

一类计算稳定性好的显式平流差分格式

周斌斌*

(上海城市建设学院环境工程系, 上海 200092,

中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室, 北京 100029)

提 要

通常的显式平流差分格式, 如迎风格式, Lax-Wendroff 格式等, 均是有条件稳定的, 其稳定条件与差分网格的时、空步长有关。本文对线性和拟线性平流方程分别构造了一种计算稳定性好的显式差分格式。对前一格式, 本文严格证明了它的无条件稳定性及收敛性, 并具有一阶精度; 对后一格式, 由于非线性方程的限制, 本文用数值试验研究了它的计算稳定性。

关键词: 平流方程; 差分格式; 无条件稳定。

一、定常速率平流差分格式

1. 格式的构造

某物理量 ψ 在某方向(设为 x 方向)的平流方程是

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

其中 U 是常数。(1)式是典型的常系数一阶双曲方程。最一般的显式差分格式是迎风格式

$$\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} + U \frac{\psi_j^n - \psi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (U \geq 0) \quad (2)$$

式中 Δt 、 Δx 分别是时间和距离步长, j 、 n 分别是距离和时间的步长序号。它具有一阶精度, 但是有条件稳定的, 稳定条件是 Courant 数 $U\Delta t / \Delta x \leq 1$ 。现在本文提出一个显式, 但无条件稳定的格式: 设在某一个时间步长 Δt 内, 上风向 $j-1$ 格点上的值 ψ_{j-1} 固定, 则 j 格点上的 ψ 值的变化满足

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -U \frac{\psi_j - \psi_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t, \quad (3)$$

1993年11月21日收到, 1994年4月25日收到修改稿。

* 目前地址: Cooperative Institute for Mesoscale Meteorological Studies (CIMMS), The University of Oklahoma, 401 E Boyd Norman, OK 73019, U.S.A.

在一个时间步长内积分以上差分-微分方程, 得

$$\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_{j-1}^n}{\psi_j^n - \psi_{j-1}^n} = e^{-U\Delta t / \Delta x},$$

或

$$\psi_j^{n+1} = \psi_{j-1}^n + (\psi_j^n - \psi_{j-1}^n)e^{-U\Delta t / \Delta x}, \quad U \geq 0 \quad (4)$$

(4)式即为所构造的差分格式。

2. 收敛性和稳定性证明

可以容易地证明格式(4)是相容的, 并具有距离和时间的一阶精度, 即 $O(\Delta x + \Delta t)$ 。由 Lax 等价定理^[1], 即如果格式是相容的, 那么格式的收敛性和稳定性是充分必要条件。所以只要证明格式(4)的稳定性, 则收敛性自然成立。应用 von-Neumann 稳定性分析法^[2], 令

$$\psi_j^n = T^n e^{ikx_j},$$

k 是任意实数, T 是过渡因子, 代入(4)式, 得

$$\begin{aligned} T &= e^{-ik\Delta x} + (1 - e^{-ik\Delta x})\eta = e^{-ik\Delta x}(1 - \eta) + \eta \\ &= (1 - \eta)\cos k\Delta x + \eta - i(1 - \eta)\sin k\Delta x, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\eta = e^{-U\Delta t / \Delta x},$$

并且有

$$0 \leq \eta \leq 1,$$

则

$$\begin{aligned} |T| &= \{[(1 - \eta)\cos k\Delta x + \eta]^2 + [(1 - \eta)\sin k\Delta x]^2\}^{1/2} \\ &= [(1 - \eta)^2 + 2(1 - \eta)\eta\cos k\Delta x + \eta^2]^{1/2} \\ &= [1 - 2\eta + 2\eta^2 + 2(1 - \eta)\eta\cos k\Delta x]^{1/2} \\ &\leq [1 - 2\eta + 2\eta^2 + 2(1 - \eta)\eta]^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

所以格式(4)是无条件稳定的, 由 Lax 等价定理, 格式(4)也是无条件收敛的。

以上证明了格式(4)的相容性以及无条件稳定性和收敛性, 并具有一阶精度, 所以比通常的迎风格式优越。其实, 当 $\Delta x \gg U\Delta t$ 时, $e^{-U\Delta t / \Delta x} \approx 1 - U\Delta t / \Delta x$, 这时, 格式(4)即退化为普通的迎风格式(2)。

3. 数值试验

为进一步比较格式(4)和迎风格式(2), 再用数值试验来说明。设有初值问题

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} 3\sin(x\pi/6) & 0 \leq x \leq 6, \\ 0 & x > 6. \end{cases} \quad (6)$$

其解析解为 $\psi(x, t) = 3\sin[\pi(x-t)/6]$, ($0 \leq x-t \leq 6$), 而迎风格式和构造的新格式(4)的计算结果见图 1 和图 2.

