第18卷 第1期　　大　气　科　学　　Vol. 18, No. 1
1994 年 1 月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　Jan. 1994

低 Peclet 数下剪切流中气溶胶粒子的传质率*

温景嵩
(南开大学物理系，天津 300071)

曾庆存　王永光
(中国科学院大气物理研究所，北京 100080)

提　要

本文研究了低 Péclet 数下剪切流中气溶胶粒子的传质率。Péclet 数(Pe)是物质浓度的对流输送项对分子扩散项的比。它等于 Reynolds 数(Re)与 Schmidt 数的(Sc)之积。本文应用奇异扰动方法得到了无因次传质率Nu(Nusselt 数)在小 Péclet 数条件下的四项渐近展式，因而改进了前人的结果。

关键词：传质率；蒸发与凝结；气溶胶力学。

一、引　言

气溶胶粒子的传质问题，即组成气溶胶粒子的物质，通过分子扩散与对流输送过程向四周介质传播出去；或相反，组成该粒子的物质从四周介质中向该粒子输送过来。这问题涉及到气溶胶系统中粒子与四周介质的质量与能量的交换过程，是气溶胶力学中的基本问题之一[1]。在云物理学中，这问题即是云滴或雨滴的蒸发或凝结问题。显然，无论对于一般的气溶胶系统而言，抑或是对特殊的气溶胶系统——云雾而言，这都是一个重要问题，因而得到了研究工作者的注意，在这方面近年来已开展了许多工作[2]。

对于大多数气溶胶粒子来说($a<10\mu$m，a为粒子半径)，Reynolds 数很小，$Re<1$。粒子与四周介质的惯性力均可忽略，传质过程仅由一个无因次参数 Péclet 数(Pe)来确定。这里Pe是对流输送项对分子扩展项的比，它是Re数与Sc数之积。Sc数是空气运动粘性系数 ν 对该物质的分子扩散系数D的比值。对于气溶胶系统，Sc数的量级是1。例如在水汽分子扩散过程中$Sc=0.60$，所以，气溶胶系统中的传质过程一般也属于小 Péclet 数过程。$Pe<1$。当Pe数很小时，分子扩散效应居主导地位，作为一级近似，可以忽略对流效应。因此，无因次的传质率Nu等于它在纯扩散过程下的传质率N_0。当无因次传质率是以零 Péclet 数下纯扩散传质率$Q_0=4\pi aD\Delta C$归一时(这里ΔC表粒子表面与四周介质的该物质的浓度差)，$N_0=1$，当$Pe<1$且不为零时，由对流效应引起的附加的传质率，就是一个求小参数Pe下的扰动解问题。不幸，这并不是一个可以直接做迭代求解的简单的正则扰动问题。

1991 年 6 月 29 日收到，1992 年 1 月 18 日收到修改稿。
* 国家自然科学基金与 LASG 共同资助项目。

这问题的基本困难在于以下这一事实。纯扩散方程的解与距离的负一次方成比例，因而不能在全部空间中均匀一致地成立。由于对流输送项是一阶导数，分子扩散项是二阶导数，后者就要比前者衰减得快。因此，不管Pe数是如何之小，总会存在一个临界距离r_c，超过这一距离以后，对流效应反而占主导地位，从而使纯扩散方程在这个距离以外(外域)不再成立。在均匀流场中(例如由粒子重力沉降引起的对流效应)、内域空间的临界距离r_c与Pe^{-1}成正比。在非均匀线性外流场中，r_c与$Pe^{-1/2}$成正比。在$r>r_c$的外域中，纯扩散方程不再能应用。显然，这是一个奇异扰动问题。在外域一般应通过坐标伸缩变换来建立起外域方程并建立相应的解的外展式。整个问题的解则要通过内外展式相互匹配求得[3]。应用严格的匹配渐近展开法，对于均匀外流场小 Peclet 数下的无因次传质率Nu，Acrivos 与 Taylor[4]早已求出了五项渐近展式。次年 Brenner 证明[5]，这展式的前两项也适用于非球形粒子。1979 年 Batchelor 用另外一种比较简单的方法也导得了前两项[6]，其结果与前面的相同，即

