第19卷 第4期 大 气 科 学 Vol. 19, No. 4
1995 年 7 月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA July 1995

大气运动非线性不稳定性研究的若干新进展*

穆 穆

（中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室，北京 100029）

提 要

本文简要介绍了近年来运用 Arnold 方法（能量—Casimir 方法）研究大气运动非线性不稳定性所取得的若干新进展，讨论了该理论深人发展的前景及其应用问题。

关键词：不稳定性；非线性。

一、引 言

大气运动的不稳定性问题是动力气象学中的中心问题之一。不稳定性理论被广泛用来研究大气环流的演变，气旋与反气旋的发生、发展与消亡，阻塞的形成、维持与崩溃，等等。随着大气科学的迅速发展，当今人类密切关心的气候变化与预测，全球变化等问题，也需要从动力稳定性方面去进行深人的理论探讨。

经典的线性不稳定性理论将控制方程线性化，考察充分小扰动的不稳定性[1-6]。当扰动具单波形式的空间结构时，标准模（normal mode）方法被广泛用来推演线性不稳定的必要条件与充分条件、增长率及最不稳定波的波长，等等。该方法的缺点是它仅处理单波形式的小扰动问题，仅适用于扰动发展的初始阶段。另一方面，由于连续谱的存在性及其扮演的重要角色，人们越来越清楚地认识到了该方法的局限性[7-10]。近二三十年来，地球流体动力学中的弱非线性不稳定性理论也得到了很大发展[11]。该理论考察的运动具有下述特点：超临界数很小、扰动的振幅有限但必须小到可以使用摄动方法。由于摄动展开仅为渐近收敛，弱非线性理论结果的准确性必须借助于其他方法（例如数值方法）而加以“后验”，因而该理论也具有较大的不足之处。

随着大气科学与非线性科学的蓬勃发展，大气运动的非线性不稳定性研究愈来愈受到人们的重视。研究人员开始使用完整的非线性模式，考察空间结构任意的有限振幅扰动的不稳定问题，取得了许多重要成果。近几年来，作者及其同事们应用并发展了 Arnold 方法（能量-Casimir 方法），在非线性不稳定性的研究方面取得了一些成果。本文旨在简要介绍一下有关进展情况，并对该领域理论研究的深化与应用等问题，作一初步探讨。

1994 年 9 月 9 日收到。

* 国家自然科学基金资助项目。

二、Arnold 方法（能量–Casimir 方法）简介

60 年代中期，著名俄罗斯学者 V. I. Arnold 使用广义变分原理与能量–Casimir 方法，研究了两维不可压缩理想流体运动的非线性稳定性。他的方法可简介如下[12,13]：

对于控制方程的一个定常解，流函数与涡度满足雅可比关系式为零之条件，因而一般地（并非恒有）存在一个一元连续可导函数，使得流函数与涡度满足此函数关系式。在固壁边界条件下，利用能量守恒、广义涡度守恒与边界速度环量守恒，构造一个与时间无关的泛函，使得该定常态恰为该泛函的一个驻点（即该泛函的一阶变分在该点为零）。进一步考察该泛函的二阶变分，若在该驻点，二阶变分是正定的或负定的，则称该定常态是 formal 稳定的[12]。

对于有限维动力系统（其数学描述为一组常微分方程），formal 稳定性蕴含着非线性稳定性。但是，对于无限维动力系统（其数学描述为一组偏微分方程），formal 稳定性并不一定导致非线性稳定性。Ball 等[14]曾以弹性力学中的一个问题为例，说明存在这样的平衡态：能量泛函在该点是正定的，但却具有无穷多个不稳定的方向。因此，从本质上而言，对于无限维动力系统，formal 稳定性只是线性结果。关于各种稳定性之间的关系的讨论，读者可参阅 Holm 等的论文[15]。

Arnold[13]在其前述工作的基础上，用积分估计（亦被称为"先验估计"）的方法，证明了当二阶变分正定时，基本态也是非线性稳定的（Arnold 第一定理）。在二阶变分负定时，在下述两种情形下，他也证明了同样的结果：(i) 区域是单连通的。(ii) 区域是多连通的，在边界的每一连通分支上，扰动的速度环量为零。文献中通常称该结果为 Arnold 第二定理。

Arnold 方法本质上是有限维动力系统中的 Lyapunov 稳定方法在无限维动力系统中的发展。其论文发表之后，在相当长一段时间内，并没有引起人们足够的重视。80 年代以来，西方学者 Holm 等[15]、Abarbanel 等[16]，发展了 Arnold 方法，研究了三维可压缩流体、等离子流体等定常态的非线性稳定性，得到了不少重要成果。在地球流体动力学方面，许多学者作了深入的研究[17-28]，特别是曾庆存的工作[20]，对大气动力学中的各种重要模式，例如准地转模式，分层模式，原始方程组等，都作了系统的研究，建立了一系列重要的非线性稳定性数据。上述作者们的工作说明了，经典的线性稳定性结果，例如 Rayleith–Kuo 定理，Charney–Stern 定理，Fjortoft 定理，等等，都可以用 Arnold 方法，拓广为适用于有限振幅扰动的非线性稳定性判据。

上述工作主要考察二阶变分正定的情形，建立的非线性稳定性判据对应于 Arnold 第一定理。对于二阶变分负定的情形，在推导非线性稳定性判据时，困难更大一些，需要较多的积分估计技巧。事实上，为了能够应用 Poicare 不等式，文献[13，19，24]都假定了在边界的每一连通分支上，扰动的速度环量恒为零。在作者的工作中[29]，删去了这一过于苛刻的条件。显然，后者适用的扰动类型更广泛，在物理上也更为合理。

Andrews[18]曾指出，在大气动力学中，Arnold 第二定理较前者更令人感兴趣。作者及其同事们近年来在准地转流体运动的非线性稳定性研究方面，得到了一系列对应于 Arnold 第二定理的结果。这些研究成果在 Phillips 模型、Eady 模型等经典问题上的应

用，成功的揭示了边缘稳定曲线、短波截断等现象的非线性特征，也进一步显示了 Arnold 第二定理的重要意义。

三、两维准地转运动的非线性稳定性

考察两维准地转运动的非线性稳定性。其控制方程为[30,31]

