

E 网格变量分布下差分格式的性质

宇如聪

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

提 要

本文用线性化的浅水波方程系统地分析、讨论了 E 网格变量分布下差分计算的性质; 指出了目前有关讨论 E 网格差分性质在方法上存在的问题; 给出了一种解决 E 网格中两个 C 网格分离的方法; 提出了一种 E 网格用于海洋计算时, 海洋侧边界条件的处理方法, 初步的数值试验证明了这些方法对抑制 E 网格中的计算噪声是有效的。

关键词: 变量分布网格; E 网格; 边界条件

一、引 言

Winninghoff^[1], Arakawa 和 Lamb^[2]最早用线性化的浅水波方程系统比较了 5 种水平网格分布下的空间中央差分对重力惯性波频散的歪曲, 指出了 A、D 网格的性能较差。后来的许多工作也揭示了 A、D 网格还有另外一些问题^[3]。所以, 在最近建立的数值模式中, 已很少有人再用 A、D 网格作为变量的水平分布了。目前在全球大气模式和海洋模式中, 用的较多的是 B、C 网格。至于 E 网格, 由于其变量分布的特殊性, 似乎使得人们对它的分析和应用产生了困难。相邻网格线的交错, 使得通常的沿网格线进行的单波分析法往往抓不住问题的本质; 同一网格线上总是既有高度场又有速度场, 使得边界处理好象不如 B、C 网格那样方便。另外, 其实在 A、B、E 网格上都存在着的对纯重力波方程的 C 网格分离问题^[4], 在 E 网格分布下显得更为直观。这可能也是人们不选用 E 网格的原因之一。而实际上, B、E 网格都存在着两套 C 网格的分离, A 网格则存在着 4 套 C 网格分离。这种分离是产生计算噪声的原因之一。

人们在分析 E 网格的差分性质时, 总是与分析其它网格的性质一样, 仅用沿网格线的单波分析法, 从而不能了解 E 网格的全貌。Arakawa 和 Lamb^[2]先用一维重力惯性波方程得出了 E 网格对频散的歪曲和 A 网格相同(其实, 由于 E 网格的相邻网格线交错, 是不存在对应的一维 E 网格的)。当他们进行二维分析时, 可能是受到一维分析的影响, 他们把 E 网格对应的频散框图画到一倍格距波去和其它网格画到二倍格距波的频散框图进行比较, 这显然不能对 E 网格频散性质作出正确的判断。Batteen 和 Han^[5]所推得的 E 网格频散方程是错误的, 由此他们也得出了 E 网格和 A 网格的频散方程相同。Janjic^[6]给出了一种解决 E 网格中 C 网格分离的方法。由于他只用了沿网格线方向的单波分析法去分析此方法的效果, 他没有抓住问题的关键。尽管这种方法对抑制方

E 网格上的 C 网格分离是有效的, 他的讨论却是不完善的。

由于在 E 网格变量分布下, 差分计算是沿网格线进行的, 所以当我们要单纯分析一种格式的计算效果时, 可以沿网格线进行单波分析, 但要注意的是, 这种分析方法不能反映相邻网格线交错的情况。要了解 E 网格的全貌还需要沿对角线方向进行单波分析。尤其是在研究 E 网格的 C 网格分离时, 沿对角线的分析就更为重要了。

从第二节到第六节, 我们将首先分别比较一下 E 网格和其它 4 种网格的频散关系和计算精度, 然后给出解决 E 网格中 C 网格分离的办法和边界处理方法, 最后用数值试验考察这些方法的效果。

二、分析 5 种网格分布下的频散方程

取如下形式的线性化浅水波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

式中各符号都是常用的。Arakawa 和 Lamb^[2]已经分别给出了 5 种网格分布下取空间中央差所得的微分-差分方程。考察这些方程, 不难看出, 除 E 网格变量分布下的差分计算外, 其它 4 种网格的差分计算都不可避免的要用到空间平均。这些空间平均的结果必然要带来对频散关系的更大歪曲, 尤其是当网格距较大时。设单波解 $\exp i(kx + ly - ct)$ 代入方程(1)–(3)式及它在 5 种网格分布下的微分-差分方程, 可分别得到如下的频散方程:

真实频散方程:

$$\left(\frac{c}{f} \right)^2 = \lambda^2 (k^2 + l^2) + 1, \quad (4)$$

$$A. \quad \left(\frac{c}{f} \right)^2 = \lambda^2 \left[k^2 \left(\frac{\sin k \Delta x}{k \Delta x} \right)^2 + l^2 \left(\frac{\sin l \Delta y}{l \Delta y} \right)^2 \right] + 1, \quad (5)$$

$$B. \quad \left(\frac{c}{f} \right)^2 = \lambda^2 \left[k^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} k \Delta x}{\frac{1}{2} k \Delta x} \right)^2 \cos^2 \frac{1}{2} l \Delta y \right. \\ \left. + l^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} l \Delta y}{\frac{1}{2} l \Delta y} \right)^2 \cos^2 \frac{1}{2} k \Delta x \right] + 1, \quad (6)$$

$$C. \quad \left(\frac{c}{f}\right)^2 = \lambda^2 \left[k^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} k \Delta x}{\frac{1}{2} k \Delta x} \right)^2 + l^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} l \Delta y}{\frac{1}{2} l \Delta y} \right)^2 \right] + \cos^2 \frac{1}{2} k \Delta x \cdot \cos^2 \frac{1}{2} l \Delta y, \quad (7)$$

$$D. \quad \left(\frac{c}{f}\right)^2 = \lambda^2 \left[k^2 \left(\frac{\sin k \Delta x}{k \Delta x} \right)^2 \cos^2 l \Delta y + l^2 \left(\frac{\sin l \Delta y}{l \Delta y} \right)^2 \cos^2 k \Delta x \right] + \cos^2 \frac{1}{2} k \Delta x \cdot \cos^2 \frac{1}{2} l \Delta y, \quad (8)$$

$$E. \quad \left(\frac{c}{f}\right)^2 = \lambda^2 \left[k^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} k \Delta x}{\frac{1}{2} k \Delta x} \right)^2 + l^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} l \Delta y}{\frac{1}{2} l \Delta y} \right)^2 \right] + 1, \quad (9)$$

其中, $\lambda = \sqrt{gH} / f$.

显然, E 网格对应的频散方程(9)对真实频散方程(4)的歪曲最小。可是, 正如上一节中所说, 这种沿网格线的分析不能反映出 E 网格相邻网格线交错的影响。下面就将再对 E 网格的微分—差分方程沿对角线方向进行单波分析。

由于在一般情况下, $\Delta x = \Delta y$ 不一定成立, 所以首先需做坐标变换, 把矩形网格(图 1a) 变换为方形网格(图 1b)。

假设 $\Delta y / \Delta x = \alpha$, 坐标变换为:

$$\xi = \alpha x; \quad \eta = y, \quad (10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha \frac{\partial F}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}. \quad (12)$$

在 (ξ, η) 坐标下, $\Delta \xi = \Delta \eta$, $d = 0.5\sqrt{(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2}$ (见图 1b)。

现将图 1b 中的格点顺序沿对角线方向排列, 并沿对角线方向设单波解 $\exp i(kx' + ly' - ct)$ 代入 E 网格的微分—差分方程后可得如下形式的频散方程:

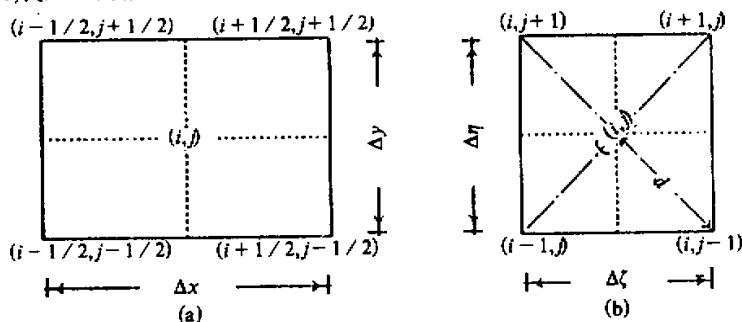


图 1 E 网格。

(a) 一般的矩形 E 网格; (b) 坐标变换后的方形 E 网格

$$\left(\frac{c}{f}\right)^2 = \lambda^2 \frac{2}{d^2} \left[x^2 \sin^2 \frac{1}{2}(k-l)d + \sin^2 \frac{1}{2}(k+l)d \right] + 1, \quad (13)$$

特别是当 $\alpha = 1$ 时,

$$\left(\frac{c}{f}\right)^2 = \lambda^2 \left[k^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2}kd}{\frac{1}{2}kd} \right)^2 \cos^2 \frac{1}{2}ld + l^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2}ld}{\frac{1}{2}ld} \right)^2 \cos^2 \frac{1}{2}kd \right] + 1. \quad (14)$$

