

能量守恒的自适应网格模式在南海 月平均流计算中的应用

刘 卓 曾庆存 李荣凤

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

提 要

本文在正压原始方程的基础上发展了一套适用于自适应网格坐标的自适应网格模式。该模式保持了笛卡尔坐标系下原有的整体积分性质。由于自适应网格与计算区域边界相重合, 因而该模式可用于具有复杂形状的区域边界的计算问题。本文将其用于南海月平均流的数值模拟, 取得了良好的效果。

关键词: 自适应网格模式; 能量守恒; 暖流; 南海。

一、引 言

自适应网格坐标是一种可在具有任意形状的边界的区域上求偏微分方程的数值解的非常有效的工具。它抛弃了传统的等距的均匀网格进行离散、剖分, 代之以能够自动地适应所研究问题中解的特征的疏密程度不均的曲线网格。该网格坐标的适应能力非常强: 它既能够适应计算区域边界的形状, 又能够适应所求物理量的空间分布。所谓适应计算区域边界的形状是指自适应网格点在边界上与实际计算区域边界相吻合; 所谓适应物理量的空间分布是指在物理量变化剧烈或其变化尺度比较小的区域, 网格点可自动加密以提高网格的分辨率, 增加计算的稳定性; 而在物理量变化平缓或其变化尺度比较大的区域, 网格点相对稀疏一些。对于非常定的系统, 物理量的空间分布随时间变化, 自适应网格还能自动地调整网格以适应系统随时间的变化。与此同时, 计算始终在参数平面上的等距、均匀的矩形网格上进行。因此, 自适应网格坐标可广泛地应用于各种偏微分方程的数值计算, 特别是系统具有复杂边界的问题。

在文献[1]中作者介绍了自适应网格的原理及其构造方法。本文在正压原始方程的基础上发展了一套网格常定的自适应网格模式。该模式保持了在笛卡尔坐标下所具有的总有效能量守恒及总质量守恒的整体积分性质。

本文将常定的自适应网格模式应用于南海月平均流的数值模拟, 成功地模拟出了“冬季南海暖流”及一些中小尺度的环流。并且, 由于采用了与边界相重合的自适应网格坐标, 模拟计算得到的边界附近的流动显得更为合理。

1992 年 7 月 6 日收到, 1993 年 6 月 25 日收到修改稿。

二、自适应网格坐标下的浅水波方程

1. 笛卡尔坐标系下的浅水波方程

取局地 (x, y, t) 笛卡尔坐标系 (图 1), $x-y$ 平面取在平均海平面上, x 轴向东为正, y 轴向北为正, 则浅水波方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + fv + k_1 \Delta u + \frac{\tau_a^x - \tau_b^x}{\rho(\zeta' + h)}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta'}{\partial y} - fu + k_1 \Delta v + \frac{\tau_a^y - \tau_b^y}{\rho(\zeta' + h)}, \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \frac{\partial u(\zeta' + h)}{\partial x} + \frac{\partial v(\zeta' + h)}{\partial y} = k_2 \Delta \zeta', \end{cases} \quad (1)$$

其中 u, v 为海流流速的两个分量, u 指向东, v 指向西, ζ' 为海表面起伏, $h(x, y)$ 为平均海表面到海底的深度, 是海底地形高度的函数, g 为重力加速度。 $f = 2\omega \sin\theta$ 为科里奥利力参数, k_1 取为侧向摩擦系数, 即水平涡动粘性系数, k_2 为分子迁移系数, 在这里取为零, ρ 为海水密度, 可近似地取为 1, τ_a^x 和 τ_a^y 为海表面风应力的两个分量, τ_b^x 和 τ_b^y 为海底摩擦力, 可取为

$$\tau_b = \frac{g|\mathbf{v}|}{C^2} = r\mathbf{v}\sqrt{u^2 + v^2}, \quad r = \frac{g}{C^2},$$

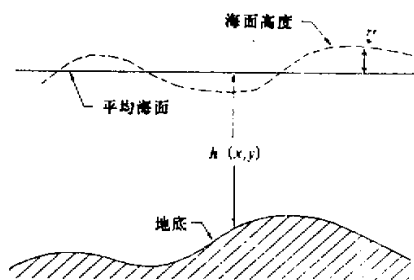


图 1 坐标系选取示意

C 为 Chezy 系数。

为便于构造 L_2 空间中的保持能量守恒性质的差分格式, 引入如下的变量变换^[3]:

$$\Phi = \sqrt{g(\zeta' + h)}, \quad U = \Phi u, \quad V = \Phi v, \quad \zeta = g\zeta',$$

变换后的方程变为^[4]

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial U} x \right) + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial U} U \right) \\ \quad = -\Phi \frac{\partial \zeta}{\partial x} + fV + k_1 \Phi \Delta u + \frac{g}{\Phi} (\tau_a^x - \tau_b^x), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial V} V \right) + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial V} V \right) \\ \quad = -\Phi \frac{\partial \zeta}{\partial y} - fU + k_1 \Phi \Delta v + \frac{g}{\Phi} (\tau_a^y - \tau_b^y), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial V \Phi}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