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\partial(\Phi,P)=0, \tag{1}$$

$$P(x,y,t)=\nabla^2\Phi-F\Phi+f(x,y), \tag{2}$$

这里，Φ 是流函数，P是位势涡度，$\partial(A,B)=A_xB_y-A_yb_x$是两维 Jacobi 算子，$\nabla^2$是两维 Laplace 算子；$(x,y)$是空间变量，$t$是时间，$F\equiv f_0^2/gd$；$f(x,y)=(f_0/d)h(x,y)+f_0+\beta y$表示科里奥利力与地形$h(x,y)$的综合效应，$d$是特征高度，$f_0$是（常数）科里奥利参数。$F=0$对应于 Rossby 变形半径为无穷大之情形。

在 β 平面上的有界多连通（或单连通）区域D中考察流体的运动。边界∂D光滑，由$J+1$个单连通分支∂D_j组成，边界条件为固壁条件与边界速度环量守恒：

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right|_{\partial D}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\partial D_j}\nabla\Phi\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0,\qquad j=0,\cdots,J. \tag{3}$$

这里s与$\vec{n}$分别是边界的切方向与法方向。

设$(\Phi,P)=(\Psi(x,y),Q(x,y))$是(1)—(3)式的一组定常解，此外，设存在一元连续可导函数$\Psi(\cdot)$，使得

$$\Psi(x,y)=\Psi(Q(x,y)),\qquad (x,y)\in D. \tag{4}$$

叠加在定常基本态(Ψ,Q)上的有限振幅扰动(ψ,q)定义为

$$\Phi=\Psi+\psi,\qquad P=Q+q. \tag{5}$$

对应于 Arnold 第二定理，设$\Psi(\cdot)$是单调下降函数，且存在常数C_1，C_2，使得

$$0<C_1\leqslant-\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}Q\leqslant C_2<\infty, \tag{6}$$

这里$\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}Q=\nabla\Psi/\nabla Q$。

我们的目标是用初始扰动场建立扰动能量与扰动位涡拟能的上界估计。为此，定义

$$q^*=\int_D q_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big/\int_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7}$$

这里$q_0=q(x,y,0)$。为了克服扰动的边界速度环量非零之困难，再将(ψ,q)分解为

$$\psi=\psi'+\psi^*,\qquad q=q'+q^*,$$

这里 ψ'为下述问题的解：

$$\nabla^2\psi'-F\psi'=q'\qquad \text{在}D\text{中};$$

$$\left.\frac{\partial\psi'}{\partial s}\right|_{\partial D}=0,\qquad \int_{\partial D_j}\nabla\psi'\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0,\qquad j=0,\cdots,J.$$

关于上述问题解的存在性及"唯一性"的讨论，读者可参见文献[30]。

现在，定义

$$\begin{cases} E(t)=\frac{1}{2}\int_D[|\nabla\psi|^2+F|\psi|^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ E^*=\frac{1}{2}\int_D[|\nabla\psi^*|^2+F|\psi^*|^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ Z(t)=\frac{1}{2}\int_D|q|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad Z^*=\frac{1}{2}\int_D|q^*|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \\ H=E^*+\frac{C_2-C_1}{2}\int_D|q^*|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{C_2}{2}\int_D|q_0'|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{8}$$

容易验证E^*与H仅仅依赖于初始扰动场。

在文献[30]中证明了：若条件（4）与（6）式成立，且边值问题

$$\begin{aligned} &\nabla^2\varphi+\lambda\varphi=0 \qquad 在D中; \\ &\left.\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right|_{\partial D}=0, \qquad \int_{\partial D_j}\nabla\varphi\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0, \qquad j=0,\cdots,J \end{aligned} \tag{9}$$

的最小正特征值λ满足

$$C_1(\lambda+F)>1. \tag{10}$$

则关于扰动能量$E(t)$与扰动位涡拟能$Z(t)$成立下述上界估计：

$$E(t)\leqslant\frac{(C_1(\lambda+F)\sqrt{E^*}+\sqrt{E^*+H(C_1(\lambda+F)-1)})^2}{[C_1(\lambda+F)-1]^2}, \tag{11}$$

$$Z(t)\leqslant\frac{(\lambda+F)(\sqrt{E^*}+\sqrt{E^*+H[C_1(\lambda+F)-1]})^2}{[C_1(\lambda+F)-1]^2}+Z^*, \tag{12}$$

显然，上述估计的右端项仅仅与初始扰动场有关；当E^*与H趋于零时，扰动能量与扰动位涡拟能关于时间一致地趋于零。将此作为非线性稳定性的意义，有

判据 3.1　设定常态(Ψ,Q)满足（4）、（6）与（10）式，则它是非线性稳定的。

当位涡Q在区域中是一常数时，这时扰动位涡拟能$Z(t)$是一个守恒量。利用这一性质，建立了扰动能量的上界估计[30]，因而得到了

判据 3.2　若在D中Q=常数，则(Ψ,Q)是非线性稳定的。

若区域D是周期纬向通道，且角动量守恒，则可利用这些条件，建立较上述判据应用范围更广的非线性稳定性判据，有兴趣的读者可参阅文献[30]。

将文献[32]中的方法稍加修改，可以得到较（11）、（12）更优的上界估计，这只要将上述估计式右端的H用下述泛函$\tilde{H}$代替即可：

$$\tilde{H}=E^*-E(0)-A(0)-\frac{1}{2}\int_D C_1|q^*|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这里

$$A(0)=\int_D[G(Q+q_0)-G(Q)-\Psi(Q)q_0]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad G(\zeta)=\int^{\zeta}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

在引言中曾指出，formal稳定性并不保证非线性稳定性，作者等[30]也给出了一个有趣的例子：存在这样的定常态，它是非线性稳定的，能量-Casimir泛函以该定常态为驻点，但其二阶变分在该驻点既非正定，亦非负定，因而不是formal稳定的。该例与Ball等[14]的例子说明：formal稳定性既不是非线性稳定性的充分条件，亦非必要条件。

在纬向周期通道中，若地形函数$h=0$，作者等[30]利用上述稳定性判据，考察了下述定常态的非线性稳定性（A、A_1、A_2、B及K均为常数）：

(1) 广义Couette平面流

$$U(y)=Ay+B, \qquad V=0;$$

(2) 广义Poiseuille平面流

$$U(y)=Ay^2+B, \qquad V=0;$$

(3) $U(y)=A_1 e^{ky}+A_2 e^{-ky}+B, \qquad V=0;$

(4) $U(y)=A_1 \sin ky+A_2 \cos ky+B, \qquad V=0.$

我们证明了：(1)，(2)与(3)恒为非线性稳定的，在(4)中若Qy在区域中不为零，或者Qy在某点为零，但纬向通道南北方向的宽度(y_2-y_1)使得$K^2<\pi^2/(y_2-y_1)^2$，则它也是非线性稳定的。

