地形对重力惯性波发展的影响*

吴池胜

(中山大学大气科学系，广州 510275)

提 要

本文研究了具有南北坡的地形对重力惯性波发展的影响。利用 WKB 方法，建立了含地形作用的重力惯性波能量方程。研究结果表明：在层结稳定的情况下，当扰动"上坡"（沿地形高度的升度方向传播）时，其能量将减少，即扰动将减弱；当扰动"下坡"（沿地形高度的负升度方向传播）时，其能量将增加，即扰动将发展。如层结为不稳定，情形则相反，即扰动"上坡"时将发展，"下坡"时将减弱。此外，文中对波动的稳定性问题也作了一些讨论。

关键词：重力惯性波；地形；扰动发展。

一、引 言

大振幅的重力惯性波可以启动对流，这一观点目前已普遍为人们所接受。但何时何地才有大振幅的重力惯性波出现呢？或换句话来说，作为触发机制的重力惯性波在什么样的条件下才得以发展呢？巢纪平[1]、刘式适等[2]以及吴池胜[3]等先后讨论了层结、水平风的垂直切变和水平切变等因子对重力惯性波发展的影响。除了大气的内部条件之外，作为外界强迫的地形作用也是重要的。吕克利[4]讨论了具有南北坡的无限长山脊对沿山脊走向传播的重力惯性波的稳定性问题。他指出，对于西风气流，北坡不利于波动的不稳定，南坡有利于波的不稳定；对于东风气流，情形则刚好相反。在实际大气中，波动可以沿任意方向传播。如果重力惯性波的传播方向是正交于山脊的走向的话（为方便，我们把这种情形称之为重力惯性波"过山"，下同），地形的影响又将如何呢？这正是本文想要研究的一个问题。另一方面，Tepper 很早就认为，锋前产生强对流的飑线是重力惯性波。巢纪平也指出[1]，某些带状的对流回波，在本质上是一类重力惯性波。天气系统也可以用波包来表示[5]。因此，研究重力惯性波的"过山"问题，也有助于了解地形对某些中尺度系统强度变化的影响。本文采用 WKB 方法建立含地形作用的波动能量方程，讨论了地形对"过山"重力惯性波强度变化的影响。

1990 年 7 月 12 日收到，1991 年 1 月 2 日收到再改稿。

* 本文是 75—09—02—10 课题研究成果。

二、基 本 方 程

为简单起见，把密度连续分布的流体，分为上、下两层，上层流体的密度为ρ_1，下层的密度为ρ_2，ρ_1、ρ_2为常数。以h表示地形高度。则下层流体的运动可用如下的方程组来描述：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}-fv=-g_1\dfrac{\partial \eta}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+fu=-g_1\dfrac{\partial \eta}{\partial y},\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}[u(\eta-h)]+\dfrac{\partial}{\partial y}[v(\eta-h)]=0,\end{cases} \tag{1}$$

其中$g_1\equiv(\rho_2-\rho_1)g/\rho_2$，称为约化重力；$\eta$为两层流体分界面的高度；$f$为常数。设$h=h$ (y) 且h相对于η是个小量，即$h\ll\eta$；$u=\bar{u}+u'$，$v=v'$，$\eta=\bar{\eta}+\eta'$；基本气流$\bar{u}$为常数、且满足地转关系。即$(g_1\partial\bar{\eta}/\partial y)=-f\bar{u}$；又设扰动与$x$无关，则得（1）的线性化扰动方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u'}{\partial t}-fv'=0,\\ \dfrac{\partial v'}{\partial t}+fu'=-g_1\dfrac{\partial \eta'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial \eta'}{\partial t}-\beta v'+H\dfrac{\partial v'}{\partial y}=0,\end{cases} \tag{2}$$

其中，$\beta\equiv(\alpha+f\bar{u}/g_1)$；$\alpha\equiv dh/dy$为地形坡度，并设$\alpha$为常数；$H\equiv(\bar{\eta}-h)$.

