

大气湍流的非线性动力学参量 与其经典统计量之关系

杨硕文 麻益民 杨培才

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

提 要

本文利用大气边界层近地层中观测得的风和温度时间序列讨论计算了湍流的非线性动力学统计参量与其经典统计量的关系。初步结果表明: 当层结稳定参数 z/L 处于 $-0.7 < z/L \leq 0.02$ 区域时, 对于其倒数与动力学系统的最大可预报时间成正比的二阶瑞利(Renyi)熵 K_2 而言, 它与湍流运动的特征时间 $t_e (=L/u_*)$ 有如下近似关系 $K_2 t_e = 0.032 - 0.21z/L$, 这里 L 为 Monin-Obukhov 长度, z 为观测点离地面的高度。另外, 本文还导出一个计算相空间中距离的递推公式。

关键词: 湍流平均量; 非线性动力学参量; 相空间; 大气边界层。

一、引 言

自 1963 年 Lorenz^[1]发现浅对流的混沌运动以来, 非线性动力学研究工作取得了巨大的进展^[2,3], 人们发现了许多种混沌产生的机制, 这为我们深刻理解和研究湍流运动提供了一个新的概念和有效方法。怎样把非线性动力学理论应用于湍流研究中呢? 这是一个受到普遍关心的问题。文献[4]和[5]研究了时间序列的功率谱指数与分数维的关系, 并且得出在一定的条件下两者存在线性关系; Deissler^[6]利用数值模式研究指出在小雷诺数条件下湍流运动的特征时间与最大 Lyapunov 指数之积为一常量。对于大气湍流运动, 一些国内外学者^[7-12]也利用非线性动力学方法进行了研究, 并求得了一些大气运动类型的分维、最大 Lyapunov 指数以及二阶瑞利熵等动力学参量。

在大气边界层近地层中, 湍流运动的经典统计量符合局地相似律^[13], 与之对应的非线性动力学统计参量是否也符合类似的相似律? 本文中, 我们将对此问题进行讨论, 并用近地层中的风、温观测资料来讨论分析二阶瑞利熵与湍流经典统计量的关系。

二、非线性动力学参量与湍流经典统计量

在水平均匀的条件下, 大气边界层近地层中的湍流统计量, 如平均风和温度梯度以

1992 年 4 月 25 日收到, 8 月 13 日收到修改稿。

* 本课题由中国科学院大气物理研究所所长基金资助。

及风、温脉动量的各种协方差等(用 $\bar{S}$ 表示)都服从 Monin-Obukhov 局地相似理论^[13]:

$$\bar{S} = \Phi_s(u_*, T_*, g/\bar{T}, z). \quad (1)$$

这里 Φ_s 为一普适函数, u_* 和 T_* 分别为摩擦速度和特征温度,它们与向下的顺平均风方向的湍流动量通量 τ_s 和向上传的湍流热通量 Q_s 的关系为

$$\tau_s = \rho u_*^2, \quad Q_s = -C_p \rho u_* T_*. \quad (2)$$

这里 ρ , C_p 分别为空气的密度和定压比热。 $g/\bar{T}$ 为浮力因子, g 为重力加速度, $\bar{T}$ 为观测高度 z 处的平均气温。进一步引入 Monin-Obukhov 长度:

$$L = u_*^2 \bar{T} / \kappa g T_*. \quad (3)$$

这里 κ 为卡曼常数, $\kappa=0.35$,这样从 π 定理可知,由(1)式确定的 $\bar{S}$ 的无量纲量 $\bar{S}^*$ 仅是稳定度参数 z/L 的函数

$$\bar{S}^* = \Phi_s^*(z/L). \quad (4)$$

(4)式的正确性已得到大量观测资料的支持。近地层湍流除了平均量服从相似律外,它的各种二阶距的谱也服从 Kolmogorov 相似理论,存在惯性副区。

湍流运动以其随机性和一定程度上的空间相干性为特征,它是流体非线性运动的反映,因此其特征也可用非线性动力学的统计参量来描写(如 Lyapunov 指数,分数维,二阶瑞利熵等),文献[7—12]中的工作也表明,非线性动力学参量确实能描述一些大气运动的整体行为。既然湍流经典统计量和非线性动力学参量都能描写湍流的宏观特征,而经典统计量又服从普适的相似律,参考 Deissler^[6]的数值结果,我们猜测非线性动力学统计参量可能也服从这种普适关系,即对某一非线性动力学统计参量 K_n ,存在类似于(1)式的关系式