比较(6)和(14)式, 当方形 B 网格的格距和方形 E 网格的半对角线长度相等时, B、E 网格的频散性质相似。这也说明了人们早已觉察到的 B、E 网格仅差 45° 坐标旋转是有道理的。而比较公式(9)和(14)可知, 仅用沿网格线方向的单波分析是不能了解 E 网格的全部频散性质的。如果把(9)式中的 $k\Delta x$ 在 $[0, 2\pi]$ 范围内取值去比较把(5)式中的 $k\Delta x$ 在 $[0, \pi]$ 内取值, 也就得出了 A、E 网格频散方程相同的错误结论。这正是 Arakawa 和 Lamb^[2], 以及 Batteen 和 Han^[5] 试图仅用沿网格线分析得到 E 网格全部频散性质所出现的错误。

上面的分析说明, E 网格的频散特性是好的, 绝不是与 A 网格相同。由于 E 网格兼有 B 网格和 C 网格的特点, 实践证明, 如果我们能妥善解决 E 网格中 C 网格的分离问题, E 网格是很好用的(参看[7])。

三、比较 5 种网格分布下差分格式的精度

由于这里都是采用空间中心差分, 显然其精度都是二阶的。下面所要讨论的是比较它们二阶精度的系数。对 A、B、E 网格只需考察它们一阶空间差分的精度, 而对 C、D 网格还需考察 Coriolis 力项 4 点平均的精度。

假设 $\Delta x = \Delta y$, $d = \Delta x / \sqrt{2}$, F 代表任一变量, 用台劳展开方法, 不难得到 5 种方案的计算精度如下:

$$A. \quad \frac{\overline{\delta_x F^x}}{\Delta x} \sim \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{6} (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}, \quad (15)$$

$$B. \quad \frac{\overline{\delta_x F^y}}{\Delta x} \sim \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{6} (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}, \quad (16)$$

$$C. \quad \frac{\delta_x F}{\Delta x} \sim \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{24} (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}, \quad (17)$$

$$\overline{F^{xy}} \sim F + \frac{1}{4} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (18)$$

$$D. \quad \frac{\overline{\delta_x F^{xy}}}{\Delta x} \sim \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{7}{24} (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}, \quad (19)$$

$$\overline{F^{xy}} \sim F + \frac{1}{4} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (20)$$

$$E. \quad \frac{\partial_x F}{\Delta x} \sim \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{24} (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{12} d^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}. \quad (21)$$

由此可见, E 网格的差分精度即使用半对角线长度 d (在方形网格下) 作为格距去与其它格式比较也是仅次于 C 网格, 而优于 B 网格。而 C 网格计算中必须要用到的科里奥利力项 4 点平均降低了它的计算精度。所以, 总的计算精度以 E 网格最好。另外, 如果同时要涉及到散度, 涡度等项的差分计算时, E 网格差分显然具有最好的精度, 是最佳的变量配置。

四、解决 E 网格中 C 网格分离的一种方法

Janjic^[6]对纯重力波方程在 E 网格中出现的 C 网格分离问题, 提出了一个较好的解决办法。但他的方法只适用于方形 E 网格, 不能用于一般的矩形 E 网格和球坐标 E 网格。本文提出了用半格距沿网格线差分代替他的沿对角线差分, 计算两种高度扩散的反对散度差分计算进行修正, 解决了一般性的问题。

以下我们将证明, 这种方案对抑制 E 网格中 C 网格分离所产生的噪声是非常有效的, 而对计算中有意义的波歪曲很小。

(1) 该方法对抑制噪声是有效的。

取如下形式的纯重力波方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (24)$$

作坐标变换, 方程(10)得到 (ξ, η) 坐标下的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \alpha \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (27)$$

下面对时间差分取前-后差分格式^[8], 因为对方程(22)–(24)而言, 在满足稳定性条件下, 前-后差分格式的时间积分方案为中性格式, 便于说明加入修正项后对噪声的抑制完全是修正项的作用。

参考图 1b, 格点顺序沿对角线方向排列, 将要分析的差分方程为:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \cdot g \alpha \frac{h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}d}, \quad (28)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - \Delta t \cdot g \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}d}, \quad (29)$$