从方程组（2）中消去u′和v'，得到关于η'的方程：

$$-\frac{1}{g_1H}\frac{\partial^3\eta'}{\partial t^3}-\frac{f^2}{g_1H}\frac{\partial \eta'}{\partial t}+\frac{\partial^3\eta'}{\partial t\partial y^2}-\frac{\beta}{H}\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\partial y}=0. \tag{3}$$

作变换：

$$\eta^*(y,t)=\eta'(y,t)\exp\left(\int-\frac{\beta}{2H}dy\right), \tag{4}$$

(4) 代入 (3) 得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\eta^*}{\partial t}\right)-g_1H\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\eta^*}{\partial t}\right)+f^2\frac{\partial\eta^*}{\partial t}-\frac{g_1\beta^2}{4H}\frac{\partial\eta^*}{\partial t}=0. \tag{5}$$

若$\beta=0$（即无地形起伏和基本气流）则方程（5）化为我们所熟悉的重力惯性波方程。下面，我们来估计方程（5）中地形项（带β项）的相对大小，以确定地形影响的程度。

记$t=Tt_1$、$y=Ly_1$、$\eta^*=\eta_0\eta_1$，其中，带下标"1"的量为无量纲量，T、L和η_0

分别为扰动的时间尺度、水平空间尺度和界面扰动高度 η 的特征尺度。把方程（5）无量纲化为

$$\frac{1}{f^2T^2}\frac{\partial^3\eta_1}{\partial t_1^3}-\frac{C_0^2}{L^2f^2}\frac{\partial}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial t_1}\right)+\frac{\partial\eta_1}{\partial t_1}-\frac{g_1^2\beta^2}{4f^2C_0^2}\frac{\partial\eta_1}{\partial t_1}=0. \tag{6}$$

其中，$C_0^2\equiv g_1H$.

对于重力惯性波，取$T\leqslant f^{-1}$，且$L^2\sim T^2C_0^2$。当$T\sim f^{-1}$时，方程（6）中的惯性项（第三项）与前两项有相同的大小；当$T<f^{-1}$时，亦即当波长变短时，惯性项将小于前两项。因此，我们以惯性项作为比较的标准。记$G\equiv(g_1^2\beta^2)/(4f^2C_0^2)$，它表示地形项与惯性项的相对大小。考虑到大气中重力惯性内波的相速度C（无地形起伏和基流时，$C=C_0=\sqrt{g_1H}$）一般为 10—40 m／s，所以$C_0^2\sim10^2$—10^3 m^2／s^2；又$g_1\sim10^0$ m／s^2，于是有

$$H\sim10^2-10^3\quad\text{m}. \tag{7}$$

另一方面，由于我们这里考虑的是小地形问题（$\bar{\eta}\gg h$），所以，对于高度为数百米（$h\sim10^2$ m）的小山地来说，必须

$$\bar{\eta}\geqslant10^3\quad\text{m} \tag{8}$$

考虑到关系式（7）和（8），在本文中宜取$H\sim10^3$ m。又因为（$f\bar{u}/g_1$）$\sim10^{-3}$，所以G的大小主要为地形坡度α的大小所决定。于是有：

$$\text{当}\alpha\sim10^{-3}\text{时，}G\ll1, \tag{9}$$

$$\text{当}\alpha\geqslant10^{-2}\text{时，}G\geqslant1. \tag{10}$$

由上述分析可见，随着地形坡度的增大，地形项的作用就增大。在$\alpha\sim10^{-3}$情形下，作为最低阶近似，方程（6）中的地形项可略去而得到零级简化方程（恢复为有量纲形式）：

$$\frac{\partial^3\eta^*}{\partial t^3}-C_0^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\eta^*}{\partial t}\right)+f^2\frac{\partial\eta^*}{\partial t}=0. \tag{11}$$

