

风海流方程低谱模式多态解问题 (二)

周广庆 季仲贞 苗波

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

提 要

本文用四系数的低阶谱模式研究了一个可移动风应力强迫作用下的海流方程多态解的问题。定常解的分布特征及其稳定性对风应力强迫的移动速度有很强的依赖性并且在 ε 较小时有同时存在三组解的情况。对方程各项大小的计算表明, 当风应力强迫主要用来平衡摩擦项或 β 项时, 解是稳定的; 其他情况下解一般不稳定。另外, 本文还从能量关系讨论了解的稳定性, 表明当海洋响应的能量主要集中在低阶谱上时, 解一般是稳定的, 这时能量平衡关系主要表现为风应力强迫项与摩擦项的平衡。

关键词: 低阶谱; 定常解; 稳定性; 能量平衡。

一、引 言

人们对大气中多平衡态问题的研究已经很多了, 并且取得了一些很有意义的研究成果^[1], 然而对海流方程多态解问题的研究却相对少得多。这主要是由于获取海洋观测资料要比大气困难得多, 限制了人们对问题的深入研究。早在 1963 年, G. Veronis 就用截谱模式讨论过风海流方程多态解的问题^[2]。最近季仲贞等 (1990) 在文献[2]的基础上, 对风海流方程的解法作了改进, 并对解的性质作了进一步的分析和讨论, 得到了很有意义的结果^[3]。但文献[3]中没有考虑风应力强迫变化的影响。本文在文献[3]的基础上加进了表示风应力强迫变化的移动项, 对风海流方程多态解问题进行了更为全面的讨论。结果表明, 风应力强迫的移动对方程解的分布及其稳定性有很大的影响。我们还从能量关系讨论了方程解的稳定性。

二、模 式

设风应力强迫以 U ($U = \text{常数}$) 速移动, 取随风应力强迫一起移动的 $x-y$ 坐标系, x 取 $-U$ 方向。于是可以把风应力强迫看成是静止的, 而海水以 U 沿 $+x$ 方向移动, 即相当于存在基本海流 U 。类似于文献[2], 我们可得到无量纲的准地转涡度方程,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) + \Omega \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) = RJ(\nabla^2 \psi, \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} - \varepsilon \nabla^2 \psi + G, \quad (1)$$

其中 $R\Omega = U / (\beta L^2)$, 代表风应力强迫的移动, $\varepsilon = k / (\beta L)$, 代表底摩擦。其余量与文献[3]同。

对方程 (1) 进行谱展开并取同文献[3]中一样的前四项, 可得到谱展开系数方程组

$$\lambda_n \frac{da_n}{dt} + \Omega \sum_{j=1}^4 \lambda_j a_j c_{jn} + R \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^4 \lambda_m a_k a_m Q_{k,m,n} - \sum_{j=1}^4 a_j c_{jn} = -\varepsilon \lambda_n a_n - G_n, \quad (n=1,2,3,4) \quad (2)$$

其中

$$\begin{cases} C_{jn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \psi_n \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy, \\ Q_{kmn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \psi_n J(\psi_k, \psi_m) dx dy, \\ G_n = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \psi_n G dx dy, \end{cases} \quad (3)$$

和

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, & \lambda_2 = \lambda_3 = 5, & \lambda_4 = 8, \\ c_{12} = -c_{21} = c_{34} = -c_{43} = -\frac{8}{3\pi}, \\ Q_{123} = -Q_{213} = Q_{231} = -Q_{321} = Q_{312} = -Q_{132} = \frac{3}{4}, \\ \text{其余 } c_{jn}, Q_{kmn} \text{ 均为零,} \end{cases} \quad (4)$$

于是模式方程变为

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} - \frac{4}{3\pi} (5\Omega - 1) a_2 = -\varepsilon a_1 - \frac{G_1}{2}, \\ \frac{da_2}{dt} - \frac{9}{20} R a_1 a_3 + \frac{8}{15\pi} (2\Omega - 1) a_1 = -\varepsilon a_2 - \frac{G_2}{5}, \\ \frac{da_3}{dt} + \frac{9}{20} R a_1 a_2 - \frac{8}{15\pi} (8\Omega - 1) a_4 = -\varepsilon a_3 - \frac{G_3}{5}, \\ \frac{da_4}{dt} + \frac{1}{3\pi} (5\Omega - 1) a_3 = -\varepsilon a_4 - \frac{G_4}{8}. \end{cases} \quad (5)$$

同样可得定常方程组

$$\begin{cases} -\frac{4}{3\pi} (5\Omega - 1) A_2 = -\varepsilon A_1 - \frac{G_1}{2}, \\ -\frac{9}{20} R A_1 A_3 + \frac{8}{15\pi} (2\Omega - 1) A_1 = -\varepsilon A_2 - \frac{G_2}{5}, \\ +\frac{9}{20} R A_1 A_2 - \frac{8}{15\pi} (8\Omega - 1) A_4 = -\varepsilon A_3 - \frac{G_3}{5}, \\ \frac{1}{3\pi} (5\Omega - 1) A_3 = -\varepsilon A_4 - \frac{G_4}{8} \end{cases} \quad (6)$$

和线性化的扰动方程组

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = -\varepsilon\alpha_1 + \frac{4}{3\pi}(5\Omega-1)\alpha_2, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = \left[\frac{9}{20}RA_3 - \frac{8}{15\pi}(2\Omega-1) \right]\alpha_1 - \varepsilon\alpha_2 + \frac{9}{20}RA_1\alpha_3, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} = -\frac{9}{20}RA_2\alpha_1 - \frac{9}{20}RA_1\alpha_2 - \varepsilon\alpha_3 + \frac{8}{15\pi}(8\Omega-1)\alpha_4, \\ \frac{d\alpha_4}{dt} = -\frac{1}{3\pi}(5\Omega-1)\alpha_3 - \varepsilon\alpha_4. \end{cases} \quad (7)$$

方程组 (6) 就是我们要求解的方程, 其解的稳定性可由方程组 (7) 的特征方程的根来判断。如果方程组 (7) 的特征方程所有根的实部都是负的, 即满足 $\max \lambda_{\text{实}} < 0$, 则方程组 (6) 的解是渐近稳定的; 否则解是不稳定的。

在下面的讨论中, 仍然只取 $G_1 = 1$, 而 $G_2 = G_3 = G_4 = 0$, 此时的风应力强迫场是一个对称的气旋式涡度强迫。

三、定常解的分布特征及其稳定性

图 1 给出了不同参数 ε 下, 定常解随参数 $R-\Omega$ 的分布情况。图中可以划分为 4 个区域, 每个区域内解的分布各不相同。区域的分界点分别为 $\Omega = 0.125, 0.2, 0.5$, 此时方程组 (6) 中有一个方程的 Ω 项与 β 项之和为零。我们对各个区域作如下编号:

区域 I: $0 \leq \Omega \leq 0.125$

区域 II: $0.125 < \Omega < 0.2$

区域 III: $0.2 < \Omega < 0.5$

区域 IV: $0.5 < \Omega < 10$

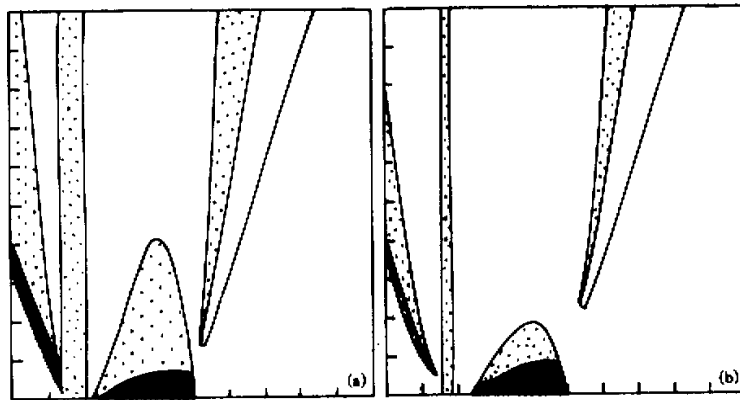


图 1 方程组 (6) 的解随参数 $R-\Omega$ 的分布

图中阴影区表示同时存在三个解, 图上的数字代表稳定解的个数, (a) $\varepsilon = 0.015$; (b) $\varepsilon = 0.03$

如果海洋运动的时间尺度定义为

$$T = 1 / (L\beta),$$

风应力变化的时间尺度定义为

$$T' = L / U,$$

则 $\Omega = U / (L^2 \beta) = T / T'$ 。这表明 Ω 代表了海洋运动的时间尺度与风应力变化时间尺度之比。这个比值的大小对海洋响应的形式是至关重要的。因此, Ω 的大小对方程解的分布及其稳定性是很重要的。

表 1 给出了若干参数值下, 方程组 (6) 的解及其稳定性。对区域 I, Ω 作用较小, 解的特点与 $\Omega=0$ 时相似, 但对方程中各项的计算 (表 2) 表明, 在 R 比较小时, Ω 的大小在方程的平衡中仍有一定的作用。

对区域 II ($\Omega=0.16$) 当 ε 不太大 ($\varepsilon < 0.33$) 时, 方程组 (6) 始终存在三组解, 但只有 $|A_1|$ 特别大的那一组解是稳定的。对不稳定的两组解, 在第一个方程中主要是 Ω 项与 β 项的平衡, 风强迫并不重要。对稳定的那组解, 第一个方程中主要是摩擦项与风强迫项的平衡; 在第二个方程中 Ω 项与非线性项一起同 β 项平衡, 但非线性项作用大于 Ω 项。可见, 这时 Ω 项作用虽然还不是主要的, 但已不能忽视了。

表 1 若干参数下方程组 (6) 的解及其稳定性

Ω	ε	R	A_1	A_2	A_3	A_4	$\max \lambda_k$	稳定性		
0.05	0.03	0.1	-0.309210	-1.541654	-0.071454	-0.189537	-0.0261	稳 定		
		0.22	-0.340180	-1.538735	-0.172626	-0.457906	-0.00915	稳 定		
			-3.513448	-1.239662	-1.436401	-3.810173	0.0641	不稳定		
			-12.81304	-0.363196	-1.534731	-4.071000	-0.0212	稳 定		
		0.33	-0.447023	-1.528666	-0.338041	-0.896682	0.0224	不稳定		
			-1.000437	-1.475507	-0.730726	-1.938312	0.0224	不稳定		
			-15.21921	-0.136420	-1.027070	-2.724387	-0.0272	稳 定		
		0.4	-15.71177	-0.089997	-0.847872	-2.249009	-0.0282	稳 定		
		0.16	0.015	0.5	0.134905	-5.914325	-3.435768	-4.860619	0.176	不稳定
					-0.114691	-5.870217	2.899125	4.101423	0.0438	不稳定
-33.35355	0.003572				-0.513075	-0.725853	-0.015	稳 定		
	55.398701			3.136049	-1.471285	10.407214	-0.00329	稳 定		
0.4	0.015	0.05	0.530632	1.196851	-0.005344	0.037800	0.103	不稳定		
			-98.26267	-1.976706	-1.494261	10.569735	-0.0103	稳 定		
			7.100276	1.429042	-0.343712	2.431264	0.0235	不稳定		
		0.2	0.563407	1.198010	-0.022862	0.161716	0.0778	不稳定		
			-40.99702	-0.270857	-0.376155	2.660752	-0.0136	稳 定		
			0.5	-34.78192	-0.051197	-0.150804	1.066722	-0.0147	稳 定	
		0.6	0.03	0.1	-0.506552	0.571146	0.002834	-0.020049	-0.0277	稳 定
				0.5	-0.561120	0.569217	0.015645	-0.110666	0.0173	不稳定
				0.82	-0.835015	0.559537	0.037535	-0.265504	0.109	不稳定
					-1.399625	0.539582	0.060671	-0.429158	0.149	不稳定
-14.43203	0.078979				0.091569	-0.647717	-0.0255	稳 定		
0.98	-15.17622			0.052677	0.076755	-0.542930	-0.0272	稳 定		

表 2 若干参数下方程组 (6) 各项数值

Ω	ε	R	非线性项	Ω 项	β 项	摩擦项	风强迫项	稳定性
0.05	0.03	0.1		-0.1636	0.65430	0.00927	-0.5	稳 定
			0.00099	0.00524	-0.0525	0.04625		
			-0.0215	-0.0129	0.03218	0.00214		
				0.00189	-0.00758	0.00569		
		0.33		-0.1622	0.64879	0.01341	-0.5	不稳定
			0.02244	0.00759	-0.0759	0.04586		
			-0.1015	-0.0609	0.15223	0.01014		
				0.00897	-0.0359	0.0269		
				-0.1567	0.62665	0.03001	-0.5	不稳定
			0.10856	0.01698	-0.1698	0.04429		
			-0.2194	-0.13162	0.32906	0.02192		
				0.01938	-0.07753	0.05815		
		0.5		-0.0145	0.05789	0.45658	-0.5	稳 定
			2.32123	0.25837	-2.5837	0.00409		
			-0.3083	-0.1850	0.46251	0.03081		
				0.02724	-0.1089	0.08173		
0.16	0.015	0.5		-2.0081	2.51012	-0.0020	-0.5	不稳定
			-0.1045	-0.0073	0.0229	0.08872		
			0.17952	-1.0562	0.82516	0.05153		
				0.29164	-0.3645	0.07291		
				-1.9931	2.49139	0.00172	-0.5	不稳定
			-0.0781	0.00623	-0.0195	0.08805		
			-0.1515	0.89124	-0.6963	-0.0435		
				-0.2461	0.30761	-0.0615		
				0.00121	-0.0015	0.50031	-0.5	稳 定
			3.85039	1.81193	-5.6623	-0.0001		
			0.02681	-0.1577	0.12323	0.00769		
				0.04355	-0.0544	0.01089		
		0.05		2.66196	-1.3309	-0.8309	-0.5	稳 定
			-1.8339	-7.5238	9.40477	-0.0470		
			-3.9089	5.65371	-1.7668	0.02207		
				0.31221	-0.1561	-0.1561		
				1.01592	-0.5079	-0.0079	-0.5	不稳定
			-0.0001	-0.0721	0.09008	-0.0179		
			-0.0143	0.02053	-0.0064	0.00008		
				0.00113	-0.0006	-0.0005		
0.4	0.015	0.05		-1.6779	0.83894	1.33894	-0.5	稳 定
			3.00109	12.1229	-15.1537	0.02965		
			-3.9700	5.74199	-1.7943	0.02241		
				0.31709	-0.1585	-0.1586		
		0.2		1.21301	-0.6065	-0.1065	-0.5	不稳定
			-0.2196	-0.9643	1.20538	-0.0214		
			-0.9132	1.32078	-0.4127	0.00515		
				0.07294	-0.0365	-0.0365		
				1.01690	-0.5085	-0.0084	-0.5	不稳定
			-0.0012	-0.0765	0.09565	-0.0179		
			-0.0607	0.08785	-0.0275	0.00034		
				0.00485	-0.0024	-0.0024		

表 2 (续)

Ω	ε	R	非线性项	Ω 项	β 项	摩擦项	风强迫项	稳定性
0.4	0.015	0.2		-0.2299	0.11496	0.61495	-0.5	稳 定
			1.38791	5.56789	-6.9599	0.00406		
			-0.9994	1.44545	-0.4517	0.00564		
				0.07982	-0.0399	-0.0399		
0.6	0.03	0.1		0.72721	-0.2424	0.01519	-0.5	稳 定
			-0.00001	0.10319	-0.0859	-0.0171		
			0.01302	-0.0163	0.00340	-0.00009		
				-0.0009	0.00030	0.00060		
		0.82		0.71243	-0.2375	0.02505	-0.5	不 稳定
			-0.0116	0.17011	-0.1417	-0.0168		
			0.17241	-0.2163	0.04507	-0.0011		
				-0.0118	0.00398	0.00796		
				0.68702	-0.2290	0.04199	-0.5	不 稳定
			-0.0313	0.28513	-0.2376	-0.0162		
			0.27867	-0.3497	0.07286	-0.0018		
				-0.0193	0.00644	0.01287		
				0.10056	-0.0335	0.43296	-0.5	稳 定
			-0.4876	2.94007	-2.4501	-0.0024		
			0.42059	-0.5278	0.10996	-0.0927		
				-0.0291	0.00972	0.01942		

对区域Ⅲ ($\Omega=0.4$), 当 R 比较小时, 同时存在三组解, 而且 R 很小时 ($R=0.05$) 可存在两组稳定解。 $A_1 > 0$ 且 $|A_1|$ 特别大的那组解, 流函数合成图 (图 2) 表现为反气旋式的响应。在下节的讨论中将会看到, 这时提供给系统能量的不是风强迫项, 而是 Ω 项, 即这时海洋响应的能量来源是由于风强迫的移动带来的, 所以当 R 增大时, 这一组解变得不稳定是可以理解的。 $A_1 < 0$ 且 $|A_1|$ 特别大的那一组解始终是稳定的, 并随 R 的增加, 其稳定程度也加强。这时在第一个方程中, Ω 项与风强迫项一起来平衡 β 项和摩擦项; 在第二个方程中则表现为非线性项同 Ω 项一起来平衡 β 项, 但 Ω 项的作用已经超过了非线性项的作用。

对区域Ⅳ ($\Omega=0.6$), 只有 R 大于一定值时, 才能出现多态解, 但不会出现同时存在两组稳定解的情况, 而且在出现多态解之前, 总存在连一组稳定解都不存在的区域。这是一个很有趣的问题。从方程的平衡中看, 当 R 较小时只有一组解存在, 在第一个方程中是 β 项加风强迫项来平衡 Ω 项, 即风强迫没有主要用来平衡 β 作用或摩擦作用, 所以当 R 增大时, 这一组解失稳, 而这时尚未出现多态解。当 R 继续增大时, 出现了一组 $|A_1|$ 特别大的解, 并且这组解始终是稳定的。这时在第一个方程中, 风强迫项主要用来平衡摩擦项和 β 项, 而且随 R 的增大, 风强迫项越来越主要地平衡摩擦项, 同时这组解的稳定程度也在加强; 第二个方程则主要是 Ω 项与 β 项的平衡, 这里再次看出 Ω 项的作用越来越大。

上面, 我们对 4 个区域中定常解的分布特点及其稳定性进行了比较详细的讨论。从中不难看出, $|A_1|$ 特别大 ($A_1 < 0$) 的那一组解始终是稳定的。在方程的平衡中, 当风强迫项 (或加上 Ω 项) 主要与摩擦项 (或 β 项) 平衡时, 解一般是稳定的; 对其它情

况, 方程的解一般是不稳定的, 即使有的在 R 较小时是稳定的, 其稳定程度也很差, 随 R 的增大必将变成不稳定。从流函数合成图看 (图 2), 当只有一个主要的涡旋中心且海洋以气旋式响应为主时, 这种响应是稳定的; 当出现两个或两个以上的涡度中心时, 依参数选取的不同, 可能是稳定的, 也可能是不稳定的。

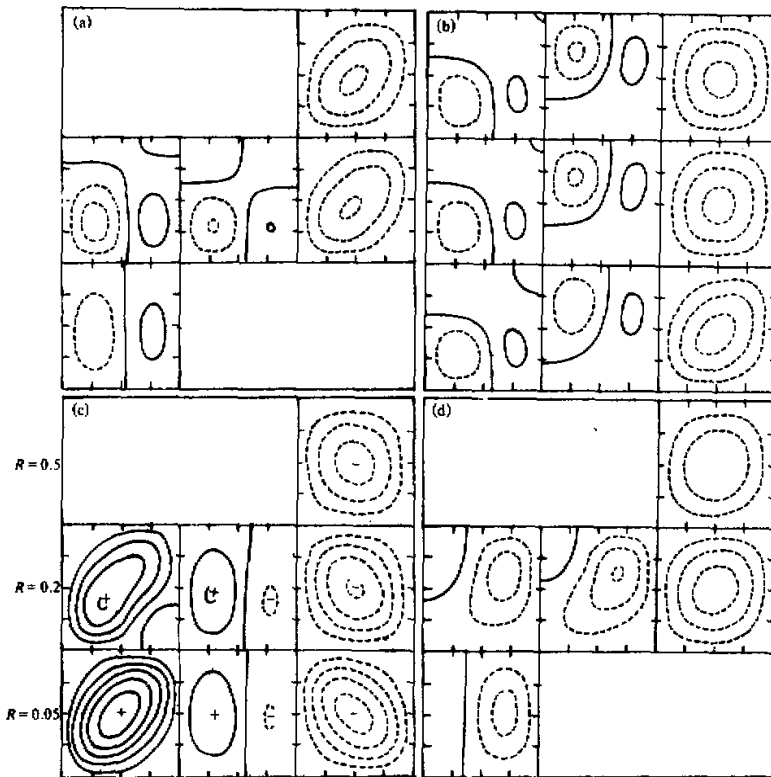


图 2 若干参数下方程组 (6) 解的流函数合成图

(a) $\Omega = 0.05, \varepsilon = 0.03$; (b) $\Omega = 0.16, \varepsilon = 0.015$; (c) $\Omega = 0.4, \varepsilon = 0.015$; (d) $\Omega = 0.6, \varepsilon = 0.03$

当 Ω 取得很大时 ($\Omega > 10$), 定常解的可靠性很差, 甚至求不出定常解来。这可能是由于当 Ω 很大时, $T' \ll T$, 海洋响应以强迫波为主, 而本文的模式无法反映这种强迫波的响应。纵观上面的讨论, Ω 值对方程解的特点有很重要影响。当 Ω 取一定区间内的值时, 方程解的特征是相似的, 这时解随 Ω 是缓变的过程。当 Ω 从一个区间取到另一个区间时, 方程的解是突变的过程。这要比文献[3]所考虑的情况复杂得多。最后还应指出, 只有当 ε 较小时才可能出现多态解; 当摩擦增大后就只有一组解存在而且始终是稳定的。

四、从能量平衡看解的稳定性

以 $-\psi$ 乘方程 (1) 两边并在整个研究区域上积分, 可得如下的动能方程:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) dx dy = \Omega \int_0^\pi \int_0^\pi \psi \frac{\partial}{\partial x} (V^2 \psi) dx dy + \varepsilon \int_0^\pi \int_0^\pi \psi \nabla^2 \psi dx dy - \int_0^\pi \int_0^\pi \psi G dx dy. \quad (8)$$

可见, 系统动能的变化由三项决定——基本流项 (Ω 项)、摩擦项和风应力强迫项。当系统动能达到平衡时, 这三项之和为零。

对本文所述能量可写成如下的谱展开形式:

$$\sum_{n=1}^4 \lambda_n a_n \frac{da_n}{dt} = \frac{8}{\pi} \Omega [a_1 a_2 + a_3 a_4] - \varepsilon \sum_{n=1}^4 \lambda_n a_n^2 - a_1 G_1, \quad (9)$$

与方程 (5) 相联系还可以写成

$$\begin{cases} \lambda_1 a_1 \frac{da_1}{dt} = \frac{8}{3\pi} \cdot 5\Omega a_1 a_2 - \frac{8}{3\pi} a_1 a_2 - 2\varepsilon a_1^2 - a_1 G_1, \\ \lambda_2 a_2 \frac{da_2}{dt} = \frac{9}{4} R a_1 a_2 a_3 - \frac{8}{3\pi} \cdot 2\Omega a_1 a_2 + \frac{8}{3\pi} a_1 a_2 - 5\varepsilon a_2^2, \\ \lambda_3 a_3 \frac{da_3}{dt} = -\frac{9}{4} R a_1 a_2 a_3 + \frac{8}{3\pi} \cdot 8\Omega a_3 a_4 - \frac{8}{3\pi} a_3 a_4 - 5\varepsilon a_3^2, \\ \lambda_4 a_4 \frac{da_4}{dt} = -\frac{8}{3\pi} \cdot 5\Omega a_3 a_4 + \frac{8}{3\pi} a_3 a_4 - 8\varepsilon a_4^2. \end{cases} \quad (10)$$

从方程组 (10) 中可以看到能量的转换方式。当 $a_1 < 0$ 时, 风应力涡度首先把能量传递给 a_1 , 然后通过 β 项和 Ω 项 a_1 把能量传递到 a_2 ; a_2 与 a_3 之间的能量转换是通过非线性项实现的; a_3 、 a_4 之间也是通过 β 项和 Ω 项实现能量转换的。如果海洋响应中 $|a_1|$ 大, 表明风应力反馈给海洋的能量大, 同时这一能量主要集中在低阶谱上, 这时的响应一般是稳定的。另一方面 a_1 与 a_2 、 a_3 与 a_4 之间通过 Ω 项转换的能量是不平衡的, 也就是说 Ω 项不仅在系统内部之间的能量转换中起作用, 同时也对系统提供或消耗能量, 尤其当 Ω 很大时这一作用就更明显。当 $a_1 > 0$ 时 (前面讨论中确有这种情况), 风应力涡度不但向海洋提供能量, 反而从海洋中吸收能量。这时系统的能量来源是 Ω 项。但随着风应力涡度的加强 (R 增大), 这种情况是不能维持的, 将变成不稳定 ($\Omega=0.4$ 时的情况)。至于 β 项与非线性项, 它们只在系统内部之间的能量调整中起作用, 而对系统总能量没有影响。

表 3 给出了若干参数下系统达到定常时的能量平衡关系。当 $\Omega=0.05$ 时, 能量平衡表现为风强迫项与 Ω 项一起来平衡摩擦项。这里主要是风强迫项与摩擦项的平衡, 但 Ω 项所占的比重对解的稳定性很重要: 当 Ω 项所占的比重较大时, 解一般是不稳定的或稳定性很差; Ω 项所占比重越小, 解的稳定性越好。当 $\Omega=0.16$ 时, 对两组不稳定的

解, 主要是 Ω 项与摩擦项的平衡; 对稳定的解, 则主要是风强迫项与摩擦项的平衡。当 $\Omega=0.4$ 时, 对 $A_1 > 0$ 的那两组解, 表明为风强迫项与摩擦项一起来平衡 Ω 项。这时 Ω 项向系统提供能量, 风强迫项和摩擦项耗散系统的能量, 解的稳定性不好或不稳定。对 $A_1 < 0$ 的那一组解, 表现为风强迫项与 Ω 项一起来平衡摩擦项, 风强迫项和 Ω 项都向系统提供能量, 但随着 R 的增大, 风强迫项作用增大, 解的稳定程度也加强。对 $\Omega=0.6$ 的情况, 当 R 较小时, 只存在一种解, 能量平衡主要是风强迫项与 Ω 项的平衡, 这时解虽然是稳定的, 但随着 R 的增大, 稳定程度越来越小, 以至变成不稳定的。当存在三组解的时候, 对两组不稳定的解, 其能量关系仍主要是风强迫项与 Ω 项的平衡, 而对稳定的那组解则表现为风强迫项与摩擦项的平衡。综合以上的讨论可以看到, 只有当能量关系主要表现为风强迫项 (或加上 Ω 项) 与摩擦项的平衡时, 定常解才会是稳定的, 并且这种关系越强, 解的稳定程度越好。

表 3 若干参数下动能方程 (10) 各项数值

Ω	ε	R	Ω 项	摩擦项	风强迫项	稳定性
0.05	0.03	0.1	0.062419	-0.371629	0.309210	稳 定
			0.076712	-0.416892	0.340180	稳 定
		0.22	1.251394	-4.764841	3.513448	不 稳 定
			1.388026	-14.20107	12.81304	稳 定
		0.33	0.125601	-0.572623	0.447023	不 稳 定
			0.368415	-1.348850	1.000437	不 稳 定
			0.620620	-15.83983	15.21921	稳 定
			0.422832	-16.13459	15.71177	稳 定
0.16	0.015	0.5	6.479094	-6.344400	-0.134905	不 稳 定
			5.118953	-5.233823	0.114691	不 稳 定
			0.103193	-33.45465	33.35355	稳 定
0.4	0.015	0.05	161.3663	-105.9676	-55.39870	稳 定
			0.646689	-0.116055	-0.530632	不 稳 定
			163.6389	-252.9016	89.26267	稳 定
		0.2	9.484044	-2.383765	-7.100276	不 稳 定
			0.683750	-0.120342	-0.563407	不 稳 定
			10.29131	-51.28832	40.99702	稳 定
		0.5	1.649980	-36.43191	34.78192	稳 定
0.6	0.03	0.1	-0.442128	-0.064425	0.596552	稳 定
			-0.490651	-0.070469	0.561120	不 稳 定
		0.5	-0.729089	-0.105927	0.835015	不 稳 定
			-1.193662	-0.205964	1.399625	不 稳 定
		0.82	-1.832148	-12.59989	14.43203	稳 定
		0.98	-1.285122	-13.89110	15.17622	稳 定

五、小结与讨论

上面, 我们在文献[3]的基础上增加一个表示风应力强迫变化的移动项, 对风海流

方程的定常解进行了分析和讨论。结果表明, 方程定常解的性质对 Ω 有很强的依赖性, 不同的 Ω 值对应的解的形式不同, 并且在底摩擦足够小时, 定常方程可有多态解存在。虽然 Ω 值对解的性质有很大的影响, 但对稳定的解应可以找出许多的共同性质:

(1) $|A_1|$ 远大于其它的分量。

(2) 在方程的平衡中主要是风强迫项 (或加上 Ω 项) 与摩擦项或 β 项的平衡。

(3) 流函数场中一般只有一个涡旋中心。

(4) 能量更多地集中在低阶谱中; 能量平衡主要是风强迫项与摩擦项的平衡, Ω 项更主要地是用于调整能量的内部分配。

另外, 当 $\Omega < 0.5$ 时, 随 R 的增加在出现多态解之前, 总有连一个稳定解都不存在的区域。从能量关系看, 这时主要是风强迫项与 Ω 项的平衡。一方面表明, Ω 增大对解的性质影响也增大; 另一方面也说明, 增大摩擦有利于解的稳定。当 $\Omega > 10$ 后, 会出现不存在定常解的情况。这可能是因为, 这时海洋的响应以是间尺度很小的强迫波为主, 而本文的模式很简单无法反映这种响应。

参 考 文 献

- [1] Charney, J.G. and J.G. Devore, 1979, Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1205—1216.
- [2] Veronis, G., 1963, An analysis of wind-driven ocean circulation with a limited number of Fourier components, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 577—593.
- [3] 季仲贞、郑朝洲, 1990, 风海流方程低谱模式的多态解 (一), *大气科学*, **14**, 395—403.
- [4] 郭秉荣、卮纪范、杜行远, 1986, *大气科学中数学方法的应用*, 气象出版社。

On the Multiple Solutions to a Low-Spectrum Model of Wind-Driven Ocean Current Equation (II)

Zhou Guangqing, Ji Zhongzhen and Miao Bo

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

Multiple solutions to ocean equations under the influence of moving wind-stress with four Fourier components are studied. Results show that the moving speed of wind-stress influence greatly the steady-state solutions and there can be multiple equilibrium solutions when ε is small. The balance between equation terms indicates that, the solutions are stable when the wind-stress term reaches a balance of the bottom friction term or β term. The balance of energy is also studied. Results show that, when the energy of ocean response mainly concentrates on the low-order spectra and the energy balance is presented as the balance between the wind-stress term and the friction term, the steady-state solutions are stable.

Key words: low-order spectra; steady-state solutions; stability; energy balance.