ P_S]$ 间分为18层

	RMS						
	<5	>5	=0	=10	<1	MIN	MAX
D/E	4.3	89.8	1.0	41.5	21.7	.1519	4.0732
D/G	10.3	78.1	1.4	33.3	25.8	.1491	11.6113
E/G	19.2	58.3	4.8	11.0	38.4	.0667	5.3345
D/L	6.8	92.2	1.7	60.2	13.7	.0760	5.6742
E/L	11.9	86.2	2.3	78.7	12.6	.0543	2.5179
L/G	34.0	40.3	6.3	8.5	54.1	.1382	4.0044
	COR						
	<5	>5	=0	=10	<1	MIN	MAX
D/E	3.8	92.8	1.0	45.0	80.8	.9982	1.4061
D/G	3.4	93.1	0.0	57.5	90.9	.9983	1.5286
E/G	9.1	83.6	1.5	70.0	87.4	.9504	1.1445
D/L	4.3	94.7	0.0	68.4	94.6	−6.0762	23.5820
E/L	10.6	87.6	1.9	81.7	89.9	−5.4810	21.5382
L/G	25.0	44.6	3.6	9.7	50.8	−.4281	1.1426

表 2 等温大气中各种方法积分结果的比较

[P_T, P_S] 间分为 18 层

	RMS						
	<5	>5	=0	=10	<1	MIN	MAX
D/E	5.0	87.9	1.0	38.9	23.3	.1531	3.9260
D/G	3.4	95.5	.7	65.9	10.7	.1155	33.3190
E/G	5.3	93.2	.5	81.8	9.4	.0546	21.0638
D/L	5.4	92.8	1.6	60.8	13.2	.0750	6.3533
E/L	10.8	87.4	2.6	76.3	14.3	.0608	3.0347
L/G	1.0	97.8	.5	70.5	8.6	.5545	16.1246
	COR						
	<5	>5	=0	=10	<1	MIN	MAX
D/E	3.8	92.8	1.0	44.8	80.2	.9976	1.3798
D/G	2.6	96.8	0.0	76.2	97.1	.9979	13.6740
E/G	3.6	95.7	0.0	93.3	96.0	.9985	10.3718
D/L	3.5	95.6	0.0	71.6	95.8	−5.7017	36.4974
E/L	9.6	89.3	1.6	83.9	91.4	−5.0284	32.6974
L/G	1.6	96.7	1.0	59.6	84.5	−1.4681	7.7128

第 6、7、8 列是说明第 10 天预报的情况. 对于 RMS, 令 $\eta=\dfrac{\mathrm{RMS_D}(10天)}{\mathrm{RMS_E}(10天)}$, "(10 天)"表示第 10 天的预报. 对于 COR, 令 $\eta=\dfrac{\mathrm{COR_D}(10天)}{\mathrm{COR_E}(10天)}$. 第 6 列表头"<1"表示 $\eta<1$. 第 7 列表头"MIN"表示在 1200 次预报中 η 的最小值. 第 8 列表头"MAX"表示 η 的最大值. 表中第 2 列至第 6 列的内容表示在 1200 次预报中出现的百分比数. 对于 COR, $\eta<1$ 的情况比较复杂, 因相关系数可能出现负数. 但表中第 6 列("<1")所列出的百分比已考虑了负相关系数的情况.

从表 1 所列的百分比数字可以看出, 在多元大气中, 4 种积分方法两两相互比较, 基本上可以得出如下结论: 表中第 1 列所列的两两方法比较是后者比前者好 (分母比分子好), 但 L 方法与 G 方法的精度相差不多. 从相关系数来看也可以得出同样的结论. 而且从相关系数的比较, 后者更比前者好. 但是 L 方法在 1200 次积分中出现了负相关系数的情况, 这是 L 方法的不足. 并且 G 方法要略微比L 方法好一些.

表 2 是等温大气中积分结果的比较情况. 在等温大气中的比较结论与多元大气的基本一致. 除了 D/E 比较以外, 其它 5 种比较, 后者更比前者好. 而且 G 方法明显地比 L 方法好, 无论是 RMS, 还是 COR, G 方法都明显地比 L 方法好.