三、频 散 关 系

设方程（5）有如下形式解：

$$\eta^*=A(y,T)e^{i\Phi\varepsilon^{-1}} \tag{12}$$

其中，$\Phi=my+\omega T$，$y=\varepsilon y$，$T=\varepsilon t$，m和ω分别为局地瞬时波数和频率，ε为小参数，(12) 代入方程（5）得：

$$(-i\omega^3A-\varepsilon\omega^2\frac{\partial A}{\partial T}-2\varepsilon\omega A\frac{\partial\omega}{\partial T}-2\varepsilon\omega^2\frac{\partial A}{\partial T}+i2\varepsilon^2\omega\frac{\partial^2A}{\partial T^2}+i2\varepsilon^2\frac{\partial A}{\partial T}\frac{\partial\omega}{\partial T}$$

$$+i\varepsilon^2\omega\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}+\varepsilon^3\frac{\partial^3 A}{\partial T^3}-\varepsilon\omega A\frac{\partial\omega}{\partial T}+i\varepsilon^2\frac{\partial\omega}{\partial T}\frac{\partial A}{\partial T}+i\varepsilon^2 A\frac{\partial^2\omega}{\partial T^2})$$

$$-g_1H\left(-iA\omega m^2-\varepsilon m^2\frac{\partial A}{\partial T}-2\varepsilon mA\frac{\partial m}{\partial T}-2\varepsilon m\omega\frac{\partial A}{\partial y}+i2\varepsilon^2 m\frac{\partial^2 A}{\partial T\partial y}\right.$$

$$\left.+i2\varepsilon^2\frac{\partial m}{\partial T}\frac{\partial A}{\partial y}+i\varepsilon^2\omega\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\varepsilon^3\frac{\partial^3 A}{\partial T\partial y^2}-\varepsilon\omega A\frac{\partial m}{\partial y}+i\varepsilon^2\frac{\partial m}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial T}+i\varepsilon^2 A\frac{\partial^2 m}{\partial T\partial y}\right)$$

$$+\left(f^2-\frac{g_1\beta^2}{4H}\right)\left(i\omega A+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial T}\right)=0. \tag{13}$$

令

$$A=A_0+\varepsilon A_1+\varepsilon^2A_2+\cdots, \tag{14}$$

把 (14) 代入 (13)，取ε^0近似，得:

$$\omega^3A_0-g_1H\omega m^2A_0-\left(f^2-\frac{g_1\beta^2}{4H}\right)\omega A_0=0,$$

即

$$\omega^2=m^2g_1H+f^2-\frac{g_1\beta^2}{4H}=\omega g^2(m,y). \tag{15}$$

同理，在地形坡度 $\alpha\sim10^{-3}$ 情形下，对于零级简化方程 (11)，可求得相应的频率方程为

$$\omega_0^2=m^2g_1H+f^2. \tag{16}$$

由 (15) 式，可得到波动在 y 方向的群速度:

$$C_g=-\frac{\partial\omega}{\partial m}=-\frac{mg_1H}{\omega}. \tag{17}$$

四、波 的 稳 定 度

频率方程 (15) 说明: 对于西风气流，南坡 ($\alpha>0$) 有利于波的不稳定、北坡 ($\alpha<0$) 不利于波的不稳定; 对于东风气流，情形则相反。这与文献[4]对作东西向传播的扰动所得到的结果是相似的。由 (15) 式，可得到不稳定的临界波长L_c:

$$L_c=\left[\frac{4\pi^2g_1H}{(g_1\beta^2/4H)-f^2}\right]^{1/2}. \tag{18}$$

当$L>L_c$时，波是不稳定的。例如，取$(\rho_2-\rho_1)/\rho_2=0.086$、$C_0=30\ \mathrm{m/s}$、$\bar{u}=20\ \mathrm{m/s}$、$\alpha=3\times10^{-2}$，在北纬 30° 处，$L_c=428.7\ \mathrm{km}$。地形坡度越大、波速越小（即$g_1H$越小)，不稳定波段越向短波方向扩展。因此，在其他条件相同的情况下，中尺度的慢波比快波更容易获得不稳定。