四、多层准地转流体运动的非线性稳定性

多层准地转模式是地球流体动力学中的一个重要模式，我们考察N层层结稳定的准地转流体运动，各层密度$\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_N$均为常数，层间密度跃度相同：$\rho_{i+1}-\rho_i=\rho'$，第$i$层的平均厚度为$d_i$，其控制方程为[31]

$$\frac{\partial P_i}{\partial t}+\partial(\Phi_i, P_i)=0, \tag{13}$$

$$P_i(x,y,t)=\nabla^2\Phi_i+F_i\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\Phi_j+f_i(x,y), \qquad i=1,\cdots,N. \tag{14}$$

这里Φ_i和P_i分别是第i层的流函数与位涡，$F_i=f_0^2\rho_0/g\rho' d_i$是旋转Froude数，$\rho_0$是流体的平均密度，$f_i(x,y)=\delta_{iN}(f_0/d_N)h(x,y)+f_0+\beta y$，其中$h(x,y)$是底层的地形函数，$\delta_{iN}$是Kronecker符号，矩阵

$$T_{ij}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

在如上节所述的区域D中考察问题，在每一层，边界是固壁的，且速度环量守恒，即对每一流函数Φ_i，(3)式成立。

设$(\Phi_i, P_i)=(\Psi_i, Q_i)$是（13）、（14）式的一组定常解。此外，在每一层，存在一元连续可导函数$\Psi_i(\cdot)$，使得

$$\Psi_i(x,y)=\Psi_i(Q_i(x,y)), \qquad (x,y)\in D; \tag{16}$$

叠加在定常态(Ψ_i, Q_i)之上的有限振幅扰动(ψ_i, q_i)定义为

$$\Phi_i=\Psi_i+\psi_i, \qquad P_i=Q_i+q_i. \tag{17}$$

对应于 Arnold 第二定理，假定函数$\Psi_i(\cdot)$均是单调下降的，且存在正常数C_{1i}和C_{2i}，使得

$$0<C_{1i}\leqslant -\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}Q_i}\leqslant C_{2i}<\infty, \quad i=1,\cdots,N. \tag{18}$$

类似于上节，为了建立用初始扰动场给出的扰动能量与扰动位涡拟能的上界估计，定义

$$q_i^*=\int_D q_{0i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ \Big/ \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad i=1,\cdots,N;$$

这里$q_{i0}=q_i(x,y,0)$，再将(ψ_i, q_i)分解为

$$\psi_i=\psi_i'+\psi_i^*, \qquad q_i=q_i'+q_i^*, \qquad i=1,\cdots,N;$$

这里ψ_i'是下述问题的解：

$$\nabla^2\psi_i'+F_i\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\psi_j'=q_i', \qquad 在D中;$$

$$\left.\frac{\partial\psi_i'}{\partial s}\right|_{\partial D}=0, \qquad \int_{\partial D_j}\nabla\psi_i'\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0, \qquad j=0,\cdots,J.$$

上述问题解的存在性与"唯一性"在文献[33]中已有讨论。

为了叙述我们的结果，定义矩阵

$$K=\mathrm{diag}(\sqrt{F_1},\cdots,\sqrt{F_N}),$$
$$C=\mathrm{diag}(C_{11},C_{12},\cdots,C_{1N}),$$
$$M=C-(\lambda I-KTK)^{-1},$$

这里λ是上节中由问题（9）式定义的最小正特征值，I是单位矩阵，上标"-1"表示矩阵求逆。再定义

$$\begin{cases} E(t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D[\sum_{i=1}^{N}d_i|\nabla\psi_i|^2+\sum_{i=1}^{N-1}d_iF_i(\psi_{i+1}-\psi_i)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ E^*=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D[\sum_{i=1}^{N}d_i|\nabla\psi_i^*|^2+\sum_{i=1}^{N-1}d_iF_i(\psi_{i+1}^*-\psi_i^*)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ Z(t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D\sum_{i=1}^{N}d_i|q_i|^2, \qquad Z^*=\dfrac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^{N}d_i|q_i^*|^2, \\ H=E^*+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D\sum_{i=1}^{N}(C_{2i}-C_{1i})d_i|q_i^*|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \qquad +\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D\sum_{i=1}^{N}C_{2i}d_i|q_{0i}'|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{19}$$

在文献[33]中已证明：若矩阵M是正定的，记其最小特征值为k_1，则有

$$E(t)\leqslant\left(\frac{1+\lambda k_1}{\lambda k_1}\sqrt{E^*}+\frac{\sqrt{E^*+\lambda k_1 H}}{\lambda k_1}\right)^2, \tag{20}$$

$$Z(t)\leqslant\frac{2(E^*+\sqrt{E^*(E^*+\lambda k_1 H)})+\lambda k_1 H}{\lambda k_1^2}+Z^*. \tag{21}$$

显然，E^*、Z^*与H仅与初始扰动场有关，当它们趋于零时，扰动能量$E(t)$与扰动位涡拟能$Z(t)$关于时间t一致趋于零，这样，就得到了

判据 4.1 若定常态(Ψ_i, Q_i)满足（16）、（18）两式，且矩阵M是正定的，则它是非线性稳定的。

下一判据虽然较判据 4.1 弱，但便于应用。

判据 4.2 设定常态(Ψ_i, Q_i)满足（16）、（18）式，且$\lambda\min\limits_i C_{1i}>1$，则它是非线性稳定的。

类似于前节，还有[33]

判据 4.3 若在每一层，有$\nabla Q_i=0$，则(Ψ_i, Q_i)是非线性稳定的。

当区域D是周期纬向通道，且角动量守恒时，可得到较判据 4.1 更优的非线性稳定性判据，读者可参阅文献[33]。

现在，我们考察经典的 Phillips 模型的非线性稳定性：在每一层，定常态为

$$\Psi_i(y)=-U_i y,\qquad Q_i(y)=(-1)^{i+1}F_i U_s y+f_0+\beta y,\qquad i=1,2. \tag{22}$$