我们所做的第二个试验是不同分层的精度比较. 在第一个试验中, 在 [P_T, P_S] 之间分为 18 层. 在第二个试验中, 我们分别做了分为 10 层, 14 层, 18 层的预报. 垂直速度表达式(18)中的垂直波数仍取 K = 1, 2, 3, 4, 5, 6. 而垂直速度的变化频率 $\nu=2\pi/T$, T 为周期 (单位: 天), T 从 0.51 开始每次增加 0.01 直到 1.30, 总共有 80 个不同周期. 每种分层每种方法都作了 480 次. 表 3 是多元

表 3　多元大气中不同分层不同方法积分结果的RMS比较

		RMS						
		<5	>5	=0	=10	<1	MIN	MAX
D/E	10	11.0	77.1	2.9	40.8	21.9	0.2633	3.8949
	14	11.3	77.3	2.9	31.5	23.8	0.4933	3.3584
	18	12.7	73.1	3.1	20.8	27.5	0.5768	2.8309
D/G	10	4.4	89.4	1.9	37.1	15.8	0.2235	16.9234
	14	7.5	82.1	2.3	26.0	21.7	0.3667	18.7603
	18	12.1	71.9	3.1	17.3	29.0	0.4955	11.5852
E/G	10	1.5	96.5	0.8	38.5	9.6	0.4235	8.6993
	14	7.1	82.3	1.3	15.8	25.0	0.6148	8.4869
	18	19.6	52.1	4.0	8.5	41.7	0.7174	5.3119
D/L	10	20.4	72.3	3.5	27.5	28.3	0.1956	2.7468
	14	5.0	85.8	1.5	31.9	18.1	0.4062	2.9360
	18	1.3	96.3	0.8	41.0	10.8	0.5650	5.3366
E/L	10	76.5	11.5	16.5	3.1	72.1	0.2859	1.3228
	14	7.9	84.2	1.3	61.3	14.2	0.6618	1.6186
	18	0.2	99.6	0.2	93.3	1.3	0.9795	2.4579
L/G	10	0.8	97.9	0.8	60.6	7.1	0.8181	9.2752
	14	21.5	56.5	4.6	13.8	37.7	0.7185	6.4478
	18	31.3	36.3	6.3	7.5	48.8	0.4408	3.9861

表 4　多元大气中不同分层不同方法积分结果的COR比较

		COR						
		<5	>5	=0	=10	<1	MIN	MAX
D/E	10	14.8	79.2	0.8	35.2	75.6	1.0000	1.0000
	14	20.8	72.1	1.0	19.2	70.8	1.0000	1.0000
	18	22.3	69.8	0.2	13.3	69.6	1.0000	1.0000
D/G	10	5.8	90.2	0.8	40.2	84.0	1.0000	1.0000
	14	14.6	81.0	1.0	24.0	75.8	1.0000	1.0000
	18	14.4	76.7	0.2	15.8	74.2	1.0000	1.0000
E/G	10	9.0	84.4	1.0	10.6	74.8	1.0000	1.0000
	14	17.7	72.7	1.3	8.8	67.5	1.0000	1.0000
	18	29.8	54.8	0.6	2.3	56.5	1.0000	1.0000
D/L	10	18.5	77.9	2.7	37.5	75.0	1.0000	1.0000
	14	18.1	77.3	1.3	24.6	73.3	1.0000	1.0000
	18	15.6	77.3	0.0	19.6	75.2	1.0000	1.0000
B/L	10	89.4	3.3	13.5	0.0	25.8	1.0000	1.0000
	14	36.5	45.4	1.3	1.0	52.3	1.0000	1.0000
	18	24.4	59.8	0.6	3.5	62.9	1.0000	1.0000
L/G	10	4.4	91.5	0.6	15.8	80.2	1.0000	1.0000
	14	34.4	51.5	1.7	1.0	56.0	1.0000	1.0000
	18	85.6	6.3	6.5	0.2	28.8	1.0000	1.0000

大气不同分层不同方法的积分结果的RMS比较. 表中在方法列之后加了一列表示所分的层数（表4,5,6中也加了这一列）. 4种方法两两相互比较的结论与表1中的RMS比较结论基本上一致. 在此我们关心的是不同分层的比较. 从表3可知, 对于D和E、D和G, E和G以及L和G比较, 随着分层减少, 后者更比前者好, 只有D和E比较的“>5”一列中的10层和14层的比较例外. 对于D和L, E和L比较, 随着分层减少、后者比前者好的程度降低. 对于E和L比较, 当分层为10层时, E方法反过来比L方法好. 表4是多元大气不同分层不同方法的积分结果的COR比较. 从表4的数字可知, 无论是不同方法和不同分层的比较, 其结论与表3的基本一致. 只是“=0”列不是很规律, 以及“>5”列的D和L比较不规律.