此外，由 (15) 式也可确定不稳定的临界地形坡度。量级分析和计算结果（略）都

表明，一般条件下（$H\sim10^3$ m、$\bar{u}\sim10^1$ m／s），只有当坡度 $\alpha\geqslant10^{-2}$ 时，地形才能引起中尺度重力惯性波的不稳定。文献[6]根据华东地区的资料计算指出，在下大气中对对称不稳定产生较大影响的地形坡度是 $\alpha=1.23\times10^{-2}$，这与本文的结果是相类似的。当 $\alpha\leqslant10^{-3}$ 时，中尺度的重力惯性波一般是稳定的。但即使是稳定的波，其振幅（扰动强度）也会随时间发生变化的。曾庆存指出，在一些扰动的发生发展过程中，似乎并不出现"不稳定"。因此，在讨论扰动的演变时，从其能时变化着眼，用"发展"这个概念来替代传统的"不稳定"概念，会更便于分析[7]。在下一节，我们将讨论地形对稳定波动发展的影响。

五、地形对扰动发展的影响

把（14）代入（13），取 ε^1 近似，得：

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial T}-\frac{mg_1H}{\omega}\frac{\partial A_0^2}{\partial y}=A_0^2\left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{g_1H}{\omega}\frac{\partial m}{\partial y}-\frac{2}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{2mg_1H}{\omega^2}\frac{\partial m}{\partial T}\right),\tag{19}$$

又

$$\frac{\partial C_g}{\partial y}=-\frac{g_1H}{\omega}\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{mg_1H}{\omega^2}\frac{\partial\omega}{\partial y}-\frac{mg_1}{\omega}\frac{\partial H}{\partial y},\tag{20}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial m}{\partial T}.\tag{21}$$

利用（17）、(20）和（21），把方程（19）改写为

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial T}+\nabla\cdot(\vec{C}_gA_0^2)=-\frac{3A_0^2}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial T}+\vec{C}_g\cdot\nabla\omega\right)-\frac{mg_1}{\omega}A_0^2\frac{\partial H}{\partial y},\tag{22}$$

其中 $\vec{C}_g$ 为 y 方向群速度矢，$\nabla\equiv\vec{j}d/dy$.

对于缓变波，有如下运动学关系：

$$\frac{\partial\omega}{\partial T}+\vec{C}_g\cdot\nabla\omega=\left(\frac{\partial\omega g}{\partial T}\right)_{m,y},\tag{23}$$

其中，下标表示取微分运算时固定。

在本模式中，Ω 与 T 无关，即

$$\left(\frac{\partial\omega g}{\partial T}\right)_{m,y}=0.\tag{24}$$

利用（23）和（24），把（22）化为：

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial T}+\nabla\cdot(\vec{C}_gA_0^2)=-A_0^2\frac{mg_1}{\omega}\frac{\partial H}{\partial y}.\tag{25}$$

前面曾指出，在地形坡度 $\alpha\sim10^{-3}$ 情形下，作为最低阶近似，方程（6）的地形项可略去。相应地，在这种情形下（$\alpha\sim10^{-3}$），方程组（2）中的地形项可略去而得到零

级简化的方程组（为方便计，我们称此零级简化方程组为模式 I，而把方程组（2）称为模式 II）。因此，作为最低阶近似，模式 II 的解可以用模式 I 的解业表示；因而模式 II 的平均能量密度（E_2）可以近似地用模式 I 的平均能量密度（E_1）来表示，即有

$$E_2 \approx E_1. \tag{29}$$

令$\eta' = a\sin\theta$，其中$\theta = my - \omega t$，对于缓变波列，作为最低阶近似，可把 a 看作常数。把此形式解代入模式 I，解得$v' = (\omega a / mH)\sin\theta$，$u' = (fa / mH)\cos\theta$且$\omega = \omega_0$。于是可求得模式 I 的平均动能密度$E_v$（因考虑到$H / L \ll 1$，所以对于动能省略了$W^2$）和平均位能密度$E_P$（以静止时的界面作为零参考位面）分别为