$$K_n = \Phi_n(u_*, T_*, g/\bar{T}, z). \quad (5)$$

其中 Φ_n 为普适函数。下面我们就二阶瑞利熵 K_2 来对(5)式进行讨论。二阶瑞利熵 K_2 是正的 Lyapunov 指数之和的一个下界^[14],由于正的 Lyapunov 指数表征相空中相点的分离速率,它们能描述动力学系统对初值的敏感性,所以 K_2 也能描述动力学系统对初值的敏感性,它的倒数能描写动力学系统的最大可预报时间。 K_2 的量纲为 $[t^{-1}]$ 。用 K_2 代替(5)式中的 K_n ,由于(5)式等号右边的四个主定量中,只有三个是量纲独立的,我们选取 z , u_* , T_* 为基本量,这样由(5)式可得二个无量纲量

$$\pi_1 = z/L, \quad (6)$$

$$\pi = K_2 l / u_*, \quad (7)$$

其中 $l = \kappa z$ 为湍流运动的特征长度。根据 π 定理, π 仅是 π_1 的函数,即

$$K_2 l / u_* = \Phi_2(z/L) \quad (8)$$

其中 Φ_2 为一待定的函数。在导出 π_1 和 π 时,我们之所以要选 z , u_* , T_* 为基本量,

这是为了用湍流运动的特征时间 l/u 来表征 K_2 。因为 K_2 的倒数指示着最大可预报时间, K_2 和 l/u 可能有某种内在的动力学意义上的联系。

本文中由于受观测资料时间序列长度的限制, 为了保证对非线性动力学参量有较好的估计, 我们只讨论 K_2 是否服从普适关系式。

利用重构相空间的途径, Grassberger 和 Procaccia^[14,15]给出了一个用单变量时间序列估计吸引子维数和 K_2 的方法。其要点是, 假定我们考察的动力学系统具有形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

其中 $\mathbf{x} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}$ 为 n 维向量, 那么由系统(9)的某一单变量 $x^{(j)}$ 的时间序列(在后文中我们略去上标 (j))

$$x_i = x(t_0 + i\Delta t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

在引入一个时间滞后 $\tau\Delta t$ 之后, 我们可重新构造一个 m 维相空间 $\mathbf{R}^m$

$$\mathbf{X}_m(t_i) = \{x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}\}, \quad (11)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau$; $t_i = t_0 + i\Delta t$ 。

Takens^[16]证明只要 m (称为嵌入维数)足够大, 重建的系统(11)与原来的动力系统(9)的动力学性质等价。Grassberger 和 Procaccia 在建立系统(11)之后, 计算出的关联函数

$$C_m(r) = \frac{1}{N_1} \sum_{i,j=1}^{N_1} \theta(r - |X_m(t_i) - X_m(t_j)|), \quad (12)$$

其中 $N_1 = N - (m-1)\tau$, $\theta(x)$ 是 Heaviside 函数, 当 $x \geq 0$ 时, $\theta = 1$; $x < 0$ 时, $\theta = 0$ 。 r 为一给定的正值; $|X_m(t_i) - X_m(t_j)|$ 为相点 $X_m(t_i)$ 与 $X_m(t_j)$ 之间的距离(用欧氏模定义)。实际上 $C_m(r)$ 是一个累积分布函数, 它是相空间 $\mathbf{R}^m$ 中吸引上两点之间的距离小于 r 的概率。对于足够大的 m , 当 $N_1 \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ 时, $C_m(r)$ 服从如下标度律:

$$C_m(r) \sim r^{d_2} e^{-m\tau\Delta t K_2}. \quad (13)$$

这里 d_2 为关联维数, K_2 就是二阶湍流利熵。 d_2 是 Housdoff 维数 D 和信息维 σ 的一个下界^[15]。对(13)式中的 r 和 m 取不同的值, 可得下列关系式

$$d_2 = \ln[C_m(r_2)/C_m(r_1)] / \ln(r_2/r_1), \quad (14)$$

$$K_2 = \ln[C_{m_1}(r)/C_{m_2}(r)] / [(m_2 - m_1)\tau\Delta t], \quad (15)$$

(14)和(15)式即是本文用来求取 d_2 , K_2 的公式。

对于两相点之间的距离, 易证对于下式中的 k 有递推关系

$$\begin{aligned} |X_m(t_i + k\tau) - X_m(t_j + k\tau)|^2 &= |X_m(t_i + (k-1)\tau) - X_m(t_j + (k-1)\tau)|^2 \\ &+ [x_{i+(k+m-1)\tau} - x_{j+(k+m-1)\tau}]^2 - [x_{i+(k-1)\tau} - x_{j+(k-1)\tau}]^2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, [N_1 - \max(i, j)]/\tau$ 。数值计算表明, 利用(16)式计算距离可大大减少计算量。