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n - \Delta t \cdot H \left[\alpha \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}d} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}d} \right] - B_1, \quad (30)$$

其中, B_1 就是这里所要讨论的修正项:

$$B_1 = -(\Delta t)^2 \omega g H [\nabla_+^2 h - \nabla_0^2 h], \quad (31)$$

$\nabla_+^2 h$ 和 $\nabla_0^2 h$ 分别是沿网格线方向用整格距和半格距差分计算的高度扩散.

$$\nabla_0^2 h = \frac{\alpha^2}{2d^2} (h_{i+1,j-1} + h_{i-1,j+1} - 2h_{i,j}) + \frac{1}{2d^2} (h_{i+1,j+1} + h_{i-1,j-1} - 2h_{i,j}), \quad (32)$$

$$\nabla_+^2 h = \frac{1+\alpha^2}{d^2} (h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 4h_{i,j}), \quad (33)$$

$$0 < \omega < 1. \quad (34)$$

沿对角线方向作单波分析, 设:

$$\begin{bmatrix} u^n \\ v^n \\ h^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = \lambda^n e^{I(kid + ld)}, \quad (35)$$

代入(28)–(30)得:

$$(\lambda - 1)u_0 + 0v_0 + I\lambda\sqrt{2}g\frac{\Delta t}{d}\alpha\sin\frac{1}{2}(k-l)d h_0 = 0, \quad (36)$$

$$0u_0 + (\lambda - 1)v_0 + I\lambda\sqrt{2}g\frac{\Delta t}{d}\sin\frac{1}{2}(k+l)d h_0 = 0, \quad (37)$$

$$I\sqrt{2}H\frac{\Delta t}{d}\alpha\sin\frac{1}{2}(k-l)d u_0 + I\sqrt{2}H\frac{\Delta t}{d}\sin\frac{1}{2}(k+l)d v_0 + (\lambda - 1 + B)h_0 = 0, \quad (38)$$

其中,

$$B = \omega\varepsilon^2 \{ \alpha^2 [8\sin^2\frac{1}{2}k d \sin^2\frac{1}{2}l d + 1 - \cos(kd + ld)] + [8\sin^2\frac{1}{2}k d \sin^2\frac{1}{2}l d + 1 - \cos(kd - ld)] \} \geq 0, \quad (39)$$

$$\varepsilon^2 = \sqrt{gH}\frac{\Delta t}{d}. \quad (40)$$

再令:

$$\delta^2 = \alpha^2 \sin^2\frac{1}{2}(k-l)d + \sin^2\frac{1}{2}(k+l)d. \quad (41)$$

由 u_0, v_0, h_0 存在非零解的条件, 即线性方程组(36)–(38)的系数行列式等于零, 可得:

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 + (B + 2e^2\delta^2 - 2)\lambda + 1 - B] = 0, \quad (42)$$

当 $B \equiv 0$ 时, 即不加修正项, 不难得到, 计算稳定性的条件为:

$$e^2(1 + \alpha^2) \leq 2, \quad (43)$$

且在此条件下, 成立

$$|\lambda_{1,2,3}| = 1. \quad (44)$$

当 $B \neq 0$ 时, 取 $0 \leq \omega \leq 0.125$, 可以得到与(43)式相同的稳定性条件. 取 $\omega = 0.0625$, $e^2 = 1$, 对 $\alpha = 1, 0.5$ 对应的最小放大因子随波数的变化分别如图 2a 和 2b 所示. 由图 2 可见, 这种修正方案对对角线上的二倍格距波有强烈的抑制作用. 在 α, ε 给定时, 适当选取 ω 可使这种二倍格距波完全被抑制.

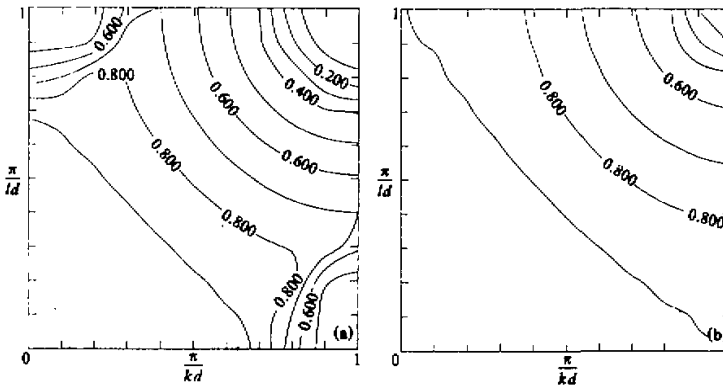


图 2 加入修正项后的最小放大因子随对角线方向波数的变化

(a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 0.5$

(2)该方法没有破坏 E 网格差分的良好性质.