$$E_v = \frac{1}{LH\rho T_1}\int_0^{T_1}\int_0^{L}\int_0^{H}\left[\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)\right]dtdydz = \frac{a^2(f^2+\omega^2)}{4m^2H^2}, \tag{27}$$

$$E_P = \frac{1}{LH\rho T_1}\int_0^{T_1}\int_0^{L}\int_0^{\eta'}\rho gz\,dtdydz = \frac{ga^2}{4H}, \tag{28}$$

其中，T_1、L分别为周期和波长。故总能量密度E_1为

$$E_1 = E_v + E_P = qa^2, \tag{29}$$

其中，

$$q \equiv \left[\frac{g}{4H} + \frac{(f^2+\omega^2)}{4m^2H^2}\right] = \left[\frac{g}{4H} + \frac{g_1(f^2+\omega^2)}{4H(\omega^2-f^2)}\right].$$

对于缓变波，在缓变时、空间（即对缓变变量而言），由（29）式可得到

$$\frac{\partial E_1}{\partial T} + \nabla\cdot(\vec{C}_g E_1) = q\left[\frac{\partial a^2}{\partial T} + \nabla\cdot(\vec{C}_g a^2)\right] - \frac{a^2 f^2}{2g_1 H^3 m^4}\left(\frac{\partial\omega^2}{\partial T} + \vec{C}_g\cdot\nabla\omega^2\right), \tag{30}$$

即

$$\frac{\partial E_1}{\partial T} + \nabla\cdot(\vec{C}_g E_1) = q\left[\frac{\partial a^2}{\partial T} + \nabla\cdot(\vec{C}_g a^2)\right] - \frac{a^2 f^2}{2g_1 H^3 m^4}\left(\frac{\partial\omega g^2}{\partial T}\right)_{m,y}.$$

由于 Ω 与 T 无关，故（31）式化为

$$\frac{\partial E_1}{\partial T} + \nabla\cdot(\vec{C}_g E_1) = q\left[\frac{\partial a^2}{\partial T} + \nabla\cdot(\vec{C}_g a^2)\right]. \tag{32}$$

在包含扰动的整个区域 S 上积分（32）式，并取边界上扰动为零，则得

$$\int_S \frac{\partial E_1}{\partial T}dS = \int_S q\frac{\partial a^2}{\partial T}dS. \tag{33}$$

把（26）代入（33），得

$$\int_S \frac{\partial E_2}{\partial T} dS \approx \int_S q \frac{\partial a^2}{\partial T} dS, \tag{34}$$

(34) 式说明，在最低阶近似条件下，扰动的能量变化与扰动的振幅变化成比例。因此，根据振幅方程 (25)，可写出波能密度E_2的变化方程：

$$\int_S \frac{\partial E_2}{\partial T} dS \approx \int_S q \frac{\partial A_0^2}{\partial T} dS = \int_S - q A_0^2 \frac{m g_1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial y} dS, \tag{35}$$

即：

$$\int_S \frac{\partial E_2}{\partial T} dS \approx \int_S - \frac{g_1 q m^2 A_0^2}{\omega^2} (\vec{C} \cdot \nabla h) dS - \int_S \frac{q m^2 A_0^2}{\omega^2} f \bar{u} C dS, \tag{36}$$

其中，$C \equiv -\omega / m$为扰动相速度，$\therefore \equiv \vec{j} d / dy$.