这里U_1、U_2分别是上、下层的速度（常数），$U_s=U_1-U_2$，区域$D=\{-\pi\leqslant x\leqslant\pi, -L\leqslant y\leqslant L\}$是纬向周期通道。利用上述非线性稳定性判据，可证明[33]：当下述条件之一成立时，定常态（22）式是非线性稳定的：

(1) $U_s=-\beta/F_1$，且$\lambda^2>F_1(F_1+F_2)$，

(2) $U_s=\beta/F_2$，且$\lambda^2>F_2(F_1+F_2)$，

(3) $-\beta/F_1<U_s<\beta/F_2$，

(4) $U_s<-\beta/F_1$或$U_s>\beta/F_2$，且

$$\lambda^2-2F_1F_2+(F_1-F_2)\beta/U_s>0, \tag{23}$$

$$\lambda^2(\lambda^2-4F_1F_2)U_s^2+2U_s\beta(F_1-F_2)\lambda^2+(F_1+F_2)^2\beta^2>0. \tag{24}$$

注意到用标准模方法考察 Phillips 模型得到的线性不稳定条件是（参见文献[31]中的(7.11.6)式)：波数k满足

$$\beta^2(F_1+F_2)^2+2\beta U_s k^4(F_1-F_2)-k^4U_s^2(4F_1F_2-k^4)<0 \tag{25}$$

显然，充分大的波数k将不满足（25）式，这就是两层 Phillips 模型斜压不稳定性的短波截断现象。因为$\lambda^{1/2}$恰为最小波数，若（25）式对所有的波数k都不成立，那么将得到（24）式（等号对应于中性稳定情形）。因而，（24）式恰对应于边缘稳定曲线，并且揭示了短波截断现象的非线性特征。

最后，若$\beta=0$，则对于非平凡的$U_s\neq0$，上述稳定性条件简化为

$$\lambda^2 > 4F_1F_2.$$

这与 Ripa[34]的结果是相同的。

关于上述结果的证明，读者可参阅文献[33]。应该指出，文献[35]也建立了多层准地转模式对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性判据，但得到的结果较弱。此外，因为文献[35]同时考察了初值与模式中参数的扰动，所以那里得到的关于扰动能量与扰动位涡拟能的上界估计比较复杂。Ripa[34]考察的的模式较（13）、（14）式更为一般：允许各层间密度跃度不同，流体的上、下边界既可以是自由的，也可以是刚盖近似。但 Ripa[28]承认文献[34]中关于 Arnold 第二定理的证明是不正确的。最近，文献[32]也考察了文献[34]中多层准地转模式的非线性稳定性，在文献[33]的基础上，也得到了对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性判据。还应指出，当初始扰动能量非零时，文献[32]中的关于扰动能量与扰动位涡拟能的上界估计也较（20）、（21）式更优一些，有兴趣的作者可参阅原文。

五、三维准地转运动的非线性稳定性

考察三维（连续层结）的准地转运动的非线性稳定性，其控制方程为[31]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t}+\partial(\Phi,P)=0, \qquad 在\Omega中\\&\frac{\partial \Phi_z}{\partial t}+\partial(\Phi,\Phi_z+\frac{N^2}{f_0}h)=0, \qquad z=z_0,\\&\frac{\partial \Phi_z}{\partial t}+\partial(\Phi,\Phi_z)=0, \qquad z=z_1,\end{aligned} \tag{26}$$

这里$\Phi(x,y,z,t)$为流函数，位涡

$$P=\nabla^2\Phi+\frac{f_0^2}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0}{N^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+f_0+\beta y, \tag{27}$$

$\rho_0(z)$、$N(z)$分别是密度函数与浮力频率，z是垂直方向坐标，$0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$，区域$\Omega=D\times(z_0,z_1)$，其余记号意义同前。水平侧边界条件为

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right|_{\partial D}=0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\partial D_j}\nabla\Phi\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0, \qquad j=0,\cdots,J. \tag{28}$$

考察（26）—（28）的定常态$(\Phi,P)=(\Psi,Q)$。设存在一元连续可导函数$\Psi(\cdot)$，$\Psi_i(\cdot)$，$i=0,1$，使得

$$\begin{aligned}&\Psi(x,y,z)=\Psi(Q(x,y,z)) \qquad 在\Omega中,\\&\Psi(x,y,z_i)=\Psi_i(B_i), \qquad z=z_i, \qquad i=0,1.\end{aligned} \tag{29}$$

这里$B_0=\left.\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}+\frac{N}{f_0}h\right)\right|_{z=z_0}$，$B_1=\left.\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right|_{z=z_1}$.

叠加在(Ψ,Q)之上的有限振幅扰动(ψ,q)定义为

$$\Phi = \Psi + \psi, \qquad P = Q + q.$$

对应于 Arnold 第二定理，设$\Psi(\cdot)$、$\Psi_i(\cdot)$均为单调函数，且存在常数C_1，C_2，C_{1i}，C_{2i}，$i = 0, 1$，使得

$$\begin{cases} 0 < C_1 \leqslant -\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}Q} \leqslant C_2 < \infty, \\ 0 < C_{1i} \leqslant (-1)^{i+1}\dfrac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}B_i} \leqslant C_{2i} < \infty, \qquad i = 0,1. \end{cases} \tag{30}$$

作者等在文献[36]中，通过精细的先验估计，建立了用初始扰动场给出的扰动能量、扰动位涡拟能及扰动边界能量的上界估计，从而建立了对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性判据。此后，作者等[37]又进一步改进了文献[36]的结果。现在叙述文献[37]的结果。为此，定义

$$F_1 = \frac{\max\limits_{(z_0,z_1)} f_0^2(\rho_0 / (|z_1 - z_0|N^2) + |\partial(\rho_0 / N^2) / \partial z|)}{\min\limits_{(z_0,z_1)} \rho_0},$$

$$F_2 = f_0^2 \max_{(z_0,z_1)}(1 / N^2).$$

于是有

判据 5.1 设定常态(Ψ, Q)满足（29）、（30）式，且

$$C_1\left[\lambda - F_1\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{11}}\right) - F_2\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{11}}\right)^2\right] > 1. \tag{31}$$

则它是非线性稳定的。

因为篇幅关系，这里略去了关于扰动能量、扰动位涡拟能及扰动边界能量的上界估计。有兴趣的读者可参阅原文。

现在讨论经典的 Eady 模型的非线性稳定性。这时区域D是周期纬向通道，$\beta = 0$，也不考虑地形的影响，即$h = 0$，密度ρ_0与浮力频率N均为常数，定常态为

$$U = \Lambda z, \qquad V = 0; \qquad \Psi = -\Lambda yz, \qquad Q = f_0, \tag{32}$$