$$Nu = 1 + 0.50Pe. \tag{1}$$

在云物理学中，Nu即通常所谓的通风因子。然而，在一般云物理中(例如梅森的《云物理学》[7])，通常云滴质量凝结增长所引用的公式为

$$Nu = 1 + FRe^{1/2}, \tag{2}$$

在梅森一书中，常数$F=0.23$，需要指出，这公式是在高Re数下($10<Re<100$)通过实验获得的，我们已经指出了Sc的量级为 1，对于云滴凝结而言$Sc=0.6$，因此，高Re数条件下，Pe数也是高的，公式(2)显然不能应用于低Re、低Pe数的云滴质量凝结问题。Fletcher[8]据此计算了云滴质量凝结增长的对流效应，Rogers(1976)也做过类似的计算，这都是不对的。我们在文献[1]中已经纠正了这一错误。指出，按照(1)式，有重力对流效应时云滴质量凝结无因次增长率公式应为

$$Nu = 1 + 0.30Re. \tag{3}$$

公式(2)显然高估了对流效应。

利用最初是由 Proudman 和 Pearson[9]建立的匹配渐近展开法，Frankel 和 Acrivos[10]导出了小Pe数下剪切流中球形自由粒子的两项传质率渐近展式:

$$Nu = 1 + 0.257Pe^{1/2} \tag{4}$$

这里$Pe=\gamma a^2/D$，γ表示未被扰动的流场剪切率。Batchelor[6]用更简单的一种物理论证法，导出了在范围更广泛的一般线性外流场中传质率的两项展式。其中适用于气溶胶系统的一部分结果，已给在文献[1]之中。本文则利用严格匹配渐近展开法[3]，把 Frankel 和 Acrivos 的剪切流中小Pe数的两项展式，推进到四项，从而改善了他们的结果。Van Dyke 对奇异扰动中的这种匹配渐近展开法，已经做出了系统而周密的总结。对该方法有兴趣的读者，可参阅文献[3]。

二、问题的表述

半径为a的球形粒子，悬浮在剪切率为γ的剪切流场之中。由于粒子很小，流场可视为低Re数与不可压的。粒子从其表面释放出的可扩散物质浓度C^*，在粒子表面处为C_0，在无穷远处为零。传质过程将由分子扩散与对流输送两因子所决定。其支配方程与相应的边界条件为

$$\underset{\sim}{u}^* \cdot \nabla C^* = D\nabla^2 C^*, \tag{5}$$

以及

$$C^* = C_0 \qquad (\text{当} r^* = a \text{时}), \tag{6}$$

$$C^* = 0 \qquad (\text{当} r^* \to \infty \text{时}), \tag{7}$$

这里$\underset{\sim}{u}^*$是相对于球心的流场分布，$r^* = \left|\underset{\sim}{r}^*\right|$，$\underset{\sim}{r}^*$是位置向量(球极坐标系原点与球形粒子中心重合)。上式所有带星号的量均表有量纲的量。

考虑一直角坐标系，其原点也与球心重合。坐标轴Ox^*取向与背景流场$\underset{\sim}{U}^*$相平行。坐标轴Oy^*则与背景流场的零速度平面相垂直。因此，在这个坐标系中，未被扰动的剪切流场可以表为

$$\underset{\sim}{U}^* = \gamma y^* \underset{\sim}{e}_{x^*}, \tag{8}$$

这里$\underset{\sim}{e}_{x^*}$是沿x^*的单位矢量。由于粒子假设为刚性的(注意，云滴在一般情况下均可视为刚性的，参见文献[1])，扰动流场$\underset{\sim}{u}^*$在粒子表面上满足无滑流条件。粒子同时也假定为自由粒子，不受外力也不受外力偶作用。

现在把问题变成无因次形式，令$r = r^*/a$，$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^*/a\gamma$，$C = C^*/C_0$，则(5)—(8)式变成

$$\nabla_r^2 C = \varepsilon \underset{\sim}{u} \cdot \nabla_r C, \tag{9}$$

$$C = 1 \qquad (\text{当} r = 1 \text{时}), \tag{10}$$

$$C = 0 \qquad (\text{当} r \to \infty \text{时}), \tag{11}$$

以及

$$U = y \underset{\sim}{e}_x. \tag{12}$$

(9)式中小参数$\varepsilon = Pe$。扰动流场$\underset{\sim}{u}$则由下式给出[10]:

$$u_r = \frac{1}{2}(r - \frac{5}{2}r^{-2} + \frac{3}{2}r^{-4})\sin^2\theta\sin^2\varphi, \tag{13}$$

$$u_\theta = \frac{1}{2}(r - r^{-4})\sin\theta\cos\theta\sin2\varphi, \tag{14}$$

$$u_\varphi = -\frac{1}{2}r\sin\theta + \frac{1}{2}(r - r^{-4})\sin\theta\sin2\varphi. \tag{15}$$