方程 (36) 等号右方是重力惯性波发展的能源 (汇)。若$\int_S (\partial E_2 / \partial T) dS > 0$，则扰动将发展；若$\int_S (\partial E_2 / \partial T) dS < 0$则扰动将减弱。下面，分别讨论各能源 (汇) 项的物理意义：

(1) 在g_1为常数条件下，若无地形起伏和基本气流，则波能守恒。

(2) 在$\omega_2 > 0$情况下，$q > 0$，若层结稳定 (相当于$g_1 > 0$)，则当扰动"上坡" (沿地形高度的升度方向传播，即$C(dh / dy) > 0$) 时，扰动的能量将减少，即扰动将减弱；"下坡" (沿地形高度的负升度方向传播，即$C(dh / dy) < 0$) 时则相反，扰动将发展。因此在山后 (这里所谓山前山后，是相对于波的来向而言，下同) 容易有大振幅的重力惯性波发展。若层结为不稳定 (相当于$g_1 < 0$)，则扰动"上坡"时其能量将增加，即扰动将发展；"下坡"时则相反，扰动将减弱；因而在山前更容易产生由重力惯性波启动的对流。巢纪平指出，可以把一条对流云带的移动看成是波的传播[1]。因而方程 (36) 右方第一项说明，在层结不稳定大气中，云带"上坡"时会进一步发展，对流天气将加剧。葛润生[8]在分析了北京地区的山地对风暴强度变化的影响后指出，高度为200—300 m 的小山，有利于风暴在山前猛烈发展。这与我们上述的分析结论是相吻合的。

(3) 方程 (36) 右方第二项是基本气流的影响，它表明 (在$\omega^2 > 0$的情况下)：在东风带 ($\bar{u} < 0$) 中，往北 (y 轴正向) 传的扰动将发展；往南传的扰动将减弱。在西风带 ($\bar{u} > 0$) 中，往北传的扰动将减弱；往南传的扰动将发展。在华南前汛期，低空常吹西南风，把 x 轴正向取为与西南气流去向一致。则这一项表明，从西北向东南方向传播的扰动将发展。这与我们在基本气流有水平切变和垂直切变情况下所得到的结果—向急流右侧传播的扰动发展[9, 10]—是相似的。

若$\omega^2 < 0$，则会得到与上述规则相反的结论，但此时波是不稳定的，波动性将消失而只有局地的对流。

致谢：贺海晏副教授和杨平章副教授对本工作提了许多有益的意见，特此致谢。

参考文献

[1] 巢纪平，1980，非均匀层结大气中的重力惯性波及其在暴雨预报中的初步应用，大气科学，第4卷，第3期，230–235.
[2] 刘式适、刘式达，1987，地球流体惯性重力内波的波作用量与稳定性，大气科学，第11卷，第1期，12–21.
[3] 吴池胜，1990，层结大气中重力惯性波的发展，大气科学，第14卷，第3期，379–383.
[4] 吕克利，1986，地形对低空地转气流上重力惯性波稳定性的影响，大气科学，第10卷，第2期，220–224.
[5] 李崇银等，1985，动力气象学概论，气象出版社，156–158.
[6] 赵瑞星等，1990，地形对对称不稳定的影响，大气科学文集，科学出版社，112–121.
[7] Zeng Qingcun, 1983, The development characteristics of quasigeostrophic baroclinic disturbances, *Tellus*, **35**. A 337–349.
[8] 葛润生，1983，强切变对流过程中风暴回波的特征，强对流天气文集，气象出版社，114–121.
[9] 吴池胜，贺海晏，1990，斜压对称波动的发展，大气科学文集，科学出版社，105–111.
[10] 贺海晏，吴池胜等，1990，切变流场中惯性重力内波的发展，热带气象，第6卷，第3期，203–209.

Effect of Topagraphy on The Development of Inertial Gravity Wave

Wu Chisheng

(Department of Atmospheric Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract

Using the WKB method, the effect of topagraphy with steep slope orientationly in north–south on the shallow water inertial gravity wavehas been studied. It is discovered that the disturbance propagating horizontally along upgradient (or downgradient) orientation of the topagraphic height will be decaied (or amplified) if the fluid is stably stratified, and vice verse.

Key words: inertial gravity wave; topagraphy; development of disturbance.