这里 Λ 是任一给定常数。

显然，除了$U \equiv 0$这一平凡情形之外，定常态（32）不满足（29）、（30）式，因而判据 5.1 这时不适用。文献[38]中我们指出，利用能量守恒及角动量守恒构造的泛函不以定常态（32）为临界点，因而用通常证明 Arnold 第二定理的办法似乎难以研究其非线性稳定性。但是，这时扰动位涡拟能也是守恒量，利用这一性质，作者等[38]克服了定常态非临界点之困难，在文献[36, 37]的基础上，建立了以初始扰动给出的扰动能量与扰动边界能量的上界估计，当初始扰动趋于零时，该类上界估计关于时间t一致地趋于零，这样，得到了

判据 5.2 若纬向通道南北方向的宽度$|Y_2 - Y_1|$与垂直方向的高度$|z_1 - z_0|$满足

$$\frac{\pi}{|Y_2 - Y_1|} > \frac{2\sqrt{5} f_0}{|z_1 - z_0| N}, \tag{33}$$

则定常态（32）是非线性稳定的。

经典的线性稳定性理论中，用标准模方法得到了下述线性稳定性判据[31,39]：若条件

$$\frac{\pi}{|Y_2 - Y_1|} > \frac{2.40 f_0}{|z_1 - z_0| N}, \tag{34}$$

被满足，则（32）式是线性稳定的，此即"短波截断"现象。上述二判据之表达式只有系数上的差异，但其物理意义有本质的不同。判据 5.2 适用于任意空间结构的有限振幅扰动，而线性稳定性判据仅适用于固定的空间结构（标准模）之小扰动情形。至于存在系数差异的原因，是作者及其同事们正在研究的课题，我们倾向于相信，当条件（34）被满足时，定常态（32）式也是非线性稳定的。

六、非线性对称不稳定性

对称不稳定性是大气动力学中的一个经典问题。早期关于该问题研究的兴趣主要集中于轴对称的行星环流方面[39]，70 年代以来，人们对该问题的兴趣源于将中尺度锋面雨带解释为（湿）对称不稳定性导致的结果[40]。我们考察非流体静力近似下、f平面上的包辛涅斯克流体的运动。在对称性假定下，设动力变量不依赖于y坐标，在绝热假定下，控制方程为[41]

$$\omega_t = -\partial(\psi,\omega) + \partial(m, f_0 x) + \partial\left(\theta, \frac{gz}{\theta_0}\right), \tag{35}$$

$$m_t = -\partial(\psi,m), \qquad \theta_t = -\partial(\psi,\theta), \tag{36a,b}$$

这里(x, y, z)是空间坐标，(u, v, w)是速度场，流函数ψ与涡度ω分别由$\psi_z = u$，$-\psi_x = w$，$\omega = u_z - w_x = \nabla^2\psi$定义，$\partial(F, G) = F_z G_x - F_x G_z$是$(x, z)$平面上的两维 Jocobi 算子，$m \equiv v + f_0 x$是绝对速度的$y$分量，$\theta$与$\theta_0$分别是位温与（常数）参考位温。在$(x, z)$平面上的有界单连通区域$D$中考察问题，边界条件是$\psi|_{\partial D} = 0$。

我们考察定常态

$$u = 0 = w, \qquad v = V(x,z), \qquad \theta = \Theta(x,z) \tag{37}$$

的非线性稳定性，它满足热成风方程

$$f_0 \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{g}{\theta_0}\frac{\partial \Theta}{\partial x}. \tag{38}$$

叠加在定常态（37）式之上的有限振幅扰动定义为

$$\omega = \omega', \qquad m = M + m', \qquad \theta = \Theta + \theta', \tag{39}$$

这里$M \equiv V + f_0 x$。

首先研究最简单情形：Brunt-Vaisala 频率$N \equiv (g\Theta_z / \theta_0)^{1/2}$，绝对涡度的垂直分

量$\zeta \equiv V_x + f_0$皆为常数[42]。为了叙述方便，定义矩阵C，其元素$c_{11} = f_0 N^2 / (\zeta N^2 - f_0 V_z^2)$，$c_{12} = c_{21} = -f_0 N V_z / (\zeta N^2 - f_0 V_z^2)$，$c_{22} = \zeta N^2 / (\zeta N^2 - f_0 V_z^2)$。记矩阵$C$的二特征值为$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$。容易验证，若 Richardson 数$Ri \equiv N^2 / V_z^2$满足$Ri > f_0 / \zeta > 0$，则特征值$\lambda_1 > 0$。任意取定$\lambda$满足$\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$。对于扰动场，定义范数

$$\|X'\|_\lambda = \left\{\frac{1}{2}\int_D \left\{|\nabla \psi'|^2 + \lambda\left(m'^2 + \frac{g^2\theta'^2}{N^2\theta_0^2}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right\}^{1/2},$$

作者最近建立了

判据 6.1 若$Ri > f_0 / \zeta > 0$，则定常态（37）式是非线性稳定的。此外，有下述以初始扰动场给出的关于任意时刻扰动场的上界估计

$$\|X'(t)\|_\lambda^2 \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\|X'(0)\|_\lambda^2. \tag{40}$$

对于一般情形，由变分原理，假定存在连续可导函数$C(m, \theta)$，使得[41]

$$C_m(M,\theta) = f_0 x, \qquad C_\theta(M,\theta) = \frac{gz}{\theta_0}. \tag{41}$$

此外，设初始扰动(m'_0, θ'_0)是"自然"的，即

$$S_{M,\Theta} = S_{M+m'_0, \Theta+\theta'_0}, \tag{42}$$

这里

$$S_{M,\Theta} = \{(\xi,\eta) \mid \text{存在}(x,y)\text{属于区域}D\text{，使得}\xi = M(x,z), \eta = \Theta(x,z)\},$$

$$S_{M+m'_0,\Theta+\theta'_0} = \{(\xi,\eta) \mid \text{存在}(x,y)\text{属于区域}D\text{，使得}\xi = (M+m'_0)(x,y),$$
$$\eta = (\Theta + \theta'_0)(x,y)\}.$$