表5是等温大气不同分层不同方法的积分结果的RMS比较. 从表5可知, 不同方法之间的比较与表2中的RMS比较结论是一致的. 不同分层之间的比较, 对于D和E, D和G比较不同分层的差异不是很明显, 也不规律. 对于E和G, D和L, E和L比较, 随着分层减少, 后者比前者好的程度降低. 对于E和L比较, 当分层为10层时、E方法反过来比L方法好. 而对于L和G比较, 随着分层的减少, 后者更比前者好. 表6是等温大气中不同分层不同方法积分结果的COR比较. 从表6可知, 不同方法之间的比较与表2和表5的结论是一致的. 不同分层之间的比较, 对于D和E, D和L的比较, 不同分层的差异不是很明显, 也不规律. 对于D和G, E和G, L和G的比较, 随着分层减少, 后者更比前者好. 随着E和L的比较, 随着分层减少, 后者比前者好的

表5 等温大气中不同分层不同方法积分结果的RMS比较

		RMS						
		<5	>5	=0	=10	<1	MIN	MAX
D/E	10	20.6	71.7	4.2	39.6	26.3	0.2978	3.8005
	14	11.9	73.8	3.1	28.8	25.0	0.5114	2.8704
	18	13.1	71.0	3.1	20.8	27.9	0.5948	2.4925
D/G	10	1.3	97.3	1.0	47.3	8.3	0.2599	14.2015
	14	1.0	97.5	0.8	50.4	7.5	0.3924	13.6635
	18	1.3	97.3	0.8	43.8	8.5	0.5447	7.9308
E/G	10	0.8	97.7	0.8	58.5	6.3	0.4771	6.0295
	14	0.6	98.5	0.6	72.9	4.4	0.7308	6.9194
	18	0.6	98.8	0.6	78.5	4.0	0.9159	4.5330
D/L	10	21.5	68.5	4.0	24.6	30.6	0.2147	2.6525
	14	9.0	81.3	2.3	29.4	21.3	0.3900	2.4270
	18	1.3	96.7	0.8	42.3	10.2	0.5654	6.0662
E/L	10	76.3	11.0	10.6	2.5	70.6	0.2479	1.2918
	14	18.1	71.5	1.5	45.8	24.8	0.5847	1.3586
	18	0.6	98.8	0.6	82.5	3.5	0.9506	2.7752
L/G	10	0.8	98.3	0.8	76.0	5.0	0.9193	10.0274
	14	1.3	97.7	1.0	67.3	6.5	0.9250	5.8145
	18	2.7	90.0	1.0	49.6	14.0	0.9339	3.4581

表 6 等温大气中不同分层不同方法积分结果的COR 比较

		COR						
		<5	>5	=0	=10	<1	MIN	MAX
D/E	10	23.8	71.5	2.3	33.1	69.4	0.9999	1.0000
	14	17.7	75.0	0.6	21.7	75.0	1.0000	1.0000
	18	25.2	66.0	1.3	14.2	66.0	1.0000	1.0000
D/G	10	6.9	90.6	0.6	39.6	84.8	0.9999	1.0000
	14	9.0	85.6	0.4	29.4	81.9	1.0000	1.0000
	18	16.5	77.3	0.2	19.8	71.0	1.0000	1.0000
E/G	10	4.2	93.3	0.0	18.8	84.0	1.0000	1.0000
	14	12.5	82.3	0.0	14.4	72.5	1.0000	1.0000
	18	17.5	74.4	0.6	10.2	70.0	1.0000	1.0000
D/L	10	22.5	72.9	2.7	35.4	71.7	1.0000	1.0000
	14	17.3	76.3	0.8	25.8	76.3	1.0000	1.0000
	18	17.7	76.7	0.6	19.0	70.6	1.0000	1.0000
E/L	10	83.3	6.9	9.0	0.6	29.2	1.0000	1.0000
	14	40.0	41.9	2.3	0.6	47.9	1.0000	1.0000
	18	22.1	67.1	1.0	6.7	65.2	1.0000	1.0000
L/G	10	5.2	91.3	0.4	19.2	82.3	1.0000	1.0000
	14	12.9	77.3	0.6	8.1	67.5	1.0000	1.0000
	18	64.4	21.9	2.9	0.0	39.8	1.0000	1.0000