此, 本文中用(14)和(15)式计算 d_2 和 K_2 时, 取 $m_1 = 30$, $m_2 = 35$ 。

表 1 列出了由各例序列计算得的 z/L , u_* , d_2 , K_2 以及 $K_2 l/u_*$ 。同时图 2 绘出了表 1 中对应不同 z/L 的 $K_2 l/u_*$ 值。由表 1 和图 2 可见, 尽管各例的 K_2 和 u_* 不同, 但总体上 $K_2 l/u_*$ 有随着不稳定度的增加而增加的趋势。这说明在同样的湍流运动特征时间(l/u_*)条件下, 层结越不稳定则可预报时间(用 K_2^{-1} 指示)越短。另外, $K_2 l/u_*$ 随 z/L 的趋势性变化也表明湍流运动的特征时间与可预报时间没有一一对应的关系。表 1 还表明, 由纵向风速脉动量算出的 d_2 、 K_2 和由温度脉动算出的 d_2 及 K_2 并不十分一致, 这可能是由各例资料的长度有限或是数据误差所致。但从图 2 可见, 由二种时间序列算出的 $K_2 l/u_*$ 随 z/L 的变化趋势是一致的。由此我们估计相似关系(8)可能存在。由于 z/L 的变动范围较小, 我们假定 $\Phi_2(z/L)$ 为线性函数, 用最小二乘法对

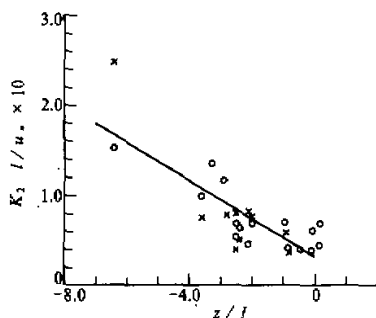


图 2 计算得的不同 z/L 值时的 $K_2 l/u_*$ 值

○——由纵向风速时间序列算得, ×——由温度时间序列算得。

图中直线为 $K_2 l/u_* = 0.032 - 0.21 z/L$

表 1 各序列观测起始时间以及 z/L , u_* 和由纵向风速和温度时间序列算得的 K_2 , d_2 和 $K_2 l/u_*$, $z = 6 \text{ m}$

起始时间		z/L	u_* (m/s)	K_2 (10^{-2} s^{-1})		d_2		$K_2 l/u_* \times 10$	
日	时分			风速	温度	风速	温度	风速	温度
14	14:38	-0.083	0.57	1.1	1.0	13.3	12.2	0.41	0.37
	15:46	-0.092	0.39	1.3	1.1	10.0	11.9	0.70	0.59
	16:54	-0.007	0.38	0.70	—	11.3	—	0.39	—
15	08:50	-0.28	0.32	—	1.2	—	13.2	—	0.79
	09:58	-0.36	0.36	1.7	1.3	12.6	13.7	0.99	0.76
	11:06	-0.25	0.46	1.5	0.87	9.3	12.7	0.68	0.40
	13:23	-0.21	0.43	0.94	1.7	8.2	13.4	0.46	0.83
	17:56	0.02	0.32	0.68	—	9.5	—	0.45	—
16	07:33	-0.64	0.11	0.80	1.3	12.2	9.9	1.5	2.5
	10:58	-0.24	0.45	1.4	1.1	13.7	13.5	0.65	0.51
	12:06	-0.20	0.46	1.5	1.7	12.9	12.1	0.68	0.78
	13:14	-0.25	0.39	1.0	1.5	9.8	11.6	0.54	0.81
	15:31	-0.33	0.31	2.0	—	13.3	—	1.4	—
	22:20	0.017	0.40	0.84	—	10.8	—	0.44	—
17	00:37	0.016	0.31	1.0	—	10.7	—	0.68	—
	07:27	-0.007	0.38	1.1	—	11.0	—	0.61	—
	08:35	-0.044	0.38	0.72	—	11.8	—	0.40	—
	12:00	-0.29	0.18	1.0	—	11.1	—	1.2	—

表 1 中的 $K_2 l / u_*$ 和 z / L 进行线性拟合, 这样在 $-0.7 < z / L \leq 0.02$ 区域, 可得拟合关系

$$K_2 l / u_* = 0.032 - 0.21z / L. \quad (18)$$

(18) 式的拟合值与原始计算值偏差的均方根为 0.026. 图 2 中的直线即为 (18) 式. 由图 2 可见, (18) 式基本上反映了 $K_2 l / u_*$ 随 z / L 的变化趋势.