为了叙述方便，记$k = g(N\theta_0 / g)_{\text{non}} / (N\theta_0)$，这里$(N\theta_0 / g)_{\text{non}}$是一个无量纲量，其量值与$N\theta_0 / g$相同。矩阵$\tilde{C}$的元素为$\tilde{c}_{11} = f_0 N^2 / (\zeta N^2 - f_0 V_z^2)$，$\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{21} = -g f_0 V_z / [\theta_0 k(\zeta N^2 - f_0 V_z^2)]$，$\tilde{c}_{22} = g^2\zeta / [\theta_0^2 k^2(\zeta N^2 - f_0 V_z^2)]$，矩阵$\tilde{C}$的特征值分别记为$\tilde{\lambda}_1(x,z)$与$\tilde{\lambda}_2(x,z)$，然后定义

$$\Lambda_1 = \min_D \min(\tilde{\lambda}_1(x,z), \tilde{\lambda}_2(x,z)), \qquad \Lambda_2 = \max_D \max(\tilde{\lambda}_1(x,z), \tilde{\lambda}_2(x,z)).$$

对于任一满足$\Lambda_1 \leqslant \Lambda \leqslant \Lambda_2$的$\Lambda$，定义范数

$$\|X'\|_\Lambda = \left\{\frac{1}{2}\int_D [|\nabla \psi'|^2 + \Lambda(m'^2 + (k\theta')^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right\}^{1/2}.$$

作者最近还得到了

判据 6.2 设基本态（37）式满足（38）、（41）与（42）式，若$N^2 / V_z^2 > f_0 / \zeta > 0$，则它是非线性稳定的。可用初始扰动场给出扰动场的上界估计如下：

$$\|X'(t)\|_\Lambda^2 \leqslant \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\|X'(0)\|_\Lambda^2.$$

在上述两种情形中，非线性稳定性判据 6.1 与 6.2 均与文献[42]的用线性（标准模方法）得到的稳定性判据相同，也与文献[41]得到的 formal 稳定性判据相同，因而易见这里的判据当$\zeta / f_0 = 1$时与文献[41]中的非线性稳定性判据相同，当$\zeta / f_0 \neq 1$时，我们

的结果优于他们的结果。还应该指出，若条件（42）式不成立，Arnold 方法能否用来延拓$C(m,\theta)$的定义域，进而证明类似于判据 6.2 的结果，作者尚不清楚。

七、扰动发展的上界估计问题

当基本态是不稳定时，叠加在其上的初始扰动（包括无穷小扰动）究竟如何发展？这是不稳定理论十分关心的一个重要问题。显然，线性不稳定性理论难以回答该问题。标准模方法给出的不稳定波，其振幅随时间以指数形式无限制增长，这显然不合实际情况。事实上，线性理论只在扰动发展的初始阶段成立，当扰动发展到有限振幅时，非线性项便不能被忽略了。弱非线性理论虽然提供了一种获取扰动振幅发展之信息的方法，但正如前文所指出的，由于振动展开仅为渐近收敛，这类结果的准确性必须借助其他方法（例如数值方法）加以验证，显然，这是该理论的不足之处。

在非线性稳定性研究中，研究者使用 Arnold 方法，成功地以初始扰动场给出了扰动能量、扰动位涡拟能及扰动边界能量等的上界估计。这类估计的一个重要特点是：它关于有限振幅的扰动成立。利用这一特点，Shepherd[21—23]提出了一种新方法，用来研究叠加在不稳定基流之上扰动（包括有限振幅）发展的上界问题。他的思路是：通过选取某稳定的基本气流（人为构造的），利用有关估计关于有限振幅扰动成立的特点，可将叠加在不稳定基流之上的扰动分解成两部分，其一为相对于该稳定基流的部分，其二为稳定基流与不稳定基流之间的偏差，第一部分可用叠加在稳定基流之上扰动发展的上界而加以估计。再通过一些数学处理，即可得到叠加在不稳定基流之上扰动的能量、位涡拟能等的上界估计。由于篇幅所限，详情可参阅文献[21—23]。

作者等建立了适用于初值的扰动与模式中参数扰动的非线性稳定性判据[29]，利用关于参数扰动成立的特点，作者在文献[29]中推广了 Shepherd 的方法，讨论了两维正压不稳定流的扰动发展的上界问题，得到了较文献[21]更优的结果。

Cho 等[41]考察了对称不稳定扰动发展估计问题：基本态

$$\begin{cases} V^{(0)} = \tilde{N}(1+\varepsilon)z, \qquad \omega^{(0)} = 0, \\ \theta^{(0)} = \dfrac{\theta_0 \tilde{N}^2 z}{g} + \theta_0 \tilde{N} f_0 (1+\varepsilon)\dfrac{x}{g}, \end{cases} \tag{43}$$

满足（35）—（38），这里 Brunt-Vaisala 频率是常数，$\varepsilon>0$是超临界数，由于$Ri=1/(1+\varepsilon)^2$，由判据 6.1 可知，初始状态

$$V(0)=V^{(0)}+V^{(1)}, \qquad \omega(0)=\omega^{(1)}, \qquad \theta(0)=\theta^{(0)}+\theta^{(1)} \tag{44}$$

是不稳定的，（这里$V^{(1)}$、$\omega^{(1)}$、$\theta^{(1)}$是无穷小扰动）。

在矩形区域$-H/2\leqslant x\leqslant H/2$中，Cho 等[41]给出了扰动动能的上界估计。作者利用上节得到的较文献[41]中结果更优的估计式（40），得到了下述估计：

$$\frac{1}{2}\int_D |\nabla\psi'|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z \leqslant \frac{1}{24} H^3 L \tilde{N}^2 \varepsilon(2+\varepsilon) f(\mu),$$

这里$\mu = f^2 L^2 / H^2 \tilde{N}^2$，而

$$f(\mu)=\begin{cases}1+\mu, & 0\leqslant\mu\leqslant 3,\\ 4. & \mu\geqslant 3.\end{cases}$$

这一公式用超临界数ε严格给出了叠加在不稳定基流之上扰动能量的上界估计，简单比较可知这一结果明显优于文献[41]中的结果。

扰动发展的上界估计问题是一个颇具吸引力的课题，Shepherd 的方法具有重要价值。这一方法需要精细的数学技巧，例如基本气流族的选取，参数扰动的作用，等等。毫无疑问，进一步深入研究、发展并完善这一方法，是非线性不稳定性研究的重要方向之一[43]。