如果将上述分析改在沿网格线进行, 可以得到与(42)式相似的方程, 只是在此情况下:

$$\varepsilon = \sqrt{2gH} \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad (45)$$

$$B = \omega e^2 2 \left\{ \alpha^2 \left[\left(\cos \frac{1}{2} k \Delta x - \cos \frac{1}{2} l \Delta y \right)^2 + \sin^2 \frac{1}{2} l \Delta y \right] + \left[\left(\cos \frac{1}{2} k \Delta x - \cos \frac{1}{2} l \Delta y \right)^2 + \sin^2 \frac{1}{2} k \Delta x \right] \right\}, \quad (46)$$

$$\delta^2 = \alpha^2 \sin^2 \frac{1}{2} k \Delta x + \sin^2 \frac{1}{2} l \Delta y. \quad (47)$$

同样取 $e^2 = 1$, $\omega = 0.0625$, 对 $\alpha = 1, 0.5$ 对应的最小放大因子随网格线方向波数的变化

分别如图 3a 和 3b。由图 3 可见, 该方法对计算中有意义的波动影响是很小的。

综上所述, 这种修正方案较好地解决了 E 网格中的 C 网格分离问题, 而不破坏原差分格式中好的性质。仅用沿网格线的分析是得不到上述结论的。

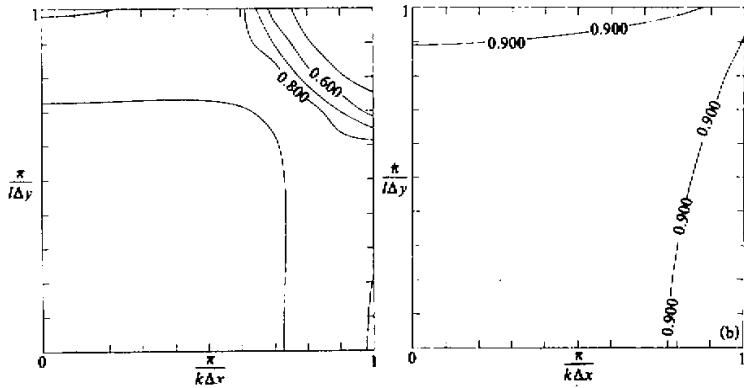


图 3 加入修正项后的最小放大因子随网格线方向波数的变化
(a) $\alpha=1$; (b) $\alpha=0.5$

五、E 网格模式的边界处理

E 网格之所以尚未被用于全球大气、海洋环流模式的一个重要原因是它的边界处理(或极地处理)比较困难。现以海洋边界为例来进行分析。当 B, C 网格用于海洋环流模式计算时, 总是将速度网格线或法向速度网格线与边界重合, 边界条件的提法就是令边界上的速度为零。在 C 网格情况下, 令边界上的法向速度为零是合理的, 而在 B 网格模式中令其切向速度也为零可能不太合适。在 E 网格情况下, 由于每条网格线不仅含速度场的两个分量, 还含有高度场, 边界条件的提法好象就更不方便了。但我们知道, E 网格是两套 C 网格的交错叠加, 在计算中需要考虑到两套 C 网格的计算协调性, 边界上的协调也许显得更为重要, 而上一节中所述的方法在边界附近又无法应用, 这些复杂的矛盾可能在提醒我们, 在 E 网格的边界上应该用一个 C 网格计算, 而另一个 C 网格边界由它的 4 点平均得到。这样一方面使得 E 网格的边界条件和 C 网格一样合理, 同时又解决了边界上的协调性问题。当然, 边界上这种计算的精度不如区域内部好。

如图 4 所示, 带有“□”的量由各自相邻对角线上的 4 点平均求得, 在边界上, 法向速度恒取为零, 而高度场和切向速度分量不参加计算。

六、数值试验结果

本节将通过在不同情况下对线性化浅水波方程的数值积分来检验在前二节中所提出的方法是否有效。采用前一后差分格式的时间积分方案, E 网格变量分布下的空间中心差。

第 70 / 2 卷第 2 期

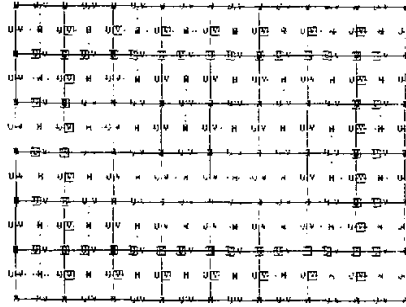


图 4 E 网格模式的边界处理

1. 第一组试验

取 $8800 \times 8800 \text{km}^2$ 的计算区域, 格距 $\Delta x = \Delta y = 220 \text{km}$, 流体厚度 $H = 4 \text{km}$, 科里奥利参数 $f = 10^{-4} \text{s}^{-1}$, 重力加速度 $g = 9.8 \text{m s}^{-2}$, 时间步长 $\Delta t = 450 \text{s}$, 修正参数 $\omega = 0.125$ 。四周的边界条件按上节所给的方法处理。初始为静止状态。为了考察这种边界处理和修正方案对 C 网格分离型噪声的响应能力, 我们在每步积分前, 对区域中心点高度增加 50cm , 而对它相邻的对角线上 4 点分别减去 12.5cm (这 4 点和中心点在不同的子 C 网格上)。

在上述条件下, 分别对有、无第四节中所述的修正项 B_1 , 积分 48 小时。结果如图 5 和 6 所示。图 5 是积分 48 小时后的高度场; 图 6 是从边界到区域中心选取的 5 个格点上高度随时间的变化曲线。由图 5a 和 6a 可以看出, 这种噪声传到边界后受到很强的衰减, 这说明了上节所给的边界处理方法是有效的。而分别比较图 5a, 5b 和 6a, 6b, 可清楚地看到, 修正项 B_1 对抑制这种噪声是非常成功的。

2. 第二组试验

在初始时刻, 给定一个均匀的南北向高度梯度, 如图 7a 所示, 最南边的边界与最北边的边界高度相差 1m , 风速则根据地转关系求得。积分区域的東西边界条件取为周期边界条件。其它处理与第一组试验相同。

同样在作了有无修正项的 48 小时积分后, 分别得到了图 7b 和 7c 的结果。没有修正项的 48 小时积分结果 (图 7b) 几乎被噪声覆盖, 而带有修正项的 48 小时积分结果, 除扰动中心外, 几乎没有受到这种噪声的影响 (比较图 7a 和 7c)。再比较图 7b 的东西边界和南北边界上的噪声分布可以看到, 按上节方法处理的南北边界上的噪声很弱, 而取周期边界条件的东西边界上噪声很强。

我们还对 $\Delta x \neq \Delta y$ 的不同情况, 不同强度的噪声源作了大量试验, 结果都充分证明了前面所述的方法对抑制这种噪声是非常有效的。限于篇幅, 这里不给出结果。

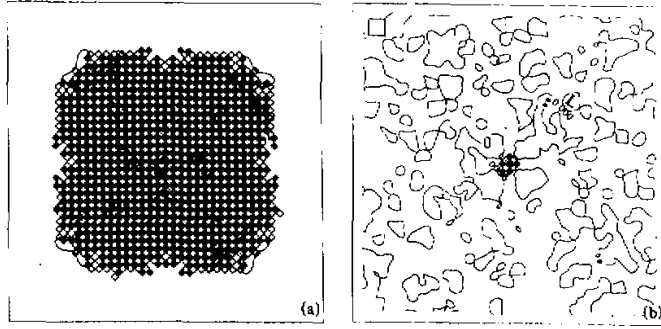


图 5 积分 48 小时后的高度偏差量
 等值线间隔是 0.05m, ◆和◇分别表示沿对角线二倍格距波的高低中心
 (a) 未加修正项; (b) 加修正项

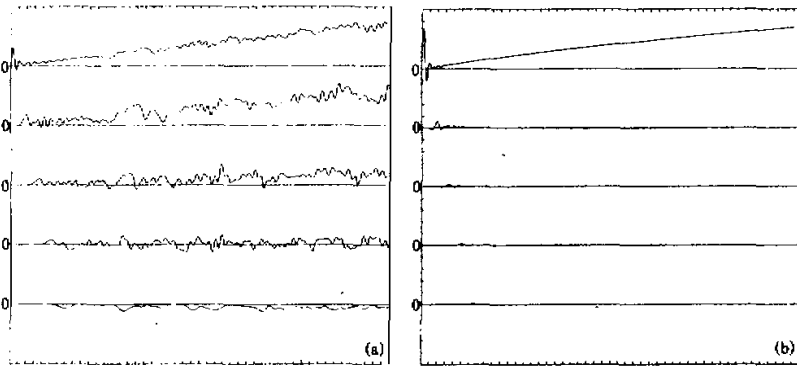


图 6 从边界到区域中心五点的高度偏差随时间的变化
 横坐标是时间, 每刻度表示一小时, 纵坐标是高度, 每刻度表示 0.1m
 (a) 未加修正项; (b) 加修正项

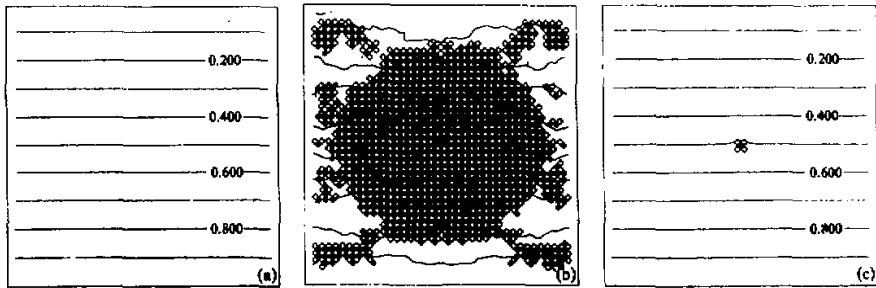


图 7 高度场偏差分布
 等值线间隔为 0.1m. (a) 初始场; (b) 未加修正项的 48 小时积分结果
 (c) 加入修正项的 48 小时积分结果

七、结 论

根据上面的分析可以看出, E 网格的频散关系和计算精度都是比较好的, 可以对它提出合理的边界条件, 它的 C 网格分离问题可以得到很好的解决。从某种意义上说, E 网格是综合 B, C 网格优点的变量分布形式。E 网格可以用于全球大气、海洋环流模式的设计。

参 考 文 献

- [1] Wininghoff, F. J., 1968, *On the adjustment toward a geostrophic balance in a simple primitive equation model* with application to the problems of initialization and objective analysis, Ph. D. Thesis Dept. of Meteorol., University of California, Los Angeles.
- [2] Arakawa, A. and V.R. Lamb, 1977, Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model, *Methods in Computational Physics*, Vol.17, General Circulation Models of the Atmosphere, J. Chang, ed., Academic Press.
- [3] Mesinger, F., 1981, Horizontal advection schemes of a staggered grid—An enstriphy and energy-conserving model, *Mon. Wea. Rev.*, **109**, No.3, 467–878.
- [4] Mesinger, F. and Arakawa, 1976, Finite difference scheme used in atmospheric models, I, GARP Publ. Ser., No.17.
- [5] Mary L. Batteen and Y. J. Han, 1981, On the computational noise of finite-difference schemes used in ocean models, *Tellus*, **33**, No.4, 387–396.
- [6] Janjic, Z.I., 1979, Forward-backward scheme modified to prevent two-grid-interval noise and its application in a coordinate model, *Contrib. Atmos. Phys.*, **52**, No.2, 67–84.
- [7] 宇如聪, 1989, 陡峭地形有限区域数值预报模式设计, *大气科学*, **13**, No.2, 139–149.
- [8] Mesinger, F., 1977, Forward-backward scheme and its used in a limited area model, *Contrib. Atmos. Phys.*, **50**, 200–210.

Properties of the Spatial Finite-Difference Scheme Based on the E-Grid

Yu Rucong

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

By using the linearized shallow water equations, the properties of the spatial centered finite-difference scheme based on E-grid are investigated systematically and some issues involving the E-grid are discussed in this paper.

The E-grid may be considered as a superposition of two C-grid, and two solutions to gravity wave equations on these two C sub-grids may coexist independently, when the centered finite difference scheme is used on the E-grid. A special method which can solve this problem is presented in section 4. Because velocity and temperature variables exist always in any grid line for E-grid system, it is difficulty to propose proper lateral boundary conditions in the numerical models. A set of lateral boundary conditions suitable for rigid boundary, for example, the ocean boundary, is presented and discussed in section 5. Some numerical experiments have demonstrated the feasibility of these methods.

Key words: variable disturbance grid; E-grid; boundary condition.