不难证明, 在忽略耗散及强迫力项的情况下, 方程(2)保持总有效能量守恒及质量守恒:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_D \frac{1}{2} (U^2 + V^2 + \zeta^2) dx dy = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \iint_D \zeta dx dy = 0.$$

这说明 U 、 V 、 ζ 都是属于 L_2 空间的, 因此可以通过微分方程(2)来构造满足总有效能量及总质量守恒的差分方程。

2. 自适应网格坐标下浅水波方程的变形

将 $X-Y$ 平面上的方程(2)变换到 $\xi-\eta$ 平面上, 变换中要用到如下的关系:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(y_\eta \frac{\partial A}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial A}{\partial \eta} \right),$$

其守恒形式为

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta A) - \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\xi A) \right],$$

其中 J 为坐标变换的 Jacobi 项。

于是方程(2)在 $\xi-\eta$ 平面上变为^[2]

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2J} \left((y_\eta u - x_\eta v) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial (y_\eta u - x_\eta v) U}{\partial \xi} \right) \\ \quad + \frac{1}{2J} \left((-y_\xi u + x_\xi v) \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial (-y_\xi u + x_\xi v) U}{\partial \eta} \right) \\ \quad = -\frac{\Phi}{J} \left(y_\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) + fV + k_1 \Phi \Delta_{\xi\eta}(u) + \frac{g}{\Phi} (\tau_a^x - \tau_b^x), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2J} \left((y_\eta u - x_\eta v) \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial (y_\eta u - x_\eta v) V}{\partial \xi} \right) \\ \quad + \frac{1}{2J} \left((-y_\xi u + x_\xi v) \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial (-y_\xi u + x_\xi v) V}{\partial \eta} \right) \\ \quad = -\frac{\Phi}{J} \left(-x_\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) - fU + k_1 \Phi \Delta_{\xi\eta}(v) + \frac{g}{\Phi} (\tau_a^y - \tau_b^y), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial (y_\eta U - x_\eta V) \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial (-y_\xi U + x_\xi V) \Phi}{\partial \eta} \right) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 U, V, ζ 的定义与前相同,

$$\Delta_{\xi\eta}(\bar{v}) = \frac{1}{J^2} (\alpha \bar{v}_{\xi\xi} - 2\beta \bar{v}_{\xi\eta} + \gamma \bar{v}_{\eta\eta}) + P \bar{v}_\xi + Q \bar{v}_\eta, \bar{v} = (u, v)^T,$$

$$P = J^{-3} [-y_\eta (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) + x_\eta (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})],$$

$$Q = J^{-3} [y_\xi (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) - x_\xi (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})],$$

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi,$$

$$\begin{aligned}\alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2, \\ \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2.\end{aligned}$$

方程(3)比方程(2)要复杂一些, 比如气压梯度力多出一项, 但方程中几个主要项的形式十分相似。在平流项中, 当用 $y_\eta u - x_\eta v$ 代替 u , 用 $-y_\xi u + x_\xi v$ 代替 v 时, 平流项具有一样的形式。同理, 在散度项中用 $y_\eta U - x_\eta V$ 代替 U , 用 $-y_\xi U + x_\xi V$ 代替 V , 则散度项的形式也是一样的。这相当于曲线坐标在 X - Y 平面上有一个旋转。这是不难理解的, 因为 $\vec{s}_1 = (y_\eta, -x_\eta)$ 正好是曲线网格线 $\xi = \text{常数}$ 的法向, 而 $\vec{s}_2 = (-y_\xi, x_\xi)$ 是曲线网格 $\eta = \text{常数}$ 的法向。因此, $\vec{s}_1 \cdot \vec{v} = y_\eta u - x_\eta v$ 相当于曲线网格坐标下的 u , $\vec{s}_2 \cdot \vec{v} = -y_\xi u + x_\xi v$ 相当于曲线网格坐标下的 v 。当 $(y_\eta, -x_\eta) \cdot (-y_\xi, x_\xi) = 0$ 时, 曲线网格构成一正交坐标系 (图 2)。且又当 $x(\xi, \eta)$ 与 $y(\xi, \eta)$ 都是直线时, 变换相当于作了一个坐标旋转, 当 $x = \xi$, $y = \eta$ 时, $\vec{s}_1 \cdot \vec{v} = u$, $\vec{s}_2 \cdot \vec{v} = v$, $\vec{s}_1$ 即为 X 轴方向, $\vec{s}_2$ 即为 Y 轴方向。

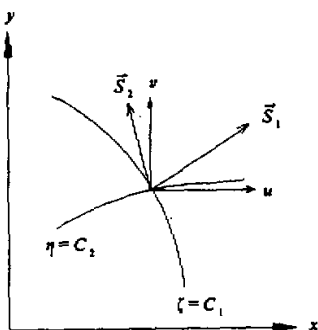


图 2 曲线坐标系示意

因此, 方程(3)是在一个比笛卡尔坐标系更为广泛的坐标系上所满足的方程。笛卡尔坐标系只不过是它的一个特例。

与方程(2)一样, 方程(3)具有总有效能量及总质量守恒:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_B \frac{1}{2} (U^2 + V^2 + \zeta^2) J d\xi d\eta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \iint_B \zeta J d\xi d\eta = 0.$$