八、讨 论

随着非线性大气科学的发展，通过研究者的不懈努力，在研究大气运动的非线性不稳定性方面，Arnold 方法取得了令人瞩目的成果。目前，该领域的研究正向着理论探讨的进一步深化及与实际应用紧密结合两方面发展。

首先，在理论研究方面，研究者正从广度与深度两方面不断深入探索。在广度方面，Arnold 方法的应用领域正日益扩大，它揭示了正压不稳定性、斜压不稳定性、对称不稳定性；等等；研究了准地转模式、半地转模式[44]、锋地转模式[45]、等等；在深度方面，地球流体力学中的 Hamilton 理论得到了很大发展[46]。Noether 定理告诉我们，一个 Hamilton 系统的物理守恒性与其几何对称性之间存在着对应关系。Arnold 方法的要点是利用物理守恒量构造不变泛函，它具有鲜明的几何方法特征。对于地球流体力学中的各种模式，一般地，其 Hamilton 形式是非典则的[46]，因而存在非平凡的 Casimir。这样，我们便可以用 Hamilton 结构与其相应的 Casimir，构造不变泛函，使得所考察的定常态成为该不变泛函的驻点，从而可进一步研究其稳定性。可以预期，利用 Hamilton 理论研究非线性不稳定性，是将几何与分析方法结合起来的有效途径之一，值得我们去进一步探讨。

无庸讳言，迄今为止 Arnold 方法仅适用于保守系统，这与真实的大气的运动是有区别的。因此，将该方法进一步发展为可以研究外强迫作用，是一个挑战性的课题。对于一类特殊的外强迫作用，文献[21]曾作了有益的尝试。由于外强迫的复杂性，不应期望在这方面有统一的、适用于所有外强迫类型的理论结果。但对于某些具有鲜明物理意义的外力作用情形，有理由相信将来会出现有价值的工作。

在应用方面，研究者开始使用 Arnold 方法所得到的理论成果去研究大气与海洋运动中的一些具体问题。Dowling[47]利用木星上中纬度对流层的观测资料，发现其位涡与流函数恰好满足线性关系式，并属于 Arnold 第二定理的范畴，其线性系数使其是中性稳定的。70 年代中期以来，modon 的非线性稳定性研究愈来愈受到人们的重视，研究者期望用 modon 的稳定性去研究阻塞维持的机制[48]，虽然一些作者[49]声称解决了 modon 的非线性稳定性，但进一步的研究表明这些工作是不严格的，其正确性受到了另外一些学者的质疑[49, 50]。modon 的非线性稳定性仍然是一个悬而未决的问题，不少学者正在这方面进行着不懈的努力。可以预期，这一领域的研究成果，可能会在研究阻

塞维持的机制方面，发挥重要作用。

在研究线性稳定性问题时，一般地，研究者对资料作纬向平均，考察的基本态大多为纬向气流。近年来，在非线性稳定性研究中，研究者倾向于作时间平均，因而（一般地）基本态是非纬向气流。将 Arnold 方法的理论成果应用于大气运动中的具体问题时，以准地转模式为例，首先必须解决的是如何确定流函数与位涡之间的函数关系式。与其对应的问题是，对于给定的流函数与位涡之间的函数关系式，通过求解（一般地，是求数值解）椭圆型方程的边值问题，得到理论上的基本态，然后，再与资料作比较。由于流函数与位涡之间的函数关系式（从理论上）可任意给定，因而寻找具有气象意义的基本态是一个重要的问题[51]。

Arnold 方法的理论成果的另一个重要应用领域是计算地球流体力学。随着电子计算机的高速发展，数值试验与数值模拟已成为大气科学研究中的最重要的手段之一[52,53]。大气运动的不稳定性研究中，数值方法也扮演着越来越重要的角色。但是，一个重要的问题一直令人困惑，即如何区分计算不稳定性与动力不稳定性。当数值试验或数值模拟中出现不稳定现象时，我们需要弄清它究意是计算不稳定性还是动力不稳定性引起的。本文所述的非线性稳定性判据以及所建立的有关扰动演变的上界估计，提供了一种检验数值格式的比较有效的方法。若数值试验与模拟中出现不稳定现象，而基本态是非线性稳定的，则提示我们这是计算不稳定性引起的，必须修改数值格式或采用另外更有效的格式，孙左令[52]在这方面作了初步研究，进一步的深入探讨正在进行。

参 考 文 献

[1] Rayleigh, Lord, 1880, On the stability or instability of certain fluid motions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11**, 57-70.

[2] Charney, J. G., 1947, The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, *J. Meteor.*, **4**, 135-162.

[3] Eady, E. T., 1949, Long waves and cyclone waves, *Tellus*, **1**, 33-52.

[4] Kuo, H. L., 1949, Dynamical instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere, *J. Meteor.*, **6**, 105-122.

[5] Fjortoft, R., 1950, Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex, *Geophys. Publ.*, **17**, 1-52.

[6] Charney, J. G. & Stern, M. E., 1962, On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmo. Sci.*, **19**, 159-172.

[7] 卢佩生，卢理，曾庆存，1986，正压准地转模式的谱和扰动的演变，中国科学（B 辑），No.11, 1225~1233.

[8] 张明华，1987，大气动力学中的连续谱及其在大气环流中的重要地位，中国科学院大气物理研究所博士论文。

[9] Burger, A. P., 1966, Instability associated with the continuous spectrum in a baroclinic flow, *J. Atmos. Sci.*, **23**, 272-277.

[10] 任舒展，1993，准地转模型中的连续谱动力学理论及其在大气环流中的应用，中国科学院大气物理研究所博士论文。

[11] Pedlosky, J., 1970, Finite-amplitude baroclinic waves, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 15-30.

[12] Arnol'd, V. I., 1965, Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid, *Dokl. Akad. Nauk. USSR.*, **162**, 975-978. English Transl: Soviet Math., 6, 773-777.

[13] Arnol'd, V. I., 1966, On a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved, Matematika*, **54**, No.5, 3-5. English Transl: Am. Math. Soc. Transl., Series 2, 79, 267-269, (1969).

[14] Ball, J. M. & Marsden, J. E., 1984, Quasiconvexity second variation and nonlinear stability in elasticity. *Arch. Rat. Mech. An.*, **86**, 251-277.

[15] Holm, D. D., Marsden, J. E., Ratiu, T. & Weinstein, A., 1985 Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, *Phys. Rep.*, **123**, 1-116.