从方程(9)，(10)，(11)可以看出，纯扩散方程的解(令 $\varepsilon=0$)为$C=1/r$，于是，在这个处理中被完全忽略的对流项量级为$Pe^{1/2}/r$。而扩散项的量级为r^{-3}，两项的比值是 Per^2，虽然当 Pe数很小时，这个比值很小，但永远存在一个外域 $r>r_C(=Pe^{-1/2})$，在这外域中，比值变成十分大，而不管Pe数是如何之小。因此，不可能期待用以下方法去求二级近似解能够成功。这种方法把$C=1/r$的扩散解直接代入在一级近似中被忽略了的对流项中去，从而得到一个非齐次的方程，由此来求二级近似解。直接扰动方法的失败导致人们去使用奇异扰动理论中的匹配渐近展开法[3]。

三、内外展式的构造

在外域，我们做如下变量变换，即

$$\underset{\sim}{\rho} = \varepsilon^{1/2}\underset{\sim}{r}. \tag{16}$$

由此得到外域方程

$$\nabla_\rho^2\hat{C} - y\frac{\partial\hat{C}}{\partial x} = \varepsilon^{3/2}\left(-\frac{5}{4}\rho^{-2}\sin^2\theta\sin2\varphi\frac{\partial\hat{C}}{\partial\rho}\right)$$
$$+\varepsilon^{5/2}\left(\frac{3}{4}\sin^2\theta\sin2\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{C}}{\partial\rho} - \frac{1}{2}\rho^{-5}\sin\theta\cos\theta\sin2\varphi\frac{\partial\hat{C}}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{2}\rho^{-5}\cos2\varphi\frac{\partial\hat{C}}{\partial\varphi}, \tag{17}$$

式中$\hat{C}$表示外域中无因次浓度C。

内域中，方程(9)连同边界条件(10)仍能成立。因此内域方程即是(9)。

内展式与外展式分别假定为

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} t^{(n)}(\varepsilon)C^{(n)}(\underset{\sim}{r}), \tag{18}$$

$$\hat{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{t}^{(n)}(\varepsilon)\hat{C}^{(n)}(\underset{\sim}{\rho}), \tag{19}$$

式中$t^{(n)}(\varepsilon)$与$\hat{t}^{(n)}(\varepsilon)$是渐近序列(参见文献[3])。并且

$$t^{(1)}(\varepsilon) = 1. \tag{20}$$

其他的渐近序列并不必然是ε的幂函数，目前我们只能说它们应分别满足下列条件：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{t^{(n+1)}(\varepsilon)}{t^{(n)}(\varepsilon)} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\hat{t}^{(n+1)}(\varepsilon)}{\hat{t}^{(n)}(\varepsilon)} = 0.$$

具体的函数形式只能从内外展式匹配中求得。

内外展式$C^{(n)}$与$\hat{C}^{(n)}$的边界条件分别为

$$C^{(1)}=1,\qquad C^{(n)}=0\quad(n=2,3,\cdots)\qquad 当 r=1 时, \tag{21}$$

$$\hat{C}^{(n)}=0,\qquad (l=1,2,\cdots)\qquad 当 \rho\to\infty 时, \tag{22}$$

显然这些边界条件不足以唯一地确定$C^{(n)}$与$\hat{C}^{(n)}$，然而在$r\to\infty$处以及$\rho\to 0$处的附加条件，能够在内外展式匹配中得到补充。

四、解$C^{(1)}$与$\hat{C}^{(1)}$的确定

把(18)式代入方程 (9)产且忽略阶数小于工$O(1)$的各项以后得一阶内方程如下：

$$\nabla_r^2 C^{(1)}=0 \tag{23}$$

方程(23)的边界条件是(21)，满足其条件的解是

$$C^{(1)}=1-A_0+\frac{A_0}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r^{n+1}}-r^n\right)\sum_{m=-n}^{\infty}A_{n,m}P_n^{(m)}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{24}$$

式中$P_n^{(m)}(\cos\theta)$是连带 Legendre 多项式。常数A_0，$A_{n,m}$($n=1$，2，…；$m=-n$，$1-n$，…，n)将由与外展式匹配确定。

把(14)式代入方程(17)并且忽略阶数小于$O(1)$的各项后得到一阶外方程如下：

$$\nabla_\rho^2\hat{C}^{(1)}-\hat{y}\frac{\partial\hat{C}^{(1)}}{\partial\hat{x}}=0, \tag{25}$$