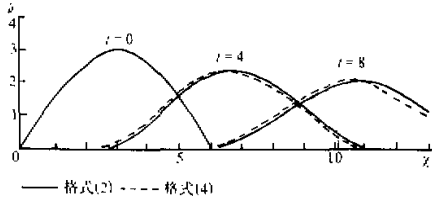


图 1 格式(2)和(4)的数值计算结果比较
 $\Delta x = 0.5, \Delta t = 0.25$

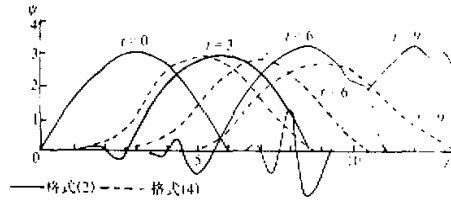


图 2 格式(2)和(4)的数值计算结果比较
 $\Delta x = 0.5, \Delta t = 0.55$

图 1 中的 Courant 数 $U\Delta t / \Delta x = 0.5 < 1$, 可见, 当稳定条件满足时, 格式(2)和格式(4)都是稳定的, 结果也比较一致, 只是格式(4)的孤立波的移动比格式(2)稍慢。图 2 中的 Courant 数 $U\Delta t / \Delta x = 1.1 > 1$, 不满足稳定条件, 迎风格式在计算到 $t=3$ 时, 即开始出现计算不稳定, 到了 $t=9$, 这种不稳定更剧烈。反观格式(4)的波型, 在 $t=9$ 时仍保持着良好的稳定性。可见, 格式(4)比迎风格式好得多。

二、拟线性平流差分格式

作为一般讨论, 本文研究拟线性方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

(7)式可以写成一次守恒形式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^2}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

拟线性方程(7)与线性方程有很大的不同, 即使初始条件是充分光滑的, 在许多情况下连续可微的解只能在 $t=0$ 附近存在。当 t 很大时, 往往不会再有连续可微的解。目前用迎风格式计算是很普遍的, 因为它不但能在解的光滑区域内计算, 而且当解出现间断时, 仍能顺利地进行计算^[3], 其稳定条件为

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(\psi_j^n) \leq 1. \quad (9)$$

由于非线性的原因, 要加一个安全系数 ε ($0 < \varepsilon < 1$), 即

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_n (\psi_j^n) < 1 - \varepsilon. \quad (10)$$

可见, 非线性平流方程的差分格式的稳定性具有一定的不确定性。由于气体的动力学方程来源于一系列守恒定律, 化为一次守恒形式(8)更合理, 而且可将线性方程的各种差分格式直接用于守恒形式。如迎风格式

$$\frac{(\psi_j^{n+1} - \psi_j^n)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(\psi_j^{n2} - \psi_{j-1}^{n2})}{\Delta x} = 0. \quad (11)$$

其稳定性条件可参考(10)式。对 ψ 变化较大时, 计算稳定性容易被破坏。本文提出另一稳定性较好的显式格式。参照前面的方法, 设在某一个时间步长 $n\Delta t$ 至 $(n+1)\Delta t$ 内, 上风向前一格点上的 ψ_{j-1}^n 值固定, 则

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\psi_j^2 - \psi_{j-1}^2}{\Delta x}, \quad n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t. \quad (12)$$

积分上式并整理得

$$\psi_j^{n+1} = \psi_{j-1}^n \left[\frac{\psi_j^n + \psi_{j-1}^n + (\psi_j^n - \psi_{j-1}^n)e^{-\psi_j^n - 1\Delta t / \Delta x}}{\psi_j^n + \psi_{j-1}^n - (\psi_j^n - \psi_{j-1}^n)e^{-\psi_j^n - 1\Delta t / \Delta x}} \right]. \quad (13)$$