[16] Abarbanel, H. D. I., Holm, D. D., Marsden, J. E. & Ratiu, T., 1986, Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria, *Phil. Trans. Roy. Lond.*, **A318**, 349-409.

[17] Benzi, R., Pierini, S., Vulpiani, A. & Salusti, E., 1982 On nonlinear hydrodynamic stability of planetary vortices, *Geophys & Astrophys. Fluid Dyn.*, **20**, 293-306.

[18] Andrews, D.G., 1984, On the existence of nonzonal flows satisfying sufficient conditions for stability, *Geophys & Astrophys. Fluid Dyn.*, **28**, 243-256.

[19] McIntyre, M. E. Shepherd, T.G., 1987, An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Aronl'd's stability theorems, *J. Fluid Mech*, **181**, 527-565.

[20] Zeng Qingcun, 1989, Variational principle of instability of atmospheric motion, *Adv. Atmos. Sci.*, **6**, 137-172.

[21] Shepherd, T. G., 1988, Rigorous bounds on the nonlinear saturation of instabilities to parallel shear flows, *J. Fluid Mech.*, **196**, 291-322.

[22] Shepherd, T. G., 1988, Nonlinear saturation of baroclinic instability, Part I: The two-layer model, *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2014-2025.

[23] Shepherd, T. G., 1989, Nonlinear saturation of baroclinic instability, Part II: Continuously-stratified fluid, *J. Atmos. Sci.*, **46**, 888-907.

[24] Carnevale, G. F. and Shepherd, T. G., 1990, On the interpretation of Andrews' theorem, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **51**, 1-17.

[25] Swaters, G. E., 1986, A nonlinear stability theorem for baroclinic quasigeostrophic flow, *Phys. Fluids*, **29**, 5-6.

[26] Vladimirov, V. A. 1986, Conditions for nonlinear stability of flows of an ideal incompressible liquid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **27**, No.3, 382-389.

[27] Frederiksen, J. S., 1991, Nonlinear stability of baroclinic flows over topography, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **57**, 85-97.

[28] Ripa, P., 1993, Arnol'd's second stability theorem for the equivalent barotropic model, *J. Fluid Mech.*, **257**, 597-605.

[29] Mu Mu, 1992, Nonlinear stability of two-dimensional quasi-geostrophic motions, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **65**, 57-76.

[30] Mu Mu, & Shepherd, T. G., 1994, On Arnol'd's second nonlinear stability theorem for two-dimensional quasi-geostrophic flow, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **75**, 21-37.

[31] Pedlosky, P., 1979, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer.

[32] Liu Yongming & Mu Mu, 1994, Arnol'd's second nonlinear stability theorem for general multilayer quasi-geostrophic model, *Adv. Atmos. Sci.*, **11**, 36-42.

[33] Mu Mu, Zeng Qingcun, Shepherd, T. G. & Liu Yongming, 1994, Nonlinear stability of multilayer quasi-geostrophic flow, *J. Fluid Mech.*, **264**, 165-184.

[34] Ripa, P., 1992, Wave energy-momentum and pseudoenergy-momentum conservation for the layered quasi-geostrophic instability problem, *J. Fluid Mech.*, **235**, 379-398.

[35] Mu Mu, 1991, Nonlinear stability criteria for motions of multilayer quasigeostrophic flow, *Science in China*, **34(B)**, 1516-1528.

[36] Mu Mu & Wang Xiyong, 1992, Nonlinear stability criteria for the motion of three-dimensional quasi-geostrophic flow on a beta-plane, *Nonlinearity*, **5**, 353-371.

[37] Mu Mu & Simon, J. 1993, A remark on nonlinear stability of three-dimensional quasigeostrophic motions, *Chinese Science Bulletin.*, **38**, No.23, 1978-1984.

[38] Mu Mu & Shepherd, T. G., 1994, Nonlinear stability of Eady's model, *J. Atmos. Sci.*, **51**, 3427-3436.

[39] Charney, J. G., 1973, Planetary fluid dynamics, *Dynamic Meteorology*, 97-351. (ed.Morel), Reidel.

[40] Bennetts, D. A. & Hoskins, B. J., 1979, Conditional symmetric instability — A possible explanation for frontal rainbands, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **105**, 945-962.

[41] Cho, H. R., Shepherd, T. G. & Vladimirov, V. A., 1993, Application of the direct Liapunov method to the problem of symmetric stability in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **50**, No.6, 822-836.

[42] Hoskins, B. J., 1974, The role of potential voticity in symmetric stability and instability, *Quart. J. Roy. Meteor*

Soc., **100**, 480-482.

[43] Zhu Xun & Strobel, D. F., 1992, Nonlinear saturation of baroclinic instability in two-layer models, *J. Atmos. Sci.*, **49**, 1961-1967,

[44] Kushner, P. J. & Shepherd, T. G., 1994, Wave activity conservation laws and stability theorems for semi-geostrophic dynamics, PartI: Pseudomomentum-based theorem, *J. Fluid Mech*, in press.

[45] 李扬，1995，准地转和半地转模式的非线性稳定性研究，中国科学院大气物理研究所博士论文。

[46] Shepherd, T. G., 1990, Symmetries,conservation laws and Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics, *Advances in Geophysics*. **32**, 287-338.

[47] Dowling, T. E., 1993, A relationship between potential vorticity and zonal wind on Jupiter, *J. Atmos. Sci.*, **50**, No.1, 14-22.

[48] McWilliams, J. C., 1980, An application of equivalent modons to atmospheric blocking, *Dyn. Atoms. Oceans.*, **5**, 43-66.

[49] Nycander, J., 1992, Refutation of stability proofs for dipole vortices, *Phys. Fluids*, **A4**(3), 467-476.

[50] Ripa, P., 1992, Comments on a paper by Sakuma and Ghil, *Phys. Fluids*, A4(3), 460-463.

[51] Haupt, S. E., McWilliams, J. C. & Tribbia, J. J., 1993, Modons in shear flow, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1181-1198.

[52] 孙左令，1995，非线性运动稳定性与计算稳定性初探，中国科学院大气物理研究所硕士论文。

[53] 曾庆存，1979，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，科学出版社。

Some Advances in the Study of Nonlinear Instability of the Atmospheric Motions

Mu Mu

(LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract

In this paper, some recent advances in the study of nonlinear instability of the atmospheric motions by using Arnold's method (energy-Casimir method) are summarized. The prospects of the further development of the theory and its applications are also discussed.

Key words: instability; nonlinearity.