从表 1 也可见, d_2 随 z / L 的变化没有规律, 这是因为观测点并不在非常平坦的地区, d_2 除了随 z / L 的不同会变化外, 还会随平均风向的不同而变化.

五、结 论

本文利用大气边界层近地面层的风、温脉动量观测资料讨论了二阶瑞利熵 K_2 与湍流经典统计量的关系. 从初步的结果来看, K_2 也满足局地相似关系 $K_2 l / u_* = \Phi_2(z / L)$, 其中 $\Phi_2(z / L)$ 为某一普适函数, 在 $-0.7 < z / L \leq 0.02$ 条件下, 近似有 $\Phi_2(z / L) = 0.032 - 0.21z / L$. 由于 K_2 的倒数可指示系统的最大可预报时间, 因此 Φ_2 随 z / L 的变化说明了最大可预报时间与湍流运动的特征时间 l / u_* 不是一一对应的; Φ_2 的具体形式表明在弱不稳定层结条件下, 最大可预报时间随着不稳定度的增加而减小.

计算结果还表明, 由纵向风速脉动量和温度脉动量分别求出的 d_2 和 K_2 相互之间有一定差异, 我们估计加长时间序列的长度会使此差异减小. 本文的讨论只是初步的, 在更大的稳定度变化范围内讨论是否满足某种局地相似关系将是我们要进一步研究的问题.

此外, 本文还给出了一个计算相点距离的递推公式.

致谢: 陈炎涓、胡景崇、王海燕等同志提供了观测资料, 特此致谢.

参 考 文 献

- [1] Lorenz, E. N., 1963, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141.
- [2] Swinney H. L. & J. P. Gollub, 1981, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer-Verlag Berlin, 292pp.
- [3] 郝柏林, 1983, 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他, *物理学进展*, **3**(3), 329-416.
- [4] Mandelbrot, B., 1977, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco, 365pp.
- [5] Higuchi T., 1990, Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: A numerical investigation, *Physica D*, **46**, 254-264.
- [6] Deissler, R. G., 1986, Is Navier-Stokes turbulence chaotic? *Phys. Fluids*, **29**(5), 1453-1457.
- [7] Nicolis C. & G. Nicolis, 1984, Is there a climatic attractor? *Nature*, **311**, 529-532.
- [8] Fraedrich, K., 1987, Estimating weather and climate predictability on attractors, *J. Atmos. Sci.*, **44**, 722-728.
- [9] 郑祖光、刘式达, 1988, 用大气湍流资料计算 Lyapunov 指数和分维, *气象学报*, **46**, 41-48.
- [10] 杨培才、刘锦丽、杨硕文, 1990, 低层大气运动的混沌吸引子, *大气科学*, **14**(3), 335-341.
- [11] 刘式达, 1990, 有关大气湍流的几个问题, *气象学报*, **48**(1), 117-121.
- [12] 杨培才、陈烈庭, 1990, 厄尔尼诺/南方涛动的可预报性, *大气科学*, **14**(1), 64-71.

- [13] [美]豪根主编, 1984, 微气象学, 李兴生等译, 科学出版社, 379pp.
- [14] Grassberger P. & J. Procaccia, 1984, Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach, *Physica D*, 13, 34-54.
- [15] Grassberger P. & J. Procaccia, 1983, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, 9, 189-208.
- [16] Takens, F., 1981, Detecting strange attractors in turbulence, In: *Dynamical systems and turbulence*, Springer-Verlag Berlin, 366-391.

The Relationship between Classic Statistics of Atmospheric Turbulence and Its Nonlinear Dynamic Parameters

Yang Shuowen, Ma Yiming and Yang Peicai

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract

In the paper, the relationship between classic statistics of turbulence and its nonlinear dynamic parameters are discussed and analyzed using the time series of observed wind and temperature in the surface layer of the atmospheric boundary layer. The preliminary results show that when the stratification stability parameter z/L is in the range $-0.7 < z/L \leq 0.02$, the second order Renyi entropy K_2 , which is inverse to the maximum predictable time of a dynamic system, is connected with the characteristic time of turbulence t_* ($= 1/u_*$) by the formula $K_2 t_* = 0.032 - 0.21z/L$, where L is the Monin-Obukhov length, z is the height above the Earth surface.

Key words: mean quantities of turbulence; nonlinear dynamic parameters; phase space; atmospheric boundary layer.