使用时, 应避免 ψ_j^n 和 ψ_{j-1}^n 同时为零的格点。很难用严格的方法证明非线性方程差分格式的稳定性 and 收敛性, 本文用数值试验来检验, 并与迎风格式作比较。设有初值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \\ \psi(x, 0) &= \begin{cases} 3\sin(x\pi/6) & 0 \leq x \leq 6, \\ 0 & x > 6. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

分别用格式(11)和格式(13)进行计算, 见图 3。

图 3 表明, 当时间步长 Δt 等于较小的 0.1 时, 两种格式均是稳定的, 结果也比较接近。由于迎风格式不论是用于线性还是非线性方程, 均是相容的^[3], 可以证明, 新的格式是相容的。流体动量平流, 雾水重力沉降满足方程(7); 一滴液体(如水或油)沿着粗糙的垂直表面作自然下流时, 其外部轮廓也满足初始问题(14)。事实上, 若将图 3 旋转 90 度竖起来, 就是其图象, 最下面是一个由重力作用产生的球状旋垂体, 与日常观测到的情形接近。可见, 当 Δt 不是很大的时候, 迎风格式(11)和本文构造的格式(13)均能很好地用于计算拟线性平流方程(7)。但当 Δt 增大到 0.23 时, 迎风格式会出现计算不稳定, 见图 4。从第 5 时步($t=1.15$)起, 出现了不稳定振荡, 随后, 不稳定能量迅速发展, 计算曲线的振幅也迅速增大。然而格式(13)却是计算稳定的, 即使 Δt 增大到 0.3, 结果仍很稳定。

综合上述, 构造的格式(13)能象一次守恒型差分格式一样, 保持物理量的守恒性质, 但比一般的一次守恒差分格式更容易保持计算的稳定性。

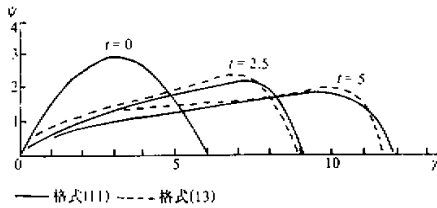


图3 格式(11)和(13)的数值计算结果比较
 $\Delta x=0.5, \Delta t=0.1$

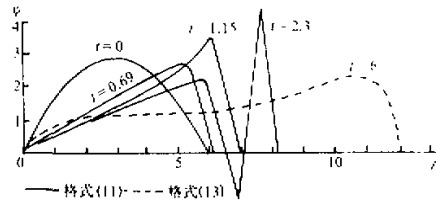


图4 格式(11)和(13)的数值计算结果比较
 格式(11): $\Delta x=0.5, \Delta t=0.23$
 格式(13): $\Delta x=0.5, \Delta t=0.3$

三、结 论

本文构造了两个用于计算平流方程的显式差分格式,一个用于线性平流方程,另一个用于拟线性平流方程。前者是无条件稳定的并具有一阶精度。对后一格式,由于非线性方程的困难,仅用数值计算作了试验,表明它具有较好的计算稳定性。

参 考 文 献

- [1] 南京大学数学系计算数学专业, 1979, 偏微分方程数值解法, 科学出版社, 129页。
- [2] [美]罗奇 P. J. 著, 钟毓昌等译, 1983, 计算流体力学, 科学出版社, 53—57页。
- [3] 陆金甫等著, 1986, 偏微分方程数值解法, 清华大学出版社, 100—106页。

A Kind of Explicit Finite Difference Schemes with Better Stability for Advective Equations

Zhou Binbin

(Department of Environmental Engineering, Shanghai Institute of Urban Construction, Shanghai 200092
 LAPC, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract

In this paper, an unconditionally stable explicit finite difference scheme for linear advective equation and a rather stable explicit scheme for quasi-linear advective equation have been constructed, respectively. The strict proofs of consistency, stability and convergence for the former scheme, together with numerical experiment for both schemes have also been presented.

Key words: advective equation; finite-difference scheme; stability.