程度降低．当分层为 10 层时，E 方法反过来比 L 方法好．需要说明的是表 4 和表 6 中"MIN"和"MAX"列的数字大多为 1.0000，这是因为在小数点后第 5 位四舍五入所致．

从我们所做的两个试验可以得出以下结论：无论在多元大气中还是在等温大气中，G 方法和 L 方法的精度较高，其次是 E 方法，最差的是 D 方法．对于不同分层的比较，随着分层减少，G 方法和 E 方法的精度下降较小，D 方法的精度下降较大，而 L 方法的精度下降最大．在分层较少的情况下，G 方法显示出较大的优越性．这是我们在前面已预料到的．

大气在垂直方向与水平方向的气象要素的分布和变化具有很大差别．水平方向具有周期性，没有任何自然边界．但在垂直方向，地面是一个自然边界．至于大气顶的情况，由于探测等方面的原因，目前还有很多未研究清楚的问题．所以本文仅把模式大气顶(P_T)取在 110hPa 处．由于模式大气介于上下边界之间，在我们的积分试验中，垂直速度 ω 取为(18)式的形式．在模式大气顶 P_T 处，ω 始终为 0，所以上边界条件在有限长的积分时间内，上边界影响始终传不下来．同样在下边界处，也有 $\omega=0$，所以下边界的影响也传不上去．而且当 $K>1$ 时，在上下边界之间还有 $K-1$ 个 $\omega=0$ 的面，我们把它叫做假分界面，空气质点不能越过这些界面．这是因为我们假定垂直速度采取(18)式的表达式．假分界面的现象在解析解(20)式中可以清楚看出，也就是 arccos 的主值范围为 $(0,\pi)$．在实际大气中，ω 的垂直分布虽然也是正负相间，但是 ω 不停地变化，情况是非常复杂的．甚至在上下边界上会有反射波产生，以致产生暂时的驻波现象．

五、结束语

随着大气科学的发展，大气的垂直结构和演变越来越受到重视. 在数值大气预报和数值模拟的发展过程中，积分精度逐渐提高. 在垂直方向上，人们一直采用差分法求解，看来满足不了精度的要求. 本文提出用大气自由振荡解析的垂直正规模为正交函数构成一个完备的 Hilbert 空间. 在垂直方向利用广义谱展开，对大气数值模式进行垂直积分. 本文仅是初步尝试，今后将继续研究，把它应用到多层谱模式中去，以待进一步提高大气数值模式的积分精度.

参 考 文 献

[1] Staniforth, A.N. and R.W., Daley, 1977, A finite-element formulation for the vertical discretization of Sigma-coordinave primitive equation Models, *Mon. Wea. Rev.*, **105**, No.9, 1108—1118.

[2] Francis, P.E., 1972, The possible use of Laguerre polynomials for representing the vertical Structure of numerical models of the atmosphere, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **98**, 662—667.

[3] Hoskins, B.J., 1973, Comments on"The possible use of Laguerre polynomials for representing the vertical structure of numerical models of the atmosphere" *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **99**, 571—572.

[4] 刘金达, 1990, 大气自由振荡的垂直结构, 大气科学文集, 科学出版社, 11—20.

Vertical Integrations of Numerical Models of the Atmosphere by Expansion of Analytic Vertical Normal Modes

Liu Jinda

(National Meteorological Center, Beijing 100080)

Abstract

This paper develops a technique of vertical integrations of numerical models of the atmosphere using generalized Fourier expansion in which orthogonal functions are analytic vertical normal modes, that construct a complete Hilbert space. two systems of vertical normal modes are used. One is in the isothermal atmosphere and the other is in the polytropic atmosphere. One dimension advection equation with variable advection velocity is integrated in vertical direction. Results of analytic vertical normal mode expansion are compared with that of the finite-difference, finite-element methods and Legendre polynomial expansion in root mean square error and correlation from analytic solution.

Key words: Analytic vertical normal mode; Generalized Fourier expansion; Vertical integration.