方程(25)满足边界条件(22)的解是[10]

$$\hat{C}^{(1)}=\frac{B_1}{2\pi^{1/2}}\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\frac{1}{12}s^2\right)^{1/2}s^{3/2}}\exp\left\{-\left[\frac{\left(\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}s\right)^2}{4s\left(1+\frac{1}{12}s^2\right)}+\frac{\hat{y}^2+\hat{z}^2}{4s}\right]\right\}. \tag{26}$$

当$\rho\to 0$时上式变为

$$\hat{C}^{(1)}(\rho,\theta,\varphi)=B_1\left(\frac{1}{\rho}-\beta_0+\frac{9}{8}\sin^2\theta\sin 2\varphi\right)+O(\rho), \tag{27}$$

其中

$$\beta_0=\frac{1}{2\pi^{1/2}}\int_0^\infty\frac{ds}{s^{3/2}}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{12}s^2\right)^{1/2}}\right]=\frac{0.914}{2\pi^{1/2}}. \tag{28}$$

(27)式中的前两项与文献[10]形状一致。但是，在该文中有一印刷错误，在积分中丢掉了一负号。

现在使(24)与(27)式相匹配。以内变数r表示(27)式的$\hat{C}^{(1)}$，则$\hat{C}^{(1)}$的主导项为

$B_1\hat{t}^{(1)}(\varepsilon)/r\varepsilon^{1/2}$。以外变数$\rho$表示(24)式的$C^{(1)}$，若$A_{n,m}$并不全为零，则$C^{(1)}$的主导项应是$\varepsilon^{(N+1)/2}A_{n,m}/\rho^{N+1}$，$(N>0)$，这里$N$是$n$中满足$A_{n,m}\neq 0$的最大值。这样，它们就无法相互匹配。为使匹配得以实现，全部$A_{n,m}$就必须为零，即

$$A_{n,m}=0 \qquad n=1,2,\cdots;\ m=-n,1-n,\cdots,n. \tag{29}$$

于是$C^{(1)}$的主导项现在则是$1-A_0$，假使$1-A_0$不为零，内外展式仍不能相互匹配。因此，$1-A_0$必为零，亦即

$$A_0=1. \tag{30}$$

现在，$C^{(1)}$的主导项则成为$\varepsilon^{1/2}/\rho$，使此结果与$\hat{C}^{(1)}$的主导项$B_1\hat{t}^{(1)}(\varepsilon)/r\varepsilon^{1/2}$，相比较可知，仅当

$$\hat{t}^{(1)}(\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}, \tag{31}$$

且

$$B_1=1 \tag{32}$$

时，匹配才得以实现。因此，一阶内外展式分别为

$$C^{(1)}=\frac{1}{r}, \tag{33}$$

$$\hat{C}^{(1)}=\frac{1}{2\pi^{1/2}}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^{3/2}\left(1+\frac{1}{12}s^2\right)^{1/2}}\exp\left\{-\left[\frac{\left(\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}s\right)^2}{4s\left(1+\frac{1}{12}s^2\right)s}+\frac{\hat{x}^2+\hat{z}^2}{4s}\right]\right\}. \tag{34}$$

相应的渐近序列项$\hat{t}^{(1)}$则由(31)式给出。

五、内外展式的高阶项

用与上节相类似的方法，内展式的前四项以及外展式的前三项均可依次得到。把它们联合在一起就可得到阶数精确到$\varepsilon^{3/2}$的方程(9)的均匀一致的渐近解。

内展式中的$C^{(2)}$，$C^{(3)}$，$C^{(4)}$分别由下式给出：

$$C^{(2)}=-\beta_0\left(1-\frac{1}{r}\right), \tag{35}$$

$$C^{(3)}=-\beta_0^2\left(1-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{16}(2r-5r^{-2}+5r^{-3}-2r^{-4})\sin^2\theta\sin 2\varphi, \tag{36}$$

$$C^{(4)}=-\beta_0^3\left(1-\frac{1}{r}\right)+\frac{\beta_0}{16}(2r-5r^{-2}+5r^{-3}-2r^{-4})\sin^2\theta\sin 2\varphi, \tag{37}$$

渐近序列项$t^{(2)}$，$t^{(3)}$，$t^{(4)}$则分别由下式给出：

$$t^{(2)}=\varepsilon^{1/2}, \tag{38}$$

$$t^{(3)}=\varepsilon, \tag{39}$$

$$t^{(4)} = \varepsilon^{3/2}, \tag{40}$$

外展式的$\hat{C}^{(2)}$与$\hat{C}^{(3)}$分别是:

$$\hat{C}^{(2)} = \beta_0 \hat{C}^{(1)}, \tag{41}$$

$$\hat{C}^{(3)} = \beta_0^2 \hat{C}^{(1)}, \tag{42}$$

相应的渐近序列项$\hat{t}^{(2)}$，$\hat{t}^{(3)}$则分别由下式给出:

$$\hat{t}^{(2)} = \varepsilon, \tag{43}$$

$$\hat{t}^{(3)} = \varepsilon^{3/2}. \tag{44}$$

六、无因次传质率Nu的渐近展式

传质率Q由下式给出

$$Q = \int_{S_1} (-D\nabla C^* + \underset{\sim}{u} \cdot C^*) \cdot \underset{\sim}{n} dA^*, \tag{45}$$

式中S_1是任一包围该给定粒子的闭合曲面，并且dA^*是曲面上的一个面积元，$\underset{\sim}{n}$是该面积元的单位外法向矢量。

我们定义无因次传质率Nu(Nusselt 数)如下:

$$Nu = \frac{Q}{Q_0}. \tag{46}$$

式中Q_0是零 Péclet 数纯扩散传质率，其表达式已在前面给出。

由于在定常状态下，Q与S_1的选择无关，我们选择该粒子的表面为积分曲面，于是

$$Nu = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=1} \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{47}$$

由于连带 Legendre 多项式的正交性，当C按连带 Legendre 多项式展开时，仅仅相应于$n=0$的分量(我们称之为C^0)对(47)式中的积分有贡献，因此

$$Nu = -\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=1}. \tag{48}$$

把(18)，(33)，(35)—(40)式代入上式后得到Nu的渐近展式如下:

$$Nu = 1 + \beta_0 Pe^{1/2} + \beta_0^2 Pe + \beta_0^3 Pe^{3/2} + o(Pe^{3/2}), \tag{49}$$

式中的常数β_0由(28)式给出。

(49)式的前两项与文献[10]一致。显然，第一项代表了无对流时纯扩散的无因次传

质率；第二项代表了弱剪切流对传质率贡献的主导项，它永远是正的。所以剪切流总的效应是增加传质率。正如 Batchelor 所指出[6]，由于对流的存在，它把物质浓度不改变地输送到临界距离r_c处。因此，就增加了在内域中总的浓度差，从而增加了分子扩散通量。这是传质率增加的原因。(49)式中的第二、第三、第四项给出了更精确的对流效应的贡献。如(49)式指出，这些项也是正值。

参 考 文 献

[1] 温景嵩，1989，微大气物理学导论，科学出版社。

[2] Masuda, S. and Takahashi, K., 1990, Aerosols: Science, Industry, Health and Environment, *Proceedings of the 3rd international Aerosol Conference*, 24–27 September 1990, Kyoto Japan, Pergamon Press.

[3] Van Dyke, M., 1975, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Annotated Edition, The Parabolic Press.

[4] Acrivos A. and Taylor, T.D., 1962, Heat and Mass Transfer form *single* Spheres in Stokes Flow, *Phys. Fluids*, **5**, 387.

[5] Breenner,H., 1963, Forced Convection Heat and Mass Transfer at Small Péclet Numbers from a Particle of Arbitrary Shape, *Chem.Eng, Sci.*, **18**, 109.

[6] Batchelor, G.K., 1979, Mass Transfer from a Particle Suspended in Fluid with a Steady Linear Ambiet Velocity Distribution, *J. Fluid Mech.*, **95**, 369.

[7] 梅森，B.J., 1979, 云物理学，科学出版社。

[8] Fletcher, N.H., 1962, The Physics of Clouds, Cambridge University Press.

[9] Proudman, I. and Pearson, J.R.A. 1957; Expansions at small Reynolds Numbers for the Flow Past a Sphere and a Circular Cylinder, *J. Fluid Mech.*, **2**, 237.

[10] Frankel, N.A. and Acrivos, A, 1968, Heat and Mass Transfer from Small Spheres and Cylinders Freely Suspended in Shear Flow. *Phys: Fluids*, **11**, 1913.

Mass Transfer from An Aerosol Particle Suspended in A Simple Shear Flow of Small Péclet Number

Wen Jingsong

(*Department of physics, Nankai University, Tianjin* 300071)

Zeng Qingcun and Wang Yongguang

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract

This paper deals with the rate of mass transfer from an aerosol particle Suspended in a simple shear flow of small Péclet number, which provides a measure of the ratio of the convection to diffusion and is equal to the product of the Reynolds number and the Schmidt number. In particular a fourterm expansion for the dimensionless mass transfer rate is developed by making use of a singular perturbation method.

Key wouds: mass transfer rate; evaporation and condensation; aerosol kinetics.