综上所述, 方程(3)是适用于任何曲线坐标系的能量守恒的方程, 它保持了在笛卡尔坐标系下方程所具有的整体积分性质。

三、自适应网格模式的差分方程及时间积分

1. 自适应网格模式的差分方程

本文取跳点格式 (B 网格), 即 U, V, u, v, x, y 取在整点 (i, j) 上, ζ 和 Φ 取在半点 $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ 上。

首先定义差分算子及平均算子:

$$\begin{aligned}\delta_i A &= A^{n+1} - A^n, & \bar{A}^i &= \frac{1}{2} (A^{n+1} + A^n), \\ (\delta_\xi A)_i &= A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}}, & \bar{A}_i^\xi &= \frac{1}{2} (A_{i+\frac{1}{2}} + A_{i-\frac{1}{2}}), \\ (\delta_\xi^2 A)_i &= A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1}, & \bar{\bar{A}}_i^{\xi\eta} &= \bar{A}_i^\xi = \bar{A}_i^\eta,\end{aligned}$$

$$(\delta_{\xi\eta} A)_{i,j'} = \frac{1}{4} (A_{i'+1,j'+1} - A_{i'+1,j'-1} - A_{i'-1,j'+1} + A_{i'-1,j'-1}),$$

当 A 定义在整点 i 上时, $i' = i$; 当 A 定义在半点 $i + \frac{1}{2}$ 上时, $i' = i + \frac{1}{2}$. 对于在该点上没有定义的点, 可采用平均值代替. 则差分方程为

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\delta_t U}{\delta t} \right)_{i,j} + \frac{1}{2J} \left(\delta_\xi \overline{u_1} U^\xi + u_1 \delta_\xi \overline{U}^\xi \right) + \frac{1}{2J} \left(\delta_\eta \overline{v_1} U^\eta + v_1 \delta_\eta \overline{U}^\eta \right) \\ & = -(P_x)_{i,j} + (fV)_{i,j} + k_1 \overline{\Phi}_{i,j}^{\xi\eta} \Delta_{\xi\eta}(u) + \frac{g}{\overline{\Phi}_{i,j}^{\xi\eta}} (\tau_a^x - \tau_b^x)_{i,j} \\ & \left(\frac{\delta_t V}{\delta t} \right)_{i,j} + \frac{1}{2J} \left(\delta_\xi \overline{u_1} V^\xi + u_1 \delta_\xi \overline{V}^\xi \right) + \frac{1}{2J} \left(\delta_\eta \overline{v_1} V^\eta + v_1 \delta_\eta \overline{V}^\eta \right), \\ & = -(P_y)_{i,j} - (fU)_{i,j} + k_1 \overline{\Phi}_{i,j}^{\xi\eta} \Delta_{\xi\eta}(v) + \frac{g}{\overline{\Phi}_{i,j}^{\xi\eta}} (\tau_a^y - \tau_b^y)_{i,j} \\ & \left(\frac{\delta_t \zeta}{\delta t} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J} \left(\delta_\xi \overline{U_1}^\eta \overline{\Phi}^\xi + \delta_\eta \overline{V_1}^\xi \overline{\Phi}^\eta \right) = 0 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

其中, $\Delta_{\xi\eta}(\overline{v}) = \frac{1}{J^2} (\alpha \delta_\xi^2 \overline{v} - 2\beta \delta_\xi^2 \overline{v} + \gamma \delta_\eta^2 \overline{v})_{i,j} + P_{i,j} \delta_\xi \overline{v}^\xi + Q_{i,j} \delta_\eta \overline{v}^\eta$,

$$u_1 = y_\eta u - x_\eta v, \quad v_1 = -y_\xi u + x_\xi v,$$

$$U_1 = y_\eta U - x_\eta V, \quad V_1 = -y_\xi U + x_\xi V,$$

$$(P_x)_{i,j} = \frac{1}{J} \left(y_\eta \overline{\Phi}^\xi \delta_\xi \zeta^\eta - y_\xi \overline{\Phi}^\eta \delta_\eta \zeta^\xi \right)_{i,j},$$

$$(P_y)_{i,j} = \frac{1}{J} \left(-x_\eta \overline{\Phi}^\xi \delta_\xi \zeta^\eta + x_\xi \overline{\Phi}^\eta \delta_\eta \zeta^\xi \right)_{i,j},$$

$\alpha, \beta, \gamma, P, Q$ 的定义与前相同. 在这里 $\delta_\xi \xi = \delta_\eta \eta = 1$.

将方程(4)化简得

$$\left\{ \begin{aligned} & U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2J_{i,j}} \left(\overline{u}_{1,i+\frac{1}{2},j}^\xi U_{i+1,j} - \overline{u}_{1,i-\frac{1}{2},j}^\xi U_{i-1,j} \right) \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2J_{i,j}} \left(\overline{v}_{1,i,j+\frac{1}{2}}^\eta U_{i,j+1} - \overline{v}_{1,i,j-\frac{1}{2}}^\eta U_{i,j-1} \right) \\ & \quad + \Delta t \left[-(P_x)_{i,j} + (fV)_{i,j} + k_1 \overline{\Phi}_{i,j}^{\xi\eta} \Delta_{\xi\eta}(u) + \frac{g}{\overline{\Phi}_{i,j}^{\xi\eta}} (\tau_a^x - \tau_b^x)_{i,j} \right], \\ & V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2J_{i,j}} \left(\overline{u}_{1,i+\frac{1}{2},j}^\xi V_{i+1,j} - \overline{u}_{1,i-\frac{1}{2},j}^\xi V_{i-1,j} \right) \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2J_{i,j}} \left(\overline{v}_{1,i,j+\frac{1}{2}}^\eta V_{i,j+1} - \overline{v}_{1,i,j-\frac{1}{2}}^\eta V_{i,j-1} \right) \\ & \quad + \Delta t \left[-(P_y)_{i,j} - (fU)_{i,j} + k_1 \overline{\Phi}_{i,j}^{\xi\eta} \Delta_{\xi\eta}(v) + \frac{g}{\overline{\Phi}_{i,j}^{\xi\eta}} (\tau_a^y - \tau_b^y)_{i,j} \right], \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \zeta_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{J_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} (\bar{U}_1^n \bar{\Phi}_{i+1j+\frac{1}{2}}^\zeta - \bar{U}_1^n \bar{\Phi}_{ij+\frac{1}{2}}^\zeta) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{J_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} (\bar{V}_1^\zeta \bar{\Phi}_{i+\frac{1}{2}j+1}^\eta - \bar{V}_1^\zeta \bar{\Phi}_{i+\frac{1}{2}j}^\eta). \end{aligned} \right.$$

在忽略摩擦力及强迫项的情况下, 容易证明方程(5)具有离散的总能量及总质量守恒:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{ij} (U^2 + V^2)_{ij} J_{ij} + \sum_{ij} \zeta^2_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} J_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \right] \Delta \xi \Delta \eta &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{ij} \zeta_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} J_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \Delta \xi \Delta \eta &= 0. \end{aligned}$$

若方程(5)右端项中的 U 、 V 、 ζ 用 $\bar{U}'$ 、 $\bar{V}'$ 、 $\bar{\zeta}'$ 代替, 即采用梯形隐式, 则可证明该方程保持完全的能量守恒:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \left[\sum_{ij} (U^2 + V^2)_{ij} J_{ij} + \sum_{ij} \zeta^2_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} J_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \right] \Delta \xi \Delta \eta &= 0, \\ \frac{\delta}{\delta t} \sum_{ij} \zeta_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} J_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \Delta \xi \Delta \eta &= 0. \end{aligned}$$

差分方程(5)适应于任何曲线坐标系 (包括笛卡尔坐标系), 并且保持了笛卡尔坐标系下差分方程所具有的整体性质, 即保持总能量守恒及总质量守恒。

2. 时间积分方案和解算算法

为了节省计算时间, 计算采取了如下三个过程的分解算法:

1) 地转适应过程

$$\left\{ \begin{aligned} U_{ij}^I &= U_{ij}^n + \Delta t_1 \left[f \bar{V}' - \frac{1}{J} \left(y_\eta \bar{\Phi}^\zeta \delta_\xi \zeta_t^n - y_\xi \bar{\Phi}^\eta \delta_\eta \zeta_t^\zeta \right) \right]_{ij}, \\ V_{ij}^I &= V_{ij}^n + \Delta t_1 \left[-f \bar{U}' - \frac{1}{J} \left(-x_\eta \bar{\Phi}^\zeta \delta_\xi \zeta_t^n + x_\xi \bar{\Phi}^\eta \delta_\eta \zeta_t^\zeta \right) \right]_{ij}, \\ \zeta_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^I &= \zeta_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n \\ &\quad - \frac{\Delta t_1}{J_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} \left[(\bar{y}^\eta \bar{U}' - x_\eta \bar{V}')^\zeta \bar{\Phi}_{i+1j+\frac{1}{2}}^\zeta - (\bar{y}^\eta \bar{U}' - x_\eta \bar{V}')^\zeta \bar{\Phi}_{ij+\frac{1}{2}}^\zeta \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t_1}{J_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} \left[(-\bar{y}_\xi \bar{U}' + x_\xi \bar{V}')^\zeta \bar{\Phi}_{i+\frac{1}{2}j+1}^\eta - (-\bar{y}_\xi \bar{U}' + x_\xi \bar{V}')^\zeta \bar{\Phi}_{i+\frac{1}{2}j}^\eta \right] \end{aligned} \right. \quad (6)$$

其中 $\bar{A}' = \frac{1}{2}(A^I + A^n)$ 。

2) 演变过程

$$\begin{cases} F_{ij}^{\text{II}} = F_{ij}^{\text{I}} - \frac{\Delta t_2}{2J_{ij}} \left[\overline{(y_\eta u - x_\eta v)}^{\text{I}}_{i+\frac{1}{2},j} \bar{F}_{i+1,j}^{\text{I}} - \overline{(y_\eta u - x_\eta v)}^{\text{I}}_{i-\frac{1}{2},j} \bar{F}_{i-1,j}^{\text{I}} \right] \\ \quad - \frac{\Delta t_2}{2J_{ij}} \left[\overline{(-y_\xi u + x_\xi v)}^{\text{I}}_{i,j+\frac{1}{2}} \bar{F}_{i,j+1}^{\text{I}} - \overline{(-y_\xi u + x_\xi v)}^{\text{I}}_{i,j-\frac{1}{2}} \bar{F}_{i,j-1}^{\text{I}} \right], \\ F = U, V, \\ \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\text{II}} = \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\text{I}}, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\bar{F}' = \frac{1}{2}(F^{\text{I}} + F^{\text{II}})$ 。

3) 耗散过程

$$\begin{cases} U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^{\text{II}} + \Delta t_3 k_1 \bar{\Phi}_{ij}^{\zeta_\eta} \Delta \zeta_\eta (u^{\text{II}}) + \frac{g}{\bar{\Phi}_{ij}^{\eta}} (\tau_a^x - \tau_b^x)_{ij}, \\ V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^{\text{II}} + \Delta t_3 k_1 \bar{\Phi}_{ij}^{\zeta_\eta} \Delta \zeta_\eta (v^{\text{II}}) + \frac{g}{\bar{\Phi}_{ij}^{\eta}} (\tau_a^y - \tau_b^y)_{ij}, \\ \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\text{II}}. \end{cases} \quad (8)$$

在第一、第二过程中, 计算采用梯形隐式, 即 U, V, ζ 分别用 $\bar{U}', \bar{V}', \bar{\zeta}'$ 代替。因此, 第一、第二个过程仍满足能量守恒及质量守恒, 并且时间步长可适当放大, 第三个过程仍采用显式过程。

从方程(6)–(8)可以看出, 每一个过程的时间步长可以不一样, 适应过程要求时间步长比较短, 可以取 $\Delta t_1 = 6 \text{ min}$, 而演变过程及耗散过程时间步长可适当地放大, 如取 $\Delta t_2 = \Delta t_3 = 30 \text{ min}$ 。

如果不采用分解算法, 则统一的时间步长 $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = 6 \text{ min}$, 计算时间将大大增加。

四、南海月平均流的数值模拟

1. 模式的计算网格、海底地形、风应力及其他

本文采用文[1]中自适应网格生成法来构造网格。模式的计算区域及生成的网格见图 3a。区域大体介于 100°E – 121°E , 0° – 28°N 之间。由于模式空间分辨率的限制, 把琼州海峡忽略了。海域的西边界及北边界(除台湾海峡一段以外)都是海岸线, 可取作固体边界; 而东边界的大部分位于台湾、吕宋、巴拉望岛和加里曼丹一带的海岸线上, 在水域上的边界只有与爪哇海相连的南边界以及台湾海峡和巴士海峡。因此, 南海区域是一个相对封闭的区域。为了简化我们的计算, 将这部分开边界也取做固定边界, 即将南海看作一个近似的完全封闭的区域。在模式的计算中, 模型最大无扰动水深取为 200 m , 南海里面的岛屿用 1 m 到 5 m 的浅滩代替, 具体的取法如图 3b。

海表面风应力取自美国 S. Hellerman 和 M. Rosenstein 提供的资料, 他们使用了从

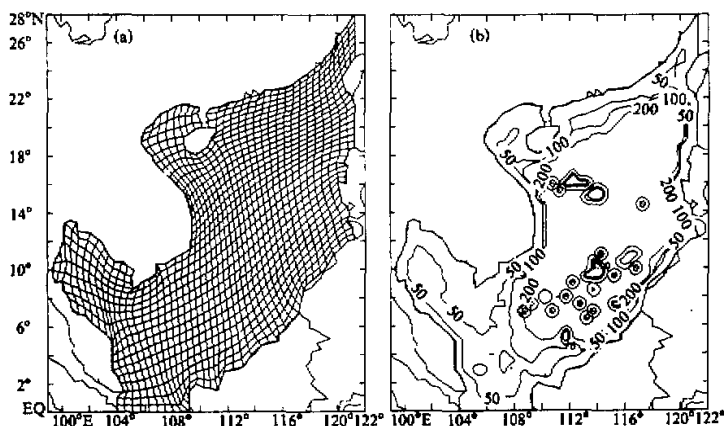


图3 模式的计算区域、网格及海底地形图

1870 年至 1976 年 106 年里世界海洋上 3500 万个观测数据, 经过严格的数据质量控制计算, 得到了全球各月 $2^\circ \times 2^\circ$ 网格的风应力 $\bar{\tau}_a$, 被认为是比较全和比较可靠的资料。

此外, 侧向摩擦系数 $k_1 = 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$, 海底摩擦系数 $r = 3.3 \times 10^{-3}$, 侧边界条件采用无滑动边条件, 即在边界上 $u|_y = 0, v|_y = 0$ 。

由于我们计算的是月平均流—平衡态, 即通过月平均风应力来强迫海流, 使其达到平衡。因此初值可任意选取, 积分达到定常为止。为简单起见, 取初条件 $u = 0, v = 0, \zeta = 0$ 。

图 4 给出了积分一个月的各种曲线的变化结果。图 4a 给出了 1 月份月平均流的总有效能量 $TAE = \sum (U^2 + V^2 + \zeta^2) J \Delta \xi \Delta \eta$ (单位: $50^2 \times 10^6 \text{ m}^6/\text{s}^4$)、总动能 $TKE = \sum (U^2 + V^2) J \Delta \xi \Delta \eta$ (单位同上) 以及总表面位能 $TAE = \sum \zeta^2 J \Delta \xi \Delta \eta$ (单位同上) 随时间变化的曲线。从图中可以看出, 在计算的前 10 d, 能量变化比较剧烈, 增长很快, 15 d 后变化趋于定常。这表明计算是十分稳定的。表面位能在初始 5 d 的变化很剧烈, 这说明在初始阶段, 风应力的驱动使得海表面发生巨大的起伏, 然后才趋于定常。图 4b 给出了 1 月份平均流的 $|\bar{v}|_{\max}$, $|\bar{u}|_{\max}$ 以及 $|\bar{v}|_{\max}$ 随时间变化的曲线 (单位: m/s)。从图中可以看出, 在前 5 d 速度分量很快达到极值, 变化在 10 d 后就趋于定常

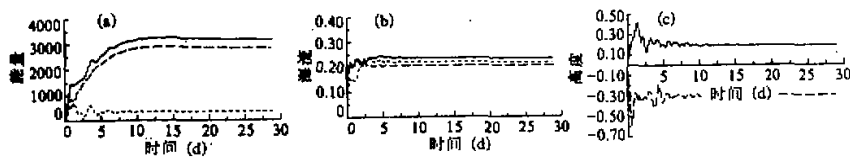


图4 积分一个月的一些量的变化曲线图

了。图 4c 给出了计算的 1 月份月平均流的海面起伏 ζ 的最大值和最小值随时间变化的曲线(单位: m)。在前 5 d, 海面起伏变化比较剧烈, 这与总表面位能的变化较一致, 10 d 以后变化趋于定常。

综上所述, 积分进行到 15 d 以后, 各种变化基本达到平衡。因此, 在本文的计算中积分到一个月就认为海流已达到平衡。

2. 南海区域的月平均流

由于吕宋岛和巴拉望岛的阻隔, 使得南海成为一个准封闭的海域, 其环流与西太平洋中的赤道流系和西部边界流(黑潮)的联系并不密切。由于南海海面上的季风比较强且稳定, 在季风的驱动下南海海流应具有明显的季风流的特征。

本文采用文献[4]的作法, 将南海的海表面风应力场大致地分为四种类型: 冬季型(11月—翌年3月), 冬夏过渡型(4—5月), 夏季型(6—8月)以及夏冬过渡型(9—10月), 并着重计算了四种典型的季风应力场作用下的海流。因篇幅所限, 在此仅给出冬(1月)、夏(7月)两季的模拟结果。

冬季南海盛行东北风, 1 月份最为典型(见图 5a)。风向与南海的斜菱形长轴走向大致平行, 北部和西部风力较强且风向稳定, 南部和东部风力较弱, 一般地说, 11月、12月和1月风力最强, 2月、3月风力逐渐减弱。夏季与冬季正好相反, 这段时间, 整个南海上空为西南或南风所控制, 7 月份最为典型(见图 5b), 但风力弱于冬季盛行的东北风。本文给出了 1 月份和 7 月份风应力强迫下的月平均海流。

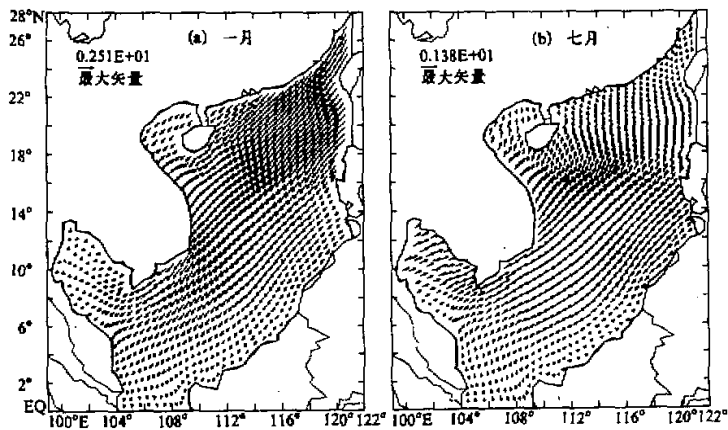


图 5 南海海面上月平均风应力

(1) 冬季(一月)南海月平均流

图 6a 给出了积分一个月的 1 月份月平均海流的流场(单位: m/s)。从图中可以看出, 在南海西部及北部边界上, 存在着很强的往南去的漂流, 这符合西边界强化的原理, 并与文献[4]的结果较一致。文献[5]中指出: 在东北季风时期, 南海西部存在着一

支纵贯南北的强大漂流,这在图中进一步得到了证实。在冬季,整个南海被一个大的气旋式环流所占据,这与文献[4—7]等的结论相一致。这是由于南海西部的漂流输水受陆架的阻挡,海水发生堆积,迫使一部分海水沿加里曼丹海岸转折北上,从而构成了冬季表层气旋式环流的东翼。此外,风力的分布也有利于东部海区形成一支北上的逆流。

在南海西部漂流及东部逆流所构成的大环流中,南海北部 ($16.5^{\circ}\text{N}, 116.5^{\circ}\text{E}$) 附近以及南海南部 ($6.5^{\circ}\text{N}, 109^{\circ}\text{E}$) 附近又各存在着一个中等尺度的闭合气旋式环流,这与文献[4—6]等的结论相一致。在南海北部海区的南界上,即西沙—中沙—黄岩岛一线,有着众多的岛架和海底山,它们的屏障作用迫使部分漂流输水向东偏移,使之构成北部海区气旋式环流的南翼,由此可知北部海区的气旋式环流是风应力和地形共同作用的结果。南海南部海区的气旋式环流中心正好位于菱形盆地的尖角上,该环流的形成主要是西部漂流所输送的相对低温海水在此堆积而其东面往北去的逆流因受南沙群岛的阻碍迫使其再往西去,从而形成了一个封闭的中尺度的气旋环流,这在文献[5]中有所描述。管秉贤^[8]通过分析温度分布结构和动力计算后指出:在东北风盛行的冬季,南海北部在顺风流动的沿岸流外面大致沿着 100 m 等深线的走向存在着一支狭窄而呈带状的流速相当强的逆风流动的东北向流,被称作“南海暖流”。在以后的许多研究中(如文献[4,5,9]等)都证实了南海暖流的存在。从本文的计算结果中也可以清楚地看到这支逆流流动的东北向流,并且这支逆流从海南岛的东南部沿陆架一直延伸到台湾岛的西南部。此外,文献[9]还提出在南海暖流的右侧,还存在着一支与其反向的沿大陆坡外侧流动的西南向流,且其流速较强,流幅较宽,这从本文计算的图中也可以清楚地看出。

从图中还可看出,由于本文采取了与海岸线相重合的自适应网格坐标,边界附近的海流基本上沿着海岸线流动,这比较合理地反映了边界附近的流动状况。

图 6b 给出了 1 月份月平均流的海面起伏 (单位: m)。从图中可以看出,由于强大的东北风的驱动,整个南海海面呈现出南高北低的形式,这与文献[4]的结果十分接近。

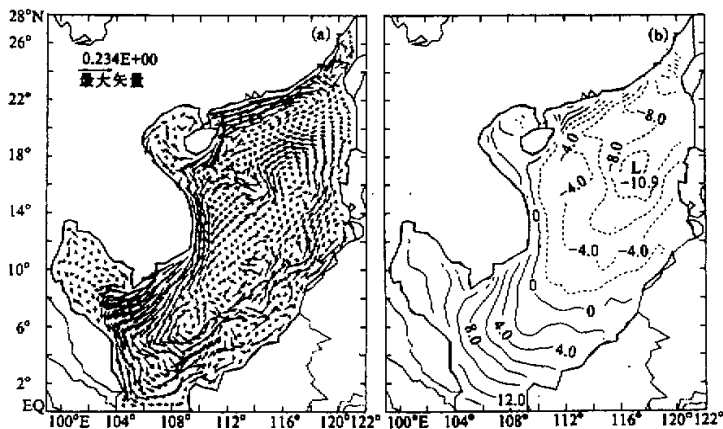


图 6 1 月份月平均海流及海面起伏

(2) 夏季 (7 月) 南海月平均流

图 7a 给出了积分一个月的 7 月份月平均海流图。从图中可以看出, 整个南海由两个大的环流所控制, 在南海南部海区(12°N 以南) 形成一个明显的反气旋式环流, 这与文献[4—7]等的结论相一致。这是由于西南季风迫使南海南部海区的水沿着中南半岛沿岸向北输送, 从而使该海区的水量损失, 于是在 12°N 以南的东部海区形成一支较强的南下逆流, 对南海南部的失水进行补偿, 从而构成南部海区反气旋环流的东翼。在 12°N 以北的广大海区, 由一个较大的气旋式环流所控制, 这与文献[4]的结论一致, 但与文献[5—7]等的结论不一样, 这有可能是因为此时在南海北部海区的流动主要是斜压性起主导作用, 风场的作用是次要的。此外, 在夏季南海的巴士海峡及台湾海峡有很强的流进流出, 而采用封闭的边界条件无疑会对南海北部的流动状况产生影响。在越南沿岸海区的外侧 (14°N , 111°E) 附近, 存在着一个气旋式环流, 这与文献[4—7]等的结论一致。此外, 文献[4]还提到在北部海区的这个较大的气旋式环流中, 除了越南沿岸的气旋式环流外, 还存在两个小的闭合气旋环流, 分别以 (17°N , 112°E) 和 (16°N , 115°E) 为中心, 这在本文的计算结果中也能反映出来。同样, 由于采用了与实际边界相重合的曲线网格, 边界附近的流动显得更加合理。

图 7b 给出了 7 月份月平均海平面起伏。从图中可以看出, 在夏季西南风的驱动下, 南海区域的海面呈东北部高西南部低的状态。

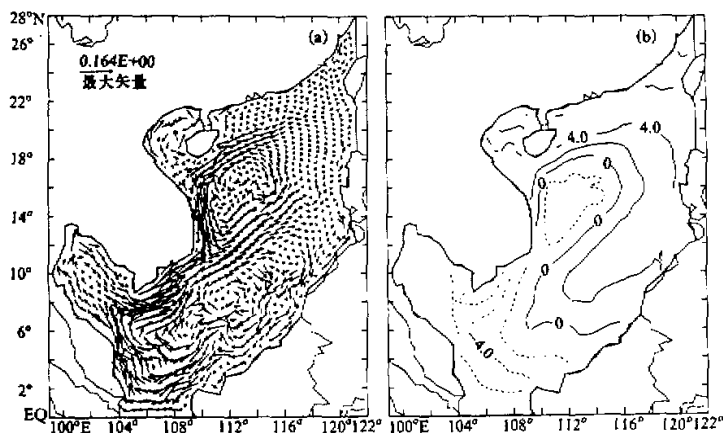


图 7 7 月份月平均海流及海面起伏

五、小 结

在本文中, 给出了常定的自适应网格模式及在南海月平均流计算中的模拟结果。证明了该模式保持着总有效能量守恒及总质量守恒。从数值模拟的总的形势来看, 与已有的结果比较一致。一些中小尺度的环流也模拟出来了, 特别是南海暖流的存在可以在本文的模拟结果中清楚地显示出来。此外, 西边界附近的流速明显高于东部, 这正好说明

了引起西边界强化的 β 效应在本文的计算中得到了反映。同时, 因为采用了与海岸线相重合的自适应网格, 边界附近的流动能够比较合理地反映出来。从本文的计算结果来看, 南海海流和海面起伏都能明显地反映出季节性的变化。

在局部海区的流动与以往的计算结果不一致, 特别是夏季的环流, 在 18°N 以北广东东海是一支西南向流, 这与文献[5—7]的结果正好相反。这可能是由于本文采用的是正压模式, 未考虑温盐效应, 仅靠风应力来驱动南海的流动。由于夏季北部海面上的风力较弱, 因之风场强迫下的海流也较弱, 此时, 很有可能热盐效应占主导地位, 而风场的作用不明显。此外, 采用封闭的边界条件也是造成不一致的原因之一。这问题值得今后进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 刘卓, 曾庆存, 1994, 自适应网格在大气海洋问题中的初步应用, 大气科学, 18, No.6, 641—647.
- [2] 曾庆存, 张学洪, 1981, 完全保持能量守恒的可压缩流体时空差分格式和协调的分解算法, 中国科学, 第 11 期, 1355—1366.
- [3] 刘卓, 曾庆存, 1992, 自适应网格及其在南海海流计算中的应用, 海洋环流研讨会论文选集, 海洋出版社, 242—251.
- [4] 曾庆存, 李荣凤, 季仲贞, 甘子钧, 柯佩辉, 1989, 南海月平均流的计算, 大气科学, 13, No.2, 127—138.
- [5] 徐锡祯, 邱章, 陈惠昌, 1980, 南海水平环流概述, 中国海洋湖沼学会水文气象学会学术会议论文集, 137—145.
- [6] 王佳, 1985, 南中国海定常环流的一种模型, 山东海洋学院学报, 15, No.3, 22—31.
- [7] Dale W.L., 1956, Wind and Drift Currents in the South China Sea, *Malayan Journal of Tropical Geograph*, 8, 1—31.
- [8] 管秉贤, 1978, 南海暖流—广东外海一支冬季逆风流动的海流, 海洋与湖沼, 9, No.2, 117—127.
- [9] 郭中信, 杨天鸿, 仇德忠, 1985, 冬季南海暖流及其右侧的西南向海流, 热带海洋, 4, No.1, 1—8.

The Application of Energy-Conservative Adaptive Mesh Model in the Computation of the Monthly Mean Currents of South China Sea

Liu Zhuo, Zeng Qingcun and Li Rongfeng

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

Based on the primitive barotropic equation of IAP model, an adaptive mesh model which was suitable for the adaptive mesh coordinate system was developed in this paper. The model preserves the integral properties as well as IAP model, and can be applied to the numerical calculation with complex shaped boundary. We applied it to the numerical simulation of the South China Sea Currents, the results are fairly good.

Key words: adaptive mesh model; conservation for both total energy and mass; warm currents